УДК 331.5.024.54:314.135

МОДЕЛЮВАННЯ СТАБІЛЬНОГО ФУНКЦІОНУВАННЯ МЕХАНІЗМУ ПОПИТУ ТА ПРОПОЗИЦІЇ НА РИНКУ РОБОЧОЇ СИЛИ В УКРАЇНІ

 БАБИНЮК О. І.

УДК 331.5.024.54:314.135

Бабинюк О. І. Моделювання стабільного функціонування механізму попиту та пропозиції на ринку робочої сили в Україні

Мета статті полягає в дослідженні ринку робочої сили та визначенні умов стабільного функціонування механізму попиту та пропозиції. Для дослідження побудована модель з використанням математичного апарату різницевих рівнянь із марковськими коефіцієнтами. За допомогою методa моментних рівнянь визначено умови стійкості в середньому ймовірнісних характеристик, що описуютьринок праці. Проаналізовано модель структурних перетворень на ринку праці, засновану на методі загальної ентропії. Дано порівняльну характеристику результатів для методу загальної ентропії та методу моментних рівнянь, що запропонований у статті. Отримано, що умови стійкості системи та умови стаціонарних станів при дослідженні вищезгаданими методами співпадають, але метод, запропонований у роботі, є більш зручним і дозволяє враховувати вплив випадкових факторів на систему, що знаходиться у стані невизначеності. Установлено, що стабільний режим функціонування ринку праці спостерігається при врівноваженні попиту і пропозиції робочої сили. Перспективою подальших досліджень у даному напрямі є застосування методу моментних рівнянь для дослідження багатогалузевих економічних моделей ринку праці, що потребує потужних математичних розрахунків.

Ключові слова: *ринок робочої сили, різницеві рівняння з марковськими коефіцієнтами, метод моментних рівнянь, метод загальної ентропії, умови стійкості в середньому системи.*

Рис.: *11.* ***Табл.:*** *6.* ***Формул:*** *27.* ***Бібл.:*** *11.*

Бабинюк Олександра Іванівна *– асистент, кафедра комп'ютерної математики та інформаційної безпеки, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана (пр. Перемоги, 54/1, Київ, 03680, Україна)*

E-mail: *a.babynuk@gmail.com*

УДК 331.5.024.54:314.135

Бабинюк А. И. Моделирование стабильного функционирования механизма спроса и предложения на рынке рабочей силы в Украине

Цель статьи заключается в исследовании рынка рабочей силы и определении условий устойчивого функционирования механизма спроса и предложения. Для исследования построена модель с использованием математического аппарата разностных уравнений с марковскими коэффициентами. С помощью метода моментных уравнений определены условия устойчивости в среднем вероятностных характеристик, описывающих рынок труда. Проанализирована модель структурных преобразований на рынке труда, основанная на методе общей энтропии. Дана сравнительная характеристика результатов для метода общей энтропии и метода моментных уравнений, предложенного в статье. Получено, что условия устойчивости системы и условия стационарных состояний при исследовании вышеупомянутыми методами совпадают, но метод, предложенный в работе, является более удобным и позволяет учитывать влияние случайных факторов на систему, находящуюся в состоянии неопределенности. Установлено, что стационарный режим функционирования рынка труда наблюдается при уравновешенном спросе и предложении рабочей силы. Перспективами дальнейших исследований в данном направлении является применение метода моментных уравнений для исследования многоотраслевых экономических моделей рынка труда, что требует серьёзных математических расчетов.

Ключевые слова: *рынок рабочей силы, разностные уравнения с марковскими коэффициентами, метод моментных уравнений, метод общей энтропии, условия устойчивости в среднем системы.*

Рис.: *11.* ***Табл.:*** *6.* ***Формул:*** *27.* ***Библ.:*** *11.*

Бабинюк Александра Ивановна *– ассистент, кафедра компьютерной математики и информационной безопасности, Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана (пр. Победы, 54/1, Киев, 03680, Украина)*

E-mail: *a.babynuk@gmail.com*

UDC 331.5.024.54:314.135

Babyniuk O. I. Simulation of Stable Functioning of the Mechanism of Supply and Demand in the Labor Market in Ukraine

The article is aimed at studying the labor market and the conditions for stable function of the mechanism of supply and demand. A model that has been built for the study purposes uses the mathematical tools of difference equations with Markov coefficients. Using the method of moments equations, stability conditions have been determined in the average of probabilistic characteristics that describe the labor market. A model of structural transformation in the labor market, based on the method of total entropy, has been analyzed. A comparative characterization of results has been accomplished for both the method of total entropy method and the method of moments equations, proposed in the article. It is obtained that the conditions of system stability and the conditions of stationary states in the study of the above methods are the same, but the method proposed in the publication is more convenient and allows to take into account the influence of random factors on the system in a state of uncertainty. It has been determined that stationary mode of functioning of labor market is observed with balanced supply and demand of labor. Prospects for further research in this area is application of the method of moments equations for the study of multidisciplinary economic models of labor market that requires serious mathematical calculations.

Keywords: *labor market, differential equation with Markov coefficients, method of moments equations, method of total entropy, stability conditions in the system's average.*

Fig.: *11.* ***Tabl.:*** *6.* ***Formulae:*** *27.* ***Bibl.:*** *11.*

Babyniuk Oleksandra I. *– Assistant, Department of Mathematics, Computer and Information Security, Kyiv National Economic University named after V. Getman (pr. Peremogy, 54/1, Kyiv, 03680, Ukraine)*

E-mail: *a.babynuk@gmail.com*

Ринок робочої сили – система економічних відносин з приводу купівлі-продажу такого специфічного товару, як робоча сила, – важлива сфера економічної та соціально-політичного життя суспільства.

Як і будь-який товарний ринок, ринок праці заснований на попиті та пропозиції. Попит у даному випадку виступає у формі потреби на заняття вільних робочих місць і виконання робіт, а пропозиція – у наявності незайнятої (потенційної) робочої сили або бажання змінити місце роботи.

З *боку попиту* головним чинником, що впливає на динаміку зайнятості, є стан економічної кон'юнктури, фаза економічного циклу. Крім цього, серйозний вплив на потребу в робочій силі надає науково-технічний прогрес. На *попит і пропозицію* робочої сили впливає ряд факторів: демографічні, міграційні, що характеризують економічну активність різних груп населення – на пропозицію робочої сили, а стан економіки – на попит.

Проблеми ринку праці передусім пов'язані з високим рівнем безробіття (ідеальним вважається рівень безробіття не більше 5%), яке виникає через розбалансування ринку: є велика кількість вакансій, що пропонуються різними кампаніями, і є величезна армія безробітних, вміння, професійна освіта та досвід яких не дозволяє їм скористатися цими вакансіями. Відсутні можливості забезпечення доступним житлом, що знижує мобільність гарних спеціалістів в інші регіони країни. Рівень продуктивності праці досить низький, порівнюючи з іншими країнами. Монополізована економіка, що дозволяє працедавцю диктувати свої умови праці.

Проектні технології, реалізовані в інноваційному середовищі, орієнтовані на мережеву структуру ринку робочої сили. Взаємодію працівника і роботодавця характеризують окремі аспекти розвитку професійної діяльності, які підтримуються інформаційною інфраструктурою і виробничими центрами корпоративних систем. Проектноорієнтована діяльність на ринку робочої сили являє собою комплекс взаємопов'язаних інституційних і доцільних заходів найму, технологій управління знаннями, соціальними цінностями кваліфікованих працівників з урахуванням використання принципів інвестиційного проектування.

Предметом дослідження в даній роботі є теоретичні методичні проблеми математичного моделювання процесів, що відбуваються на ринку праці, а також методи аналізу і керування процесами відтворення робочої сили як важливої складової ринку праці.

Проблемам стійкості та стабільності процесів відтворення робочої сили присвятили свої дослідження вчені Ж. Сей, А. Сміт, Т, Мальтус, Д. Рікардо, У. Петті, Т. Шульц, Г. Беккер, М. Блауг, П. Самуельсон, Ф. Кене, Р. Оуен, К. Сен-Сімон, Д. Міль, К. Маркс, А. М. Колот, А. В. Коротаєв, В. Б. Колмановский, В. В. Лєбедєв, В. М. Петюх, З. П. Бараник, Е. М. Лібанова, А. М. Васильєв, І. А. Джалладова, І. Г. Лук'яненко та інші.

Для опису змін на ринку праці використовують системи диференціальних рівнянь. У роботі [1] було запропоновано модель, що дає можливість показати поточний рівень зайнятості та спрогнозувати очікуваний рівень зайнятості. Зроблено висновок про те, що спостерігається тенденція руху робочої сили до визначеного рівня, також чітко видно, що модель самоорганізації дуже швидко реагує на бездієвість держави та наближує рівень зайнятості до природного, який має місце в теорії синергетичного підходу до визначення розвитку ринку праці. Проблеми стійкості ринку праці розглядалися в праці [2], де для опису динаміки змін на ринку праці використовується економічна модель самоорганізації, запропоновані диференціальні рівняння та проаналізовані основні властивості його розв'язку Надалі модель аналізується на стійкість. У роботі [3] за допомогою цієї моделі побудовано системи диференціальних рівнянь і узагальнено результати для двох галузей. Визначено умови стаціонарних станів системи.

