УДК 313.42

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕЖДУНАРОДНОГО ТОРГОВОГО ОБМЕНА

©2018 **ВОРОНИН А. В., ГУНЬКО О. В.**

УДК 313.42

Воронин А. В., Гунько О. В. Динамические модели международного торгового обмена

В настоящей работе представлены способы формализации различных организационных структур внешнеторговой экономической деятельности. В основе построения соответствующих математических моделей находится методология матричного анализа международных экономических связей, что позволяет рассматривать соответствующие комплексные экономические объекты как единую систему на феноменологическом уровне. Целью статьи является построение линейной динамической модели международной торговли в дискретном времени для анализа соответствующих переходных процессов из начального состояния в установившийся равновесный режим. Также исследована трехмерная модель торговли с иной спецификой матричной структуры с различным долевым участием в товарообмене. Выполнена необходимая компьютерная симуляция эволюционных процессов и представлены соответствующие графические зависимости. Представленные в настоящем исследовании математические модели динамики международного торгового обмена могут иметь широкий спектр применения и использоваться в соответствующих эконометрических расчетах.

Ключевые слова: *международная торговля, матричный анализ, баланс, ресурс, динамика, устойчивость, равновесие.*
Рис.: *4.* ***Формул:*** *29.* ***Библ.:*** *8.*

Воронин Анатолий Витальевич *– кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*
E-mail: *voronin61@ ukr.net*
Гунько Ольга Владимировна *– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*

УДК 313.42

Воронін А. В., Гунько О. В. Динамічні моделі міжнародного торгового обміну

У даній роботі представлено способи формалізації різних організаційних структур зовнішньоторговельної економічної діяльності. В основі побудови відповідних математичних моделей знаходиться методологія матричного аналізу міжнародних економічних зв'язків, що дозволяє розглядати відповідні комплексні економічні об'єкти як єдину систему на феноменологічному рівні. Метою статті є побудова лінійної динамічної моделі міжнародної торгівлі в дискретному часі для аналізу відповідних перехідних процесів з початкового стану в усталений рівноважний режим. Також досліджено тривимірну модель торгівлі з іншою специфікою матричної структури з різною пайовою участю в товарообміні. Виконано необхідну комп'ютерну симуляцію еволюційних процесів і представлено відповідні графічні залежності. Представлені в цьому дослідженні математичні моделі динаміки міжнародного торгового обміну можуть мати широкий спектр застосування і використовуватися у відповідних економетричних розрахунках.

Ключові слова: *міжнародна торгівля, матричний аналіз, баланс, ресурс, динаміка, стійкість, рівновага.*
Рис.: *4.* ***Формул:*** *29.* ***Бібл.:*** *8.*

Воронін Анатолій Віталійович *– кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики й економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*
E-mail: *voronin61@ ukr.net*
Гунько Ольга Володимирівна *– кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики й економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*

UDC 313.42

Voronin A. V., Gunko O. V. The Dynamic Models of International Trade Exchange

This publication presents the ways of formalization of various organizational structures of foreign economic activity. Construction of appropriate mathematical models is based on the methodology of matrix analysis of international economic relations, allowing to consider the corresponding complex economic objects as a single system on phenomenological level. The article is aimed at building a linear dynamic model of international trade in discrete time to analyze the corresponding transient processes from the initial state to the established equilibrium mode. Also the three-dimensional model of trade with a different specificity of matrix structure and with various share participation in exchange of goods is researched. The necessary computer simulation of evolutionary processes is accomplished and corresponding graphic dependencies are provided. The mathematical models of international trade exchange dynamics presented in this study can have a wide spectrum of application and be used in corresponding econometric calculations.

Keywords: *international trade, matrix analysis, balance, resource, dynamics, stability, equilibrium.*
Fig.: *4.* ***Formulae:*** *29.* ***Bibl.:*** *8.*

Voronin Anatolii V. *– PhD (Engineering), Associate Professor of the Department of Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave., Kharkiv, 61166, Ukraine)*
E-mail: *voronin61@ ukr.net*
Gunko Olha V. *– PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave., Kharkiv, 61166, Ukraine)*

Базовые методологические принципы современного анализа взаимной торговли определенной группы стран, основанные на применении матричного анализа, приведены в работе [1]. Здесь же имеется подробное объяснение способа формирования матричной структуры, элементами которой являются разнообразные показатели внешнеторговой деятельности: экспорт, импорт, сальдо и т. д. Последующее развитие указанной методологии представлено в статье [2], где использовалась реальная торговая статистика МВФ для стран Евросоюза. Заслуживает серьёзного внимания попытка создания матричного инструментария для оценки развития договорно-правовой базы двустороннего внешнеэкономического сотрудничества Украины со странами Евросоюза. [3; 4]. При этом особый интерес вызывает способ построения многоуровневых классификационных шкал для типизации стран по степени развития ядра договорно-правовых основополагающих документов.

Анализ вышеупомянутых публикаций свидетельствует о значительных преимуществах матричного анализа внешней торговли при наличии имеющихся современных вычислительных средств обработки больших массивов имеющихся данных. При этом, однако, рассмотренная методология представляет внешнеторговые балансы в статистическом режиме, то есть в фиксированный момент времени.

Всё это делает актуальным построение многомерной динамической модели внешней торговли. Поэтому *целью* данной работы является создание линейной модели обмена как первого приближения модели международной торговли.

Не нарушая общности, будем считать модель торгового обмена сбалансированной (или бездефицитной). Далее необходимо ввести обозначения количественных характеристик, описывающих торговлю между странами, и формализовать связь между этими характеристиками. Пусть C_1, C_2, ..., C_m – наименование стран, участвующих в международной торговле. При этом объем средств, которые каждая страна выделяет на торговлю, обозначим как x_1, x_2, ..., x_m. Относительная часть (доля) средств, которые тратит страна C_j на приобретение товаров в стране C_i с учетом внутреннего товарооборота ($i = j$), обозначим через $a_{i,j}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,m}$. Существенным здесь является выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1,\ j=\overline{1,m}. \quad (1)$$

Матрица A, состоящая из элементов $a_{ij}, i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, называется структурной матрицей торговли

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Так как все $a_{ij} \ge 0$ и выполняется (1), то матрица A является так называемой стохастической матрицей с известными свойствами [5].

Условие сбалансированности торговли дает

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = x_i,\ i=\overline{1,m}. \quad (2)$$

Равенство (2) означает, что одно из собственных чисел матрицы A равно единице, а все x_i будут компонентами соответствующего собственного вектора.

Динамическая версия условия (2) будет определяться объемом средств страны C_i в последующий момент времени $k + 1$, равному прибыли в текущий момент времени k, т. е.

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j(k). \quad (3)$$

Если ввести в рассмотрение вектор средств $X=(