У роботі [4] було запропоновано методику означення стійкості аграрного ринку праці за допомогою побудови аналітичної динамічної моделі. Отримано математичну модель прогнозування зайнятості сільського населення, доведено її стійкість, що вказує на те, що ринок праці буде знаходитися в рівновазі. З економічної точки зору це означає, що відносно малі відхилення від рівня безробіття на кінець періоду, що розглядається, та незначний перерозподіл структури зайнятості сільських мешканців у наступному періоді не призведуть до значного збільшення темпів зростання безробіття.

У роботі [5] було побудовано модель для оцінки періодів коливань чисельності працівників з урахуванням при формуванні ринку праці такого фактора, як демографічна інерція. Отримано, що тривале зниження рівня безробіття обумовлено скороченням частки молодого населення. Сьогоднішнє зростання рівня безробіття також пов'язано з вичерпанням ефекту зміни структури населення. Тому для регулювання рівня безробіття потрібно змінити структуру зайнятості. Таким чином, демографічні процеси мають значну інерцією і проявляються не відразу, що обумовило в наших роботах [9, 10] використовувати для моделювання апарат диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом.

Автор роботи [6] проаналізував динаміку рівня безробіття в Україні. На основі статистичних даних розраховано параметри моделі, яка описує зміни цього рівня. Запропоновано довгостроковий прогноз на перспективу. Обгрунтовано, що між коефіцієнтами обороту робочої сили та рівнем безробіття існує лінійна залежність, прогноз рівня безробіття співпадає з рівнем природного безробіття, що узгоджується з прогнозами виконаними на основі інших методик. Результати запропонованої моделі стійкі, принаймні на якісному рівні, щодо варіювання базових припущень.

У роботі [7] для опису моделі структурних перетворень на ринку праці запропоновано застосовувати ентропію як характеристику невизначеності стану системи, оскільки будь-яке структурне перетворення незалежно від причини несе в собі інформацію про невизначеності майбутніх періодів, що пов'язано з ймовірнісним характером наслідків.

Метою запропонованої статті, виходячи з недоліків існуючих моделей, є вирішення таких завдань:

- проаналізувати стан ринку робочої сили в Україні;
- побудувати та описати модель функціонування механізму попиту та пропозиції на ринку робочої сили;
- дослідити характеристики ринку за допомогою математичного апарату різницевих рівнянь з марковськими коефіцієнтами;
- дослідити умови стійкості та існування стаціонарних станів запропонованої моделі.

Стохастичні аспекти процесів відтворення робочої сили. Згідно з прогнозами ООН чисельність населення планети неухильно зростає, і до 2025 р. може подолати позначку 8 млрд осіб. Однак серед країн світу це зростання розподіляється нерівномірно. У 2020 р. середній вік населення Європи прогнозується на рівні 43 років, у Китаї – 38 років, а в Африці – 20 років.

У багатьох дослідженнях отримано результати, які узгоджуються з практикою (та між собою) і відповідають реаліям економічної ситуації в Україні. Але певним недоліком існуючих підходів є неточна інтерпретація даних в умовах невизначеності.

Чисельність населення працездатного віку (15–64 роки) безпосередньо залежить від тенденцій демографічного розвитку світового співтовариства. Зокрема, впродовж найближчих 20 років кількість економічно активного населення Індії буде щомісяця зростати на один мільйон чоловік. Цей показник на сьогодні досяг свого максимуму в Китаї та Південній Кореї. Водночас він стрімко знижується в Європі, наприклад, у Німеччині.

Інтенсивна урбанізація, у результаті якої в наступні чотири десятиліття кількість міських жителів Землі зросте на 72 %, також відчутно вплине на бізнес. Концентрація великої кількості людей і ресурсів у компактному просторі є найсильнішою передумовою соціально-економічного прогресу. На даний момент міста виробляють близько 80 % всієї кінцевої продукції, що випускається у світі. Разом з тим, неконтрольована урбанізація може перерости в перенаселеність, бідність і погану освіту – умови, які не сприяють професійному розвитку і, відповідно, продуктивній діяльності.

Політична та економічна ситуація в Україні відбилася і на ринку робочої сили: компанії скорочують зарплати співробітникам, відправляють їх у відпустку за свій рахунок, звільняють. Особливо збільшення числа безробітних було помітно в лютому 2015 р.: за даними Держкомстату, у порівнянні із січнем 2015 р. їх стало більше на 11 200 чоловік.

У березні 2015 р. кількість безробітних скоротилася, але дані кар'єрних порталів показують: ситуація, може, поки й не критична, але непроста. Вакансій стало менше, а кількість резюме і відгуків на них зростає. Зараз рівень безробіття – 7,8 %, але, якщо ситуація посилиться, він може вирости до 15–17 % .

У *табл. 1 – табл. 3* представлені дані по безробіттю та попиту і пропозиції робочої сили в Україні за останні 5 років.

Таблиця 1

Безробітне населення в Україні (за методологією МОП) за тривалістю незайнятості у 2010–2014 рр.

Рік	Безробітне населення у віці 15–70 років, усього, тис. осіб	З них ті, хто мав роботу раніше		Середня тривалість незайнятості, місяців
		усього, тис. осіб	у % до всіх безробітних	
2010	1 713,9	1 359,2	79,3	13
2011	1 661,9	1 272,1	76,5	11
2012	1 589,8	1 233,3	77,6	11
2013	1 510,4	1 148,2	76,0	11
2014	1 847,6	1 411,1	76,4	9

Таблиця 2

Попит і пропозиція робочої сили в Україні у 2010–1015 рр.

Рік	Кількість зареєстрованих безробітних, тис. осіб	Потреба працедавців у працівниках, тис. осіб	Навантаження на одне вакантне місце, осіб
2010	473,23	76,1	6,2
2011	520,78	82,73	6,4
2012	487,67	72,75	6,8
2013	486,78	71,17	7
2014	460,37	50,83	9.3
2015	483,07	46,26	10,4

Таблиця 3

Співвідношення кількості безробітних, зайнятих у промисловому та аграрному секторі в Україні у 2010–1015 рр.

Рік	Кількість зареєстрованих безробітних, тис. осіб	Кількість працюючих у промисловості, тис. осіб	Кількість працюючих в аграрному секторі, тис. осіб
2010	473,23	3461,5	3115,6
2011	520,78	3352,7	3410,3
2012	487,67	3236,7	3308,5
2013	486,78	3170,0	3389,0
2014	460,37	2898,2	3091,2
2015	483,07		

Проблема узгодження й ефективного використання факторів виробництва особливо актуальна в даний час. Її вирішення має сприяти забезпеченню зайнятості населення країни, яке характеризується *відповідністю між попитом* на робочу силу *та її пропозицією*, демографічним розвитком, ефективним використанням праці.

Постановка задачі. Для узгодження попиту галузей на робочу силу з її пропозицією і побудови моделі функціонування механізму попиту та пропозиції на ринку робочої сили України скористаємося математичним апаратом звичайних різницевих рівнянь з марковськими коефіцієнтами. Постановка задач із використанням саме такого апарату для побудови моделей, які описують різноманітні економічні процеси еволюції, є новою.

Основний математичний апарат.

Інструментарієм для опису запропонованої моделі оберемо різницеве рівняння першого порядку [11]:

$$x_{n+1} = a(\xi_n)x_n, \quad (1)$$

де $\xi_n (n = 0,1,2,...)$ – марковський ланцюг, який може набувати q різних значень $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ з відповідними ймовірностями $p_1(n), p_2(n), ..., p_q(n)$:

$$p_k(n) = P(\xi(n) = \theta_k), \ (k = 1,2,...,q; \ n = 0,1,2,...). \quad (2)$$

Якщо ймовірності $p_k(n+1)$ $(k = 1, 2, ..., q)$ виражаються через ймовірності $p_k(n)$ $(k = 1, 2, ..., q)$ лінійними рівняннями

$$\begin{aligned} p_1(n+1) &= \pi_{11}p_1(n) + \pi_{12}p_2(n) + ... + \pi_{1q}p_q(n), \\ p_2(n+1) &= \pi_{21}p_1(n) + \pi_{22}p_2(n) + ... + \pi_{2q}p_q(n), \\ &... \\ p_q(n+1) &= \pi_{q1}p_1(n) + \pi_q p_2(n) + ... + \pi_{qq}p_q(n), \end{aligned} \quad (3)$$

або у векторній формі $P(n+1) = \Pi P(n)$, то говорять що задано марковський ланцюг зі скінченою кількістю q станів і дискретним часом ($n = 0, 1, 2, ...$). Коефіцієнти π_{kj} лінійного перетворення (3) є умовними ймовірностями набуття випадковою величиною $\xi(n+1)$ значення θ_k за умови, що випадкова величина $\xi(n)$ набуде значень θ_j, тобто

$$\pi_{kj} = P(\xi(n+1) = \theta_k \mid \ \xi(n) = \theta_j), \quad (4)$$

при цьому

$$\pi_{1s} + \pi_{2s} + ... + \pi_{qs} = 1. \quad (5)$$

Якщо для елементів матриці Π виконуються рівності (5), тобто сума елементів у кожному стовпці дорівнює одиниці, і при цьому всі елементи матриці невід'ємні, то матриця Π називається стохастичною.

Виведемо функціональні рівняння для моментних рівнянь системи лінійних різницевих рівнянь (1), коефіцієнти якої залежать від марківського ланцюга.

Для двох станів система (3) набуває вигляд

$$\begin{aligned} p_1(n+1) &= (1-\lambda)p_1(n) + \nu p_2(n), \\ p_2(n+1) &= \lambda p_1(n) + (1-\nu)p_2(n), \ 0 \le \lambda \le 1, \ 0 \le \nu \le 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Узявши $a(\theta_1) = a_1, \ a(\theta_2) = a_2,$ припустимо для спрощення висновків, що $a_1 > 0, a_2 > 0$.

Позначимо через $f_k(n, x)$, $k = 1, 2$, частинні щільності розподілу випадкової величини X_n заданої різницевим рівнянням (1).

Розглянемо можливі гіпотези. Випадкова величина ξ_n може перебувати в першому стані $\xi = \theta_1$, і при цьому величина x_n може мати частинну щільність розподілу $f_1(n, x)$. З імовірністю $1 - \lambda$ величина ξ_{n+1} також перебуватиме в стані $\xi = \theta_1$, і при цьому випадкова величина x_{n+1} матиме щільність розподілу $f_1(n, \frac{x}{a_1})\frac{1}{a_1}$.

Якщо випадкова величина ξ_n перебувала в другому стані $\xi = \theta_2$, то величина X_n мала частинну щільність розподілу $f_2(n, x)$. З ймовірністю ν величина ξ_{n+1} перейде у стан $\xi = \theta_1$, і при цьому випадкова величина X_{n+1} матиме щільність розподілу $f_2(n, \frac{x}{a_2})\frac{1}{a_2}$. Аналогічно за формулою повної ймовірності отримаємо рівняння

$$f_1(n+1, x) = \frac{1-\lambda}{a_1} f_1\left(n, \frac{x}{a_1}\right) + \frac{\nu}{a_2} f_2\left(n, \frac{x}{a_2}\right). \quad (7)$$

Аналогічно знайдемо друге рівняння

$$f_2(n+1, x) = \frac{\lambda}{a_1} f_1\left(n, \frac{x}{a_1}\right) + \frac{1-\nu}{a_2} f_2\left(n, \frac{x}{a_2}\right). \quad (8)$$

Система функціональних рівнянь (7), (8) визначає зміну частинних щільностей розподілу. Введемо частинні моменти першого порядку:

$$m_k(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_k(n, x) dx.$$

Помножимо рівняння (7) на x і зінтегруємо по всій осі x. Використовуючи лінійні заміни змінної інтегрування, дістанемо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(n+1, x) dx = m_1(n+1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1\left(n, \frac{x}{a_1}\right) \frac{dx}{a_1} = a_1 m_1(n),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_2\left(n, \frac{x}{a_2}\right) \frac{dx}{a_2} = a_2 m_2(n).$$

Проекція рівняння (7) набирає вигляду

$$m_1(n+1) = (1-\lambda)a_1 m_1(n) + \nu a_2 m_2(n). \quad (9)$$

Пояснимо ймовірнісний зміст рівняння (9). Нехай $\xi_n = \theta_1$. Тоді з ймовірністю $1 - \lambda$ випадкова величина $\xi_{n+1} = \theta_1$. При лінійному перетворенні $x_{n+1} = a_1 x_n$ перший частинний момент $m_1(n + 1)$ випадкової величини x_{n+1} утворюється з першого частинного моменту $m_1(n)$ випадкової величини x_n множенням на a_1. Якщо $\xi_n = \theta_2$, $\xi_{n+1} = \theta_1$, то при лінійному перетворенні $x_{n+1} = a_2 x_n$ перший частинний момент $m_1(n + 1)$ випадкової величини x_{n+1} утворюється з першого частинного моменту $m_2(n)$ випадкової величини X_n множенням на a_2. За формулою математичного сподівання отримаємо рівняння (9).

Аналогічно знаходимо друге рівняння

$$m_2(n+1) = \lambda a_1 m_1(n) + (1-\nu)a_2 m_2(n). \quad (10)$$

Система лінійних різницевих рівнянь (9), (10) описує поведінку перших частинних моментів випадкових величин x_n, x_{n+1}.

Стійкість у середньому розв'язків різницевого рівняння (1) рівносильна стійкості розв'язків системи лінійних різницевих рівнянь (9), (10).

Складемо характеристичне рівняння для мультиплікаторів при λ = ν:

$$\begin{vmatrix} z-(1-\lambda)a_1 & -\lambda a_2 \\ -\lambda a_2 & z-(1-\lambda)a_2 \end{vmatrix} = z^2 - z(1-\lambda)(a_1+a_2) + \quad \textbf{(11)}$$
$$+(1-2\lambda)a_1a_2 = 0.$$

Рівняння (11) має дійсні корені, причому найбільший за модулем корінь при λ = ν

$$z_{\max} = \frac{(1-\lambda)(a_1+a_2)}{2} + \sqrt{(1-\lambda)^2\frac{(a_1-a_2)^2}{4} + \lambda^2 a_1a_2} < 1,$$

якщо виконується нерівність

$$(a_1+a_2)(1-\lambda) < 1 + a_1a_2(1-2\lambda). \quad \textbf{(12)}$$

Умова (12) визначає область стійкості у середньому розв'язків різницевого рівняння (1). Аналогічна умова

$$(a_1^2+a_2^2)(1-\lambda) < 1 + a_1^2a_2^2(1-2\lambda)$$

визначатиме область стійкості у середньому квадратичному розв'язків рівняння (1).

Припустивши, що $0 < a_1 < a_2$, легко довести нерівність

$$a_1 \le z_{\max} \le a_2.$$

Отже, якщо $0 < a_k < 1$, $k = 1, 2$, то нульовий розв'язок системи моментних рівнянь асимптотично стійкий, оскільки $z_{\max} < 1$. При виконанні умов $a_k > 1$, $k = 1, 2$ нульовий розв'язок моментних рівнянь нестійкий. Найбільш цікавий випадок, коли $0 < a_k < 1 < a_2$. На *рис. 1* однократно заштриховано найбільш широку область стійкості при λ = 1, коли рівняння (1) стає детермінованим і приводить до рівняння $x_{n+2} = a_1a_2x_n$.

Дворазово заштрихована область стійкості в середньому розв'язків рівняння (1), задана нерівністю (12) при λ ≠ 1.

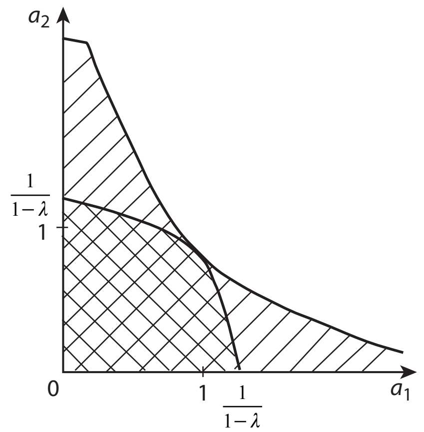


Рис. 1.

Модельна задача.

Припустимо, що будь яка особа працездатного віку може знаходитися у двох станах: у стані безробітного та в стані працюючого. При цьому ймовірності переходу із одного стану в інший за *n* інтервалів описуються такими різницевими рівняннями:

$$p_1(n+1) = (1-\lambda)p_1(n) + \nu p_2(n),$$
$$p_2(n+1) = \lambda p_1(n) + (1-\nu)p_2(n),$$

де $p_s(n) = P(\xi_n = \theta_s)$, $(s = 1,2;\ n = 0,1,2)$, ν – ймовірність знайти роботу (тобто ймовірність переходу зі стану безробіття в стан зайнятості); λ – ймовірність бути звільненим у момент часу *t*, тобто ймовірність переходу зі стану зайнятості у стан безробіття). Нехай X_n – випадковий процес, що описує кількість осіб, що працюють через *n* інтервалів часу, і задовольняє різницеве рівняння (1).

Поведінку першого моменту випадкового розв'язку

$$\langle X_n \rangle = m(n) = m_1(n) + m_2(n)$$

визначає система різницевих рівнянь

$$m_1(n+1) = (1-\lambda)a_1m_1(n) + \nu a_2m_2(n),$$
$$m_2(n+1) = \lambda a_1m_1(n) + (1-\nu)a_2m_2(n), \quad \textbf{(13)}$$

де λ – ймовірність працюючого бути звільненим в момент часу *t*, ν – імовірність безробітного знайти роботу, m_1 – середня кількість осіб, які мають роботу в даний час, m_2 – середня кількість потенційних робітників, які на даний час є безробітними, a_1, a_2 – випадкові величини, що пов'язані з імовірнісними характеристиками системи в станах θ_1 і θ_2, *m* – середнеочікувана ємність ринку праці.

Складемо характеристичне рівняння системи (14):

$$\begin{vmatrix} z-(1-\lambda)a_1 & -\nu a_2 \\ -\lambda a_2 & z-(1-\nu)a_2 \end{vmatrix} = z^2 - z((1-\lambda)a_1 + \quad \textbf{(14)}$$
$$+(1-\nu)a_2) + (1-\lambda-\nu)a_1a_2 = 0.$$

Рівняння (14) має дійсні корені:

$$z_{\max} = \frac{(1-\lambda)a_1 + (1-\nu)a_2}{4} +$$
$$+\sqrt{\left(\frac{(1-\lambda)a_1 - (1-\nu)a_2}{2}\right)^2 + \lambda\nu a_1a_2} < 1,$$

причому найбільший за модулем корінь буде при умові виконання нерівності, яка є умовою стійкості в середньому:

$$(1-\lambda)a_1 + (1-\nu)a_2 < 1 + (1-\lambda-\nu)a_1a_2. \quad \textbf{(15)}$$

Ця умова виконується для

$$a_1 < \frac{1}{1-\lambda} \ \text{ і } \ a_2 < \frac{1-\lambda-\nu}{(1-\nu)(1-\lambda)}.$$

Тобто зі збільшенням імовірностей λ та ν вплив параметрів a_1 і a_2 зменшується. Крім того, при λ + ν = 1 стійкість системи спостерігається при наявності одного стану.

На *рис. 2* представлені області, що відповідають умові стійкості в середньому (15) для різних значень ймовірностей.

З рівняння (14) можна отримати, що у випадку, коли $a_1 = a_2$, то $z_{\max} = a_1$.

У *табл. 4* представлено значення $z_{\max}$ залежно від імовірностей ν та λ при різних значення параметрів a_1 і a_2.

Із табл. 4 випливає, що при λ = ν значення $z_{\max}$ набуває найбільше значення. Аналізуючи дані табл. 4, можна зробити висновок, що при збільшенні факторів, що негативно впливають на ринок праці (підвищення ймовірності бути звільненим, що пов'язане з кризовим станом економіки – зменшення робочих місць, зниження інвестицій, незважена державна політика зайнятості) значення $z_{\max}$ збільшується, що говорить про нестійкий

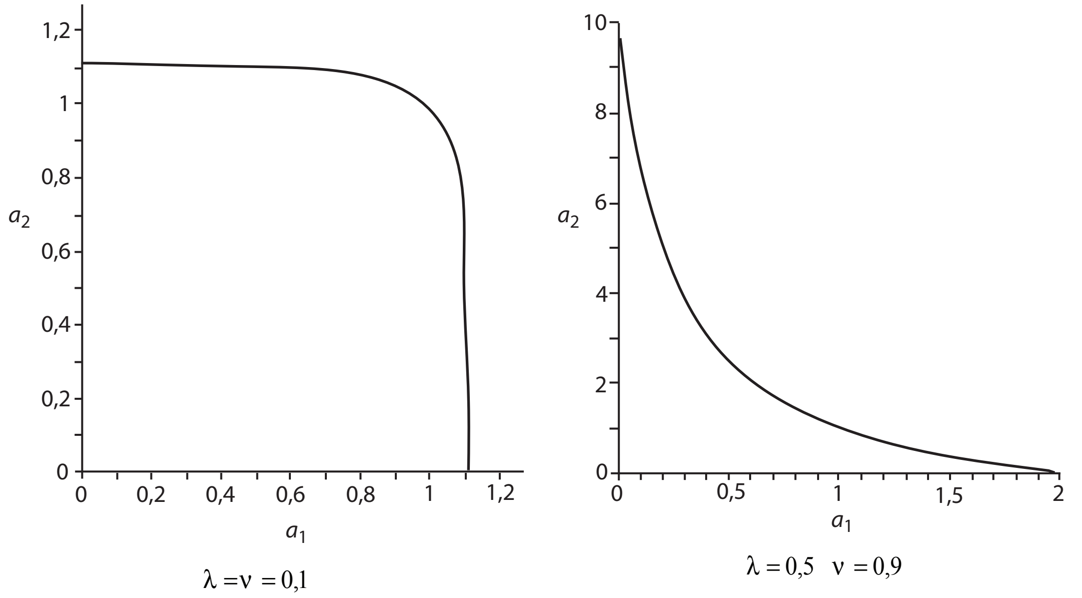


Рис. 2. Області, що відповідають умові стійкості в середньому

Таблиця 4

ν	λ	a_1	a_2	z_{max}	ν	λ	a_1	a_2	z_{max}
0,1	0,1	1 0,7 0,5 0,8	0,98 0,9 0,9 0,6	0,99 0,84 0,83 0,74	0,4	0,4	1,5 1 0,2	0,2 0,2 0,4	0,95 0,66 0,34
0,1	0,5	1,5 1,2 0,7 0,5	0,8 0,8 0,8 0,7	0,98 0,88 0,78 0,67	0,6	0,3	1,3 1 0,1 0,1	0,3 0,3 0,3 2	0,99 0,78 0,17 0,84
0,1	0,8	4 1,8 1,4 0,3 0,8	0,1 0,5 0,5 0,5 0,2	0,8 0,98 0,8 0,47 0,43	0,8	0,1	1 0,8 0,3 0,5 0,1	0,5 0,5 0,5 0,2 4	0,94 0,77 0,32 0,46 0,84

стан системи. Стійкість ринку праці спостерігається у випадках, коли ймовірності знайти роботу і бути звільненим відрізняються несуттєво.

Графік залежності $z_{\max}$ від λ для різних значень ν представлений на *рис. 3*.

Як видно із графіків, стійкість системи залежить від випадкових величин, що характеризують стан системи.

Вплив імовірностей λ та ν на значення $z_{\max}$ графічно представлений на *рис. 4*.

Узагальнимо отриманий результат:

Розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь

$$X_{n+1} = A(\xi_n)X_n + B(\xi_n),\ \det A(\xi_n) \neq 0, \tag{16}$$

де ξ_n – марківський ланцюг, який набуває q різних значень $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_q$ з імовірностями вигляду (3):

$$p_k(n) = P\{\xi_n = \theta_k\}.$$

Уведемо позначення

$$A(\theta_k) = A_k,\ B(\theta_k) = B_k,\ \det A_k \neq 0.$$

Імовірності $p_1(n), p_2(n), \ldots, p_q(n)$ задовольняють систему різницевих рівнянь

$$p_k(n+1) = \sum_{k=1}^{q} f_k(n,x)\delta(\xi - \theta_k).$$

Частинні щільності розподілу $f_k(n,x)$, $k = 1, 2, \ldots, q$ задовольняють систему лінійних функціональних рівнянь

$$f_k(n+1, X) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} f_s(n, A_s^{-2}(x - B_s)) \det A_s^{-1}, \tag{17}$$

$$k = 1, 2, \ldots, q,\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Уведемо вектори частинних моментів 1-го порядку

$$m_k(n) = \int_{E_m} x f_k(n,x) dx.$$

Помножимо рівняння (17) на x і зінтегруємо по m-вимірному фазовому простору. Дістанемо систему лінійних різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами:

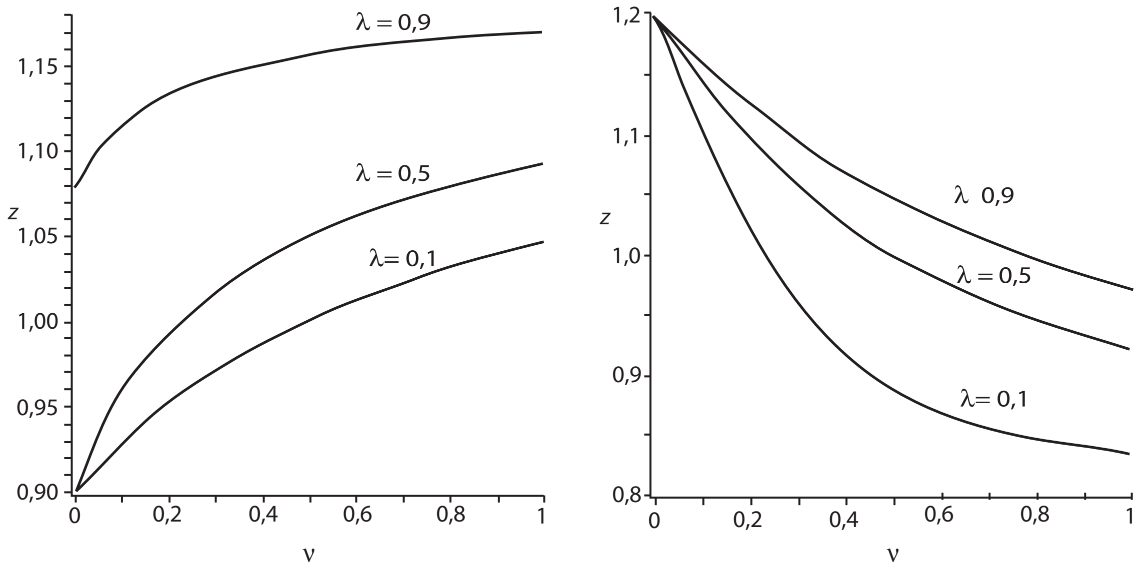
$$M_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{kr}(A_s M_s(n) + B_s p_s(n)). \tag{18}$$

У частинному випадку для однорідної системи різницевих рівнянь із випадковими марківськими коефіцієнтами

$$X_{n+1} = A(\xi_n)X_n,\ \det A(\xi_n) \neq 0 \tag{19}$$

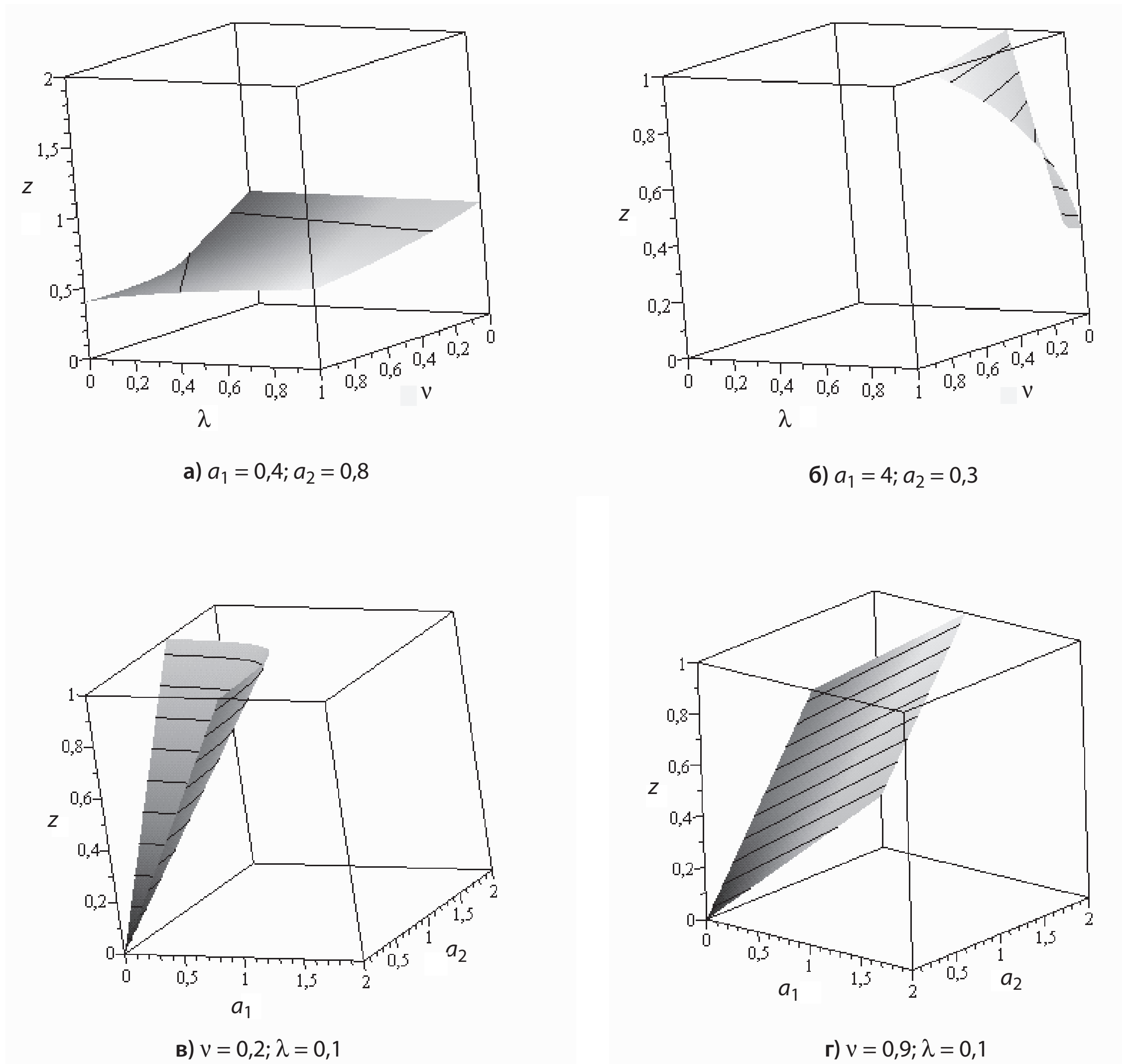
дістанемо систему лінійних різницевих рівнянь:

$$M_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{kr} A_s M_s(n). \tag{20}$$



а) б)

Рис. 3. Графік залежності z_{max} від v для різних значень λ при а) $a_1 = 1,2$, $a_2 = 0,9$; б) $a_2 = 0,8$, $a_2 = 1,2$



а) $a_1 = 0,4$; $a_2 = 0,8$ б) $a_1 = 4$; $a_2 = 0,3$

в) $\nu = 0,2$; $\lambda = 0,1$ г) $\nu = 0,9$; $\lambda = 0,1$

Рис. 4. Графік залежності z_{max} від v та λ при різних значеннях a_1, a_2 та від a_1, a_2 при різних значеннях v та λ

Метод загальної ентропії.

Для аналізу стійкості ринку праці застосуємо поняття ентропії системи (аналітичні результати було отримано в [7]). Згідно з теоріями інформації у випадку дискретної випадкової величини ентропія визначається за формулою Больцмана [8]:

$$E_{\xi_n} = -\sum_{\xi_n} P(\xi_n) \ln P(\xi_n), \qquad (21)$$

де ξ_n – випадкова величина, що описує стан ринку праці, $P(\xi_n)$ – її розподіл ймовірностей для відповідного стану.

Для середніх ентропій маємо

$$E_{\xi_{1+n=1}|\xi_1 \ldots \xi_{1+n}} = E_{\xi_{1+n=1}|\xi_{1+n}}.$$

Дискретний марковський процес називається стаціонарним, якщо ймовірності переходу $\pi_k(\xi_k, \xi_{k+1})$ не залежать від параметра k і якщо всі однократні розподіли $P(\xi_k)$ однакові і дорівнюють $P_{cm}(\xi)$.

Стаціонарність однократного розподілу $P_{cm}(\xi_k)$ означає, що виконується умова

$$\sum_{\xi_k} P_{cm}(\xi_k)\pi_k(\xi_k, \xi_{k+1}) = P_{cm}(\xi_{k+1}). \qquad (22)$$

Введемо поняття питомої ентропії, що розрахована на один елемент послідовності $\{\xi_k\}$ та граничної ентропії, що визначає ентропію кожного кінця відрізку стаціонарного процесу в границі [9]:

$$E = \lim_{l \to \infty} E_{\xi_k|\xi_{k-1} \ldots \xi_{k-l}}.$$

Для стаціонарного марківського процесу питома ентропія співпадає з ентропією, що відповідає ймовірностям переходу $\pi_k(\xi_k, \xi_{k+1})$ при стаціонарному розподілі ймовірностей

$$E = -\sum_{\xi_k} P_{\text{ст}}(\xi_k) \sum_{\xi_{k+1}} \pi_k(\xi_k, \xi_{k+1}) \ln \pi_k(\xi_k, \xi_{k+1}). \qquad (23)$$

У [9] отримано рівняння граничної ентропії:

$$E_\Gamma = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} (E_{\xi_1,\ldots,\xi_n} + E_{\xi_1,\ldots,\xi_m} - E_{\xi_1,\ldots,\xi_{n+m}}),$$

і при $E_\Gamma = \lim_{n \to \infty}(E_{\xi_1,\ldots,\xi_n} - nE)$ загальна ентропія визначається рівнянням:

$$E_{\xi_1,\ldots,\xi_n} = nE + E_\Gamma + o_n(1), \qquad (24)$$

де $o_n(1)$ – нескінченно мала величина вищого порядку.

Усереднюючи формулу (16) зі стаціонарними ймовірностями, отримаємо:

$$E_{\xi_1,\ldots,\xi_n} = E_{\xi_1} + (n-1)E. \qquad (25)$$

Порівнюючи (24) і (25), видно, що в стаціонарному режимі

$$E_\Gamma = E_{\xi_1} - E = \sum_{\xi_k, \xi_{k+1}} P_{cm}(\xi_k)\pi_k(\xi_k, \xi_{k+1}) \ln \pi_k(\xi_k, \xi_{k+1}), \qquad (26)$$

і $o_n(1) = 0$, тобто для загальної ентропії точно виконується співвідношення $E_{\xi_1,\ldots,\xi_n} = nE + E_\Gamma$.

Отже, якщо задана матриця ймовірностей переходу

$$\Pi = \|\pi_k(\xi_k, \xi_{k+1})\|, \qquad (27)$$

потрібно знайти стаціонарний розподіл і скористатися формулами (23) і (25). Рівняння (22) однозначно визначає стаціонарний розподіл $P_{cm}(\xi_k)$, якщо марківський процес є ергодичним, тобто якщо власне число, що дорівнює 1, є невиродженим власним значенням матриці (24). Згідно з теоремою про розкладання визначників з рівняння $\det(\Pi - 1) = 0$ випливає (22), якщо вважати, що

$$P_{cm}(\xi_k) = \frac{A_{\xi_k \xi_{k+1}}}{\sum_{\xi_{k+2}} A_{\xi_{k+2}\xi_{k+1}}},$$

де $A_{\xi_k \xi_{k+1}}$ – алгебраїчне доповнення елементу $a_{\xi_k \xi_{k+1}}$ матриці $\|a_{\xi_k \xi_{k+1}}\| = \|\pi_k(\xi_k, \xi_{k+1}) - \delta_{\xi_k \xi_{k+1}}\| \equiv \Pi - 1.$

Для найпростішого марківського процесу із двома станами отримано такі співвідношення. Якщо матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \nu & 1-\nu \end{pmatrix},$$

тоді $\|a_{\xi_k \xi_{k+1}}\| = \Pi - 1 = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \nu & -\nu \end{pmatrix}$ і $A_{11} = -\nu$, $A_{22} = -\lambda$.

Тоді $P_{cm}(1) = \dfrac{\nu}{\nu + \lambda}$ і $P_{cm}(2) = \dfrac{\lambda}{\nu + \lambda}$.

Крім того,

$$\|P_{cm}(\xi_k, \xi_{k+1})\| = \frac{1}{\nu + \lambda}\begin{pmatrix} \nu - \lambda\nu & \lambda\nu \\ \lambda\nu & \lambda - \lambda\nu \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (23) питома ентропія обчислюється за формулою:

$$E_1 = \left(\frac{\nu}{\nu + \lambda}\right)e(\lambda) + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \nu}\right)e(\nu),$$

де $e(\chi) = -\chi \ln \chi - (1-\chi)\ln(1-\chi)$, χ – ймовірність стану системи, $e(\chi)$ – ентропія відповідного стану системи.

Гранична ентропія згідно з формулою (26):

$$E_\Gamma = e\left(\frac{\lambda}{\lambda + \nu}\right) - \frac{\nu e(\lambda) + \nu e(\lambda)}{\lambda + \nu}.$$

Загальна ентропія, що визначає ентропію проміжку часу T, обчислюється за наближеною формулою

$$E = TE_1 + E_\Gamma.$$

Стан ринку праці в одногалузевій економічній моделі можна описати дискретним випадковим процесом ξ_n, який набуває два значення: θ_1 – стан зайнятості, θ_2 – стан безробіття з імовірностями ν (імовірність знайти роботу, тобто ймовірність переходу зі стану безробіття в стан зайнятості) та λ (імовірність бути звільненим у момент часу t, тобто ймовірність переходу зі стану зайнятості у стан безробіття).

Нехай в кожний момент часу імовірність бути звільненим дорівнює 0,15, а ймовірність знайти роботу для безробітного дорівнює 0,1. Матриця перехідних імовірностей має вигляд:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку питома ентропія набуває значень 0,3642, а гранична ентропія – 0,3088. Загальна ентропія обчислюється за формулою $E = TE_1 + E_Г$ і дорівнює 0,673. У *табл. 5* представлені дані щодо величини загальної ентропії для різних значень параметрів λ, *ν* і *T*.

Таблиця 5

T	λ	*ν*	E_1	$E_Г$	*E*
1	0,15	0,1	0,3642	0,3088	0,673
	0,15	0,2	0,4559	0,2269	0,6828
	0,15	0,15	0,4226	0,2705	0,6931
2	0,15	0,1	0,3642	0,3088	1,037
	0,15	0,2	0,4559	0,2269	1,139
	0,15	0,15	0,4226	0,2705	1,116

Як видно з табл. 5, при збільшенні ймовірності знайти роботу в два рази загальна невизначеність зростає на 1 % через 1 період і на 8 % через два періоди.

У *табл. 6* представлені дані щодо величини загальної ентропії для різних значень параметрів λ, *ν* для першого періоду *T* = 1.

Таблиця 6

λ	*ν*	E_1	$E_Г$	*E*
0,1	0,1	0,3252	0,3680	**0,6932**
	0,5	0,3866	0,0642	0,4508
	0,9	0,2352	0	0,3252
0,5	0,1	0,3866	0,0642	0,4508
	0,5	0,6932	0	**0,6932**
	0,9	0,5618	0,0900	0,6518
0,9	0,1	0,3252	0	0,3252
	0,5	0,5618	0,0900	0,6518
	0,9	0,3252	0,3680	**0,6932**

Як видно з табл. 6, сумарна ентропія практично не змінюється, тоді як питома та гранична ентропії змінюються суттєво. Для того, щоб проаналізувати зміну ентропії при більших значеннях періоду, побудуємо графічну залежність загальної ентропії від кількості періодів для різних значень параметра (*рис. 5*).

З графіка видно, що при невеликих значеннях імовірності знайти роботу зі збільшенням імовірності загальна ентропія з кожним новим періодом збільшується, тоді як при значеннях імовірності більших за 0,5, починаючи з другого періоду, значення загальної ентропії для більшого значення ймовірності – менше.

Для визначення максимального значення ентропії залежно від ймовірності знайти роботу побудуємо графік залежності загальної ентропії від параметра *ν* (*рис. 6*).

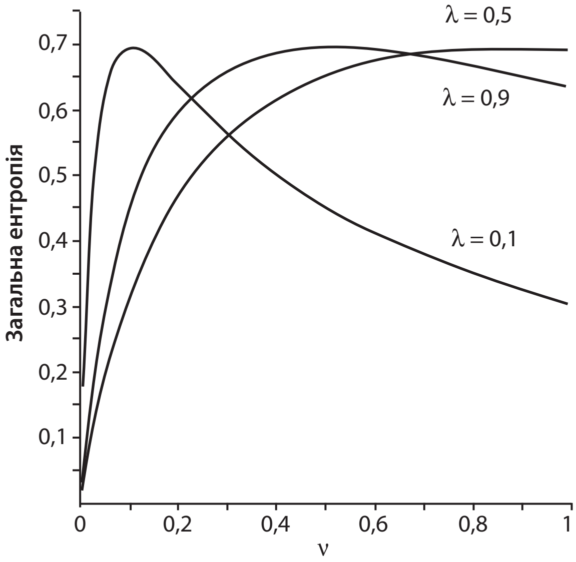


Рис. 6. Графік залежності загальної ентропії від параметра ν для різних значень λ

Як видно з рис. 6, найбільша невизначеність виникає у випадку, коли ймовірність безробітного знайти роботу дорівнює ймовірності працюючого бути звільненим.

На наступних двох графіках подано залежності питомої та граничної ентропій залежно від ймовірності

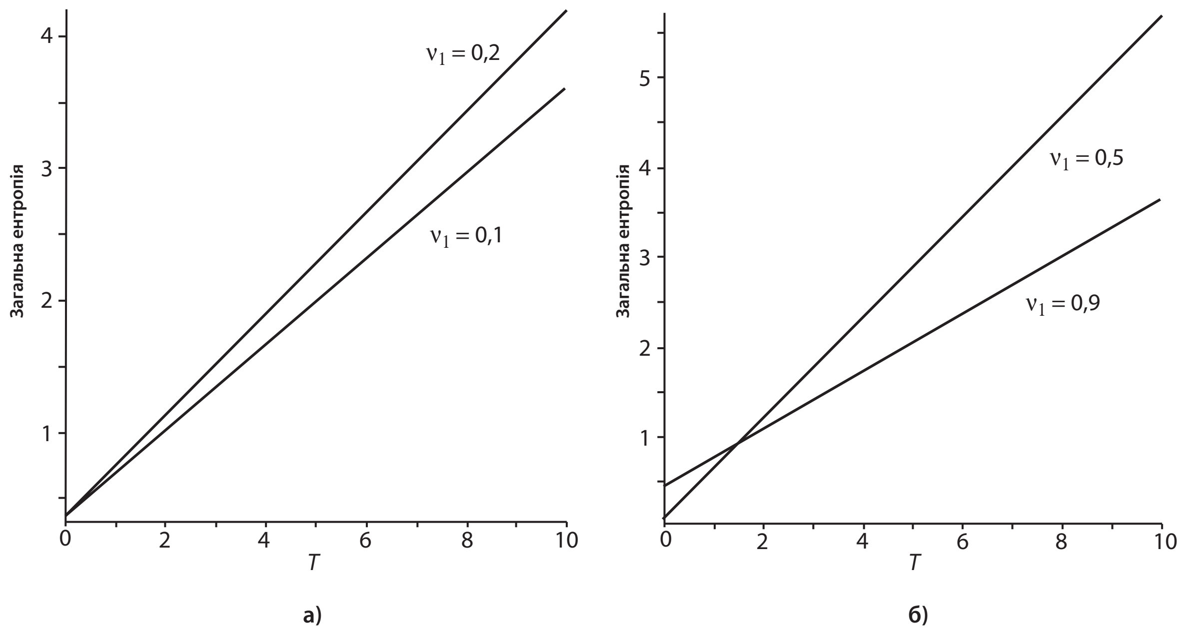


Рис. 5. Графік залежності загальної ентропії від кількості періодів для різних значень параметра *ν* при а) λ = 0,1; б) λ = 0,9

знайти роботу для різних значень ймовірностей бути звільненим (*рис. 7*).

Графічна залежність загальної ентропії від ймовірності знайти роботу та ймовірності бути звільненим представлена на *рис. 8*.

З графіку видно, що максимальне значення загальна ентропія набуває при умові рівності вищезгаданих ймовірностей $\lambda = \nu$, як і в запропонованій нами моделі.

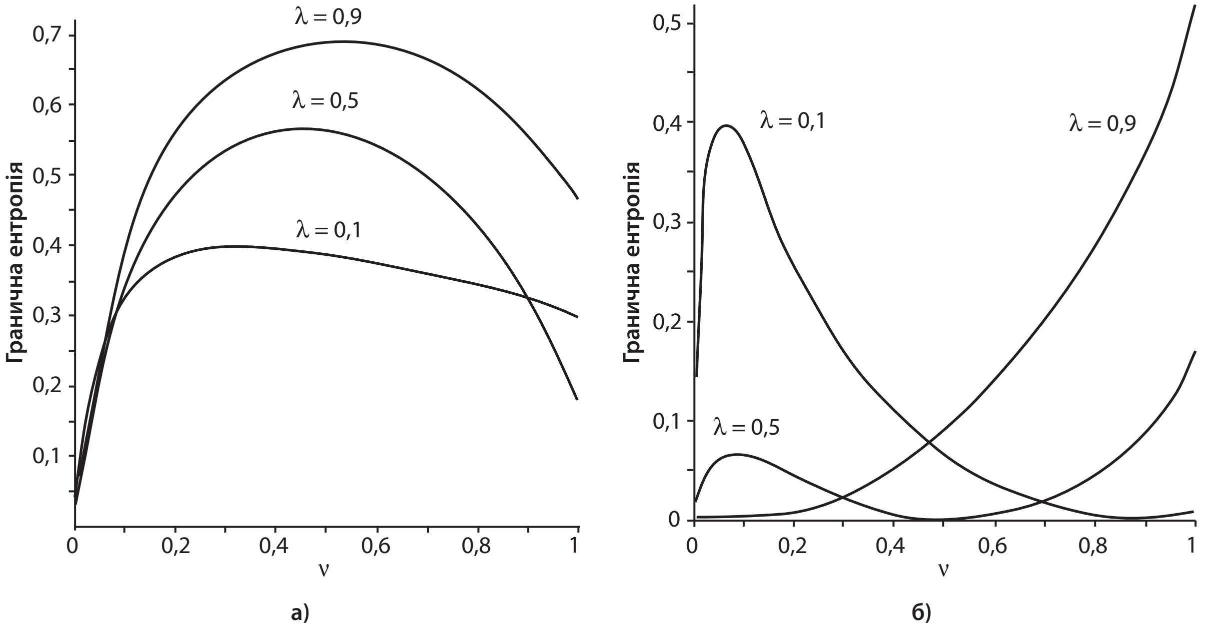


Рис. 7. Графік залежності питомої (а) та граничної (б) ентропії від параметра *ν* для різних значень λ (λ = 0,1, λ = 0,5, λ = 0,9)

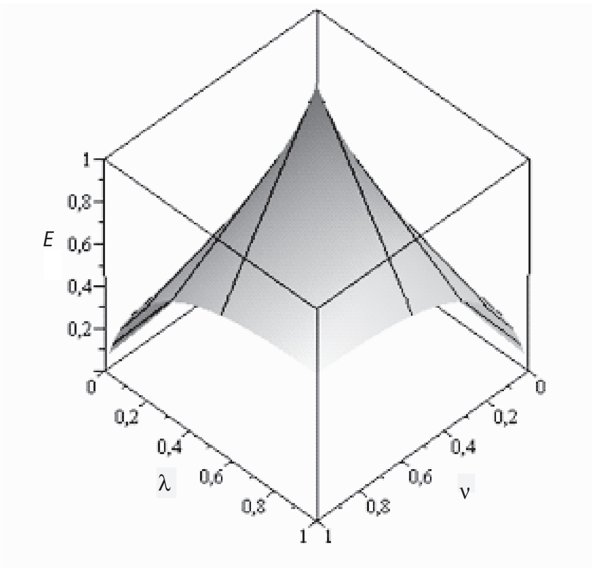


Рис. 8. Графік залежності загальної ентропії від параметрів *ν* та λ

Модель структурних особливостей на ринку праці.

Розглянемо задачу, коли випадковий процес ξ_n може набувати три стани: θ_1 – стан безробіття, θ_2 – стан зайнятості у промисловості, θ_3 – стан зайнятості у сільському господарстві. Тоді: π_{11} – імовірність того, що безробітний залишиться безробітним, π_{12} – безробітний отримає роботу в промисловості, π_{13}– безробітний отримає роботу в сільському господарстві і т. д. Тоді матриця перехідних імовірностей має вигляд:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,04 & 0,06 \\ 0,04 & 0,9 & 0,06 \\ 0,06 & 0,04 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Матриця має симетричний вигляд, і діагональні елементи набагато більші за недіагональні. Це означає, що імовірності переходу з одного стану в інший і навпаки рівні, а імовірність залишитися в тому ж самому стані набагато більші, ніж імовірності переходу в інший стан. Питома ентропія для такого стану системи дорівнює 0,39.

Проаналізуємо, як зміниться стан системи в залежності від зміни імовірності переходу із стану безробіття в стан зайнятості у промисловості (*рис. 9*).

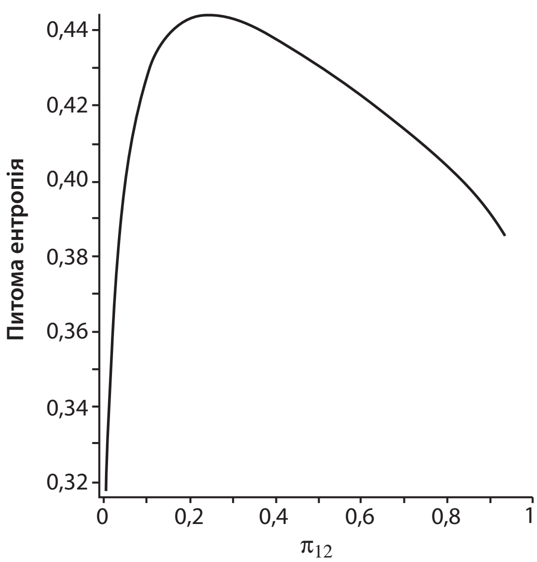


Рис. 9. Графік залежності питомої ентропії від ймовірності переходу зы стану безробіття в стан зайнятості у промисловості

З рис. 9 видно, що найбільше значення питомої ентропії відповідає ймовірності переходу зы стану безробіття в стан роботи в промисловості при значенні приблизно 0,05.

Знайдемо оптимальні значення ймовірностей переходу зы стану безробіття. Побудуємо графік залежності питомої ентропії від імовірностей π_{12} і π_{13} (*рис. 10*).

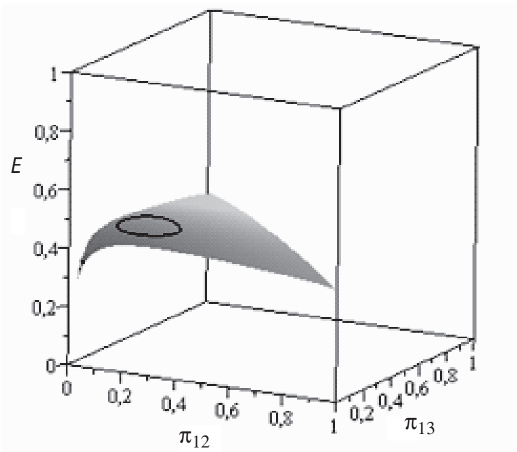


Рис. 10. Залежності питомої ентропії від імовірностей π_{12} і π_{13}

Як видно з рис. 10, максимальна питома ентропія в цьому випадку практично не змінюється і залишається на рівні 0,39. Тобто одночасна зміна ймовірності переходу зі стану безробіття в стан зайнятості у промисловості та зі стану безробіття в стан зайнятості в сільському господарстві не призводить до більш стійких станів.

Порівняння результатів.

Порівняємо результати, отримані методом загальної ентропії та методом моментних рівнянь. На *рис. 11* наведено графіки залежності загальної ентропії та z_{max} від ймовірності знайти роботу при різних значення ймовірності бути звільненим. Як у методі загальної ентропії, так і в методі моментних рівнянь найстійкіший стан системи спостерігається при умові рівності ймовірностей $\lambda = \nu$, що означає доцільність використання запропонованих методів для оцінювання ступеня узгодженості попиту і пропозиції на ринку праці. Перевага метода, запропонованого в статті, полягає в тому, що стан економіки нашої країни на сучасному етапі розвитку характеризується ефектом невизначеності, що дуже добре описується за допомогою марківських коефіцієнтів різницевих рівнянь.

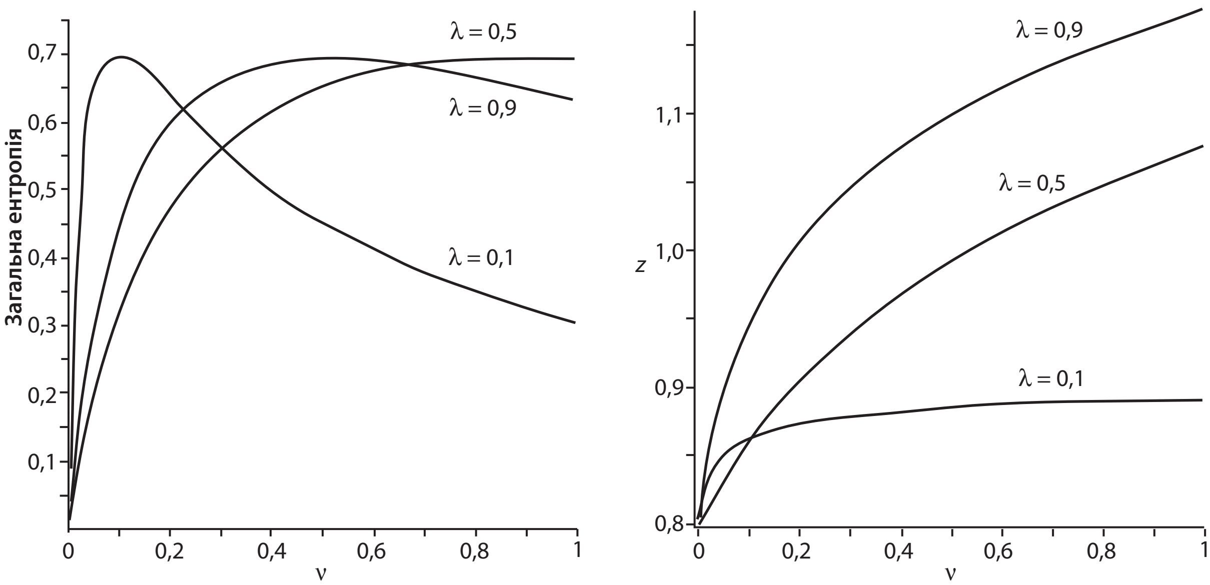
ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження було отримано умови стійкості в середньому для моделі функціонування механізму попиту і пропозиції на ринку праці. Наведені розрахунки показують, що рівноважний стан не буде спостерігатися при умові врівноваження попиту та пропозиції робочої сили, тобто коли ймовірність бути звільненим дорівнює ймовірності знайти роботу. На стійкість розв'язків різницевого рівняння (1), що описує запропоновану модель, суттєвий вплив виявляють випадкові величини, що пов'язані з імовірнісними характеристиками системи, яка може знаходитися в різних станах. Отже, при дослідженні ринку праці в умовах нестабільної економіки метод моментних рівнянь із випадковими марківськими коефіцієнтами дозволяє враховувати вплив факторів, які характеризують стан невизначеності досліджуваної системи. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. Яковенко О. Г. Моделювання самоорганізації ринку праці в Україні / О. Г. Яковенко, О. О. Бажан // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Економіка». – 2011. – Т. 19. – № 10/1. – С. 135–142.

2. Васильев А. Н. Модель самоорганизации рынка труда / А. Н. Васильев // Экономика и математические методы. – 2001. – Том 37, № 2. – С. 123–127.



а) б)

Рис. 11. Графіки залежності загальної ентропії (а) та z_{max} (б) від ймовірності *ν* при $\lambda = 0,1$, $\lambda = 0,5$, $\lambda = 0,9$

3. Семенчин Е. А. Математическая модель самоорганизации рынка труда для двух отраслей экономики / Е. А. Семенчин, И. В. Зайцева // Экономика и математические методы. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 137–139.

4. Хлівна І. В. Моделі аналізу та прогнозування зайнятості населення / І. В. Хлівна // Агросвіт. – 2013. – № 11. – С. 28–33.

5. Помазкин Д. В. Влияние на рынок труда изменений половозрастной структуры / Д. В. Помазкин // Научный интернет-журнал «Семья и демография». – 2014 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://riss.ru/demography/demography-science-journal/5283/

6. Васильєв О. Прогнозування рівня безробіття в Україні / О. Васильєв // Економіка України. – 2012. – № 4. – С. 41–46.

7. Саргсян Г. Аналитическая модель структурных преобразований на рынке труда / Г. Саргсян, Р. Геворгян, Н. Саргсян // ЕГУ. – 2011. – С. 26 –35 [Элек-тронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.ysu.am/files/03H_Sargsyan_R_Gevorgyan_N_Sargsyan.pdf

8. Стратанович Р. Л. Теория информации / Р. Л. Стратанович. – М. : Сов. радио, 1975. – 424 с.

9. Джалладова І. А. Дослідження стійкості моделі відтворення робочої сили в умовах невизначеності / І. А. Джалладова, О. І. Бабинюк // XVII Міжнародна конференція PDMU – 2011 (23–27 травня, м. Київ). – 2011. – С. 65–66.

10. Джалладова І. А. Критерій стійкості розв'язків системи лінійних різницевих рівнянь з випадковими кусково-сталими коефіцієнтами / І. А. Джалладова, О. І. Бабинюк // Міжнародна конференція PDMU (4–6 жовтня, м. Ялта). – 2010. – С. 22–26.

11. Валєєв К. Г. Теорія ймовірностей та теорія випадкових процесів / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2009. – 378 с.

Науковий керівник – Джалладова І. А., доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувачка кафедри комп'ютерної математики та інформаційної безпеки факультету інформаційних систем і технологій ДВНЗ «Київський національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана»

REFERENCES

Dzhalladova, I. A., and Babyniuk, O. I. "Doslidzhennia stiikosti modeli vidtvorennia robochoi syly v umovakh nevyznachenosti" [Research resistance model reproduction of labor under uncertainty]. *XVII Mizhnarodna konferentsiia PDMU*. Kyiv, 2011. 65-66.

Dzhalladova, I. A., and Babyniuk, O. I. "Kryterii stiikosti rozviazkiv systemy liniinykh riznytsevykh rivnian z vypadkovymy kuskovo-stalymy koefitsiientamy" [The criterion of sustainability solutions of linear difference equations with random piecewise constant coefficients]. *Mizhnarodna konferentsiia PDMU*. Yalta, 2010. 22-26.

Khlivna, I. V. "Modeli analizu ta prohnozuvannia zainiatosti naselennia" [Models of analysis and forecasting employment]. *Ahrosvit*, no. 11 (2013): 28-33.

Pomazkin, D. V. "Vliyanie na rynok truda izmeneniy polovozrastnoy struktury" [Impact on the labor market changes in the age and sex structure]. http://riss.ru/demography/demography-science-journal/5283/

Semenchin, E. A., and Zaytseva, I. V. "Matematicheskaya model samoorganizatsii rynka truda dlya dvukh otrasley ekonomiki" [Mathematical model of self-organization of the labor market for the two sectors of the economy]. *Ekonomika i matematicheskie metody,* vol. 40, no. 4 (2004): 137-139.

Sargsian, G., Gevorgian, R., and Sargsian, N. "Analiticheskaya model strukturnykh preobrazovaniy na rynke truda" [Analytical model of structural reforms in the labor market]. http://www.ysu.am/files/03H_Sargsyan_R_Gevorgyan_N_Sargsyan.pdf

Stratanovich, R. L. *Teoriya informatsii* [Information theory]. Moscow: Sovetskoe radio, 1975.

Vasyliev, O. "Prohnozuvannia rivnia bezrobittia v Ukraini" [Predicting the level of unemployment in Ukraine]. *Ekonomika Ukrainy*, no. 4 (2012): 41-46.

Vasilyev, A. N. "Model samoorganizatsii rynka truda" [The model of self-organization of the labor market]. *Ekonomika i matematicheskie metody,* vol. 37, no. 2 (2001): 123-127.

Valieiev, K. H., and Dzhalladova, I. A. *Teoriia imovirnostei ta teoriia vypadkovykh protsesiv* [Probability theory and the theory of random processes]. Kyiv: KNEU, 2009.

Yakovenko, O. H., and Bazhan, O. O. "Modeliuvannia samoorhanizatsii rynku pratsi v Ukraini" [Modeling self labor market in Ukraine]. *Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu. Seriia «Ekonomika»,* vol. 19, no. 10/1 (2011): 135-142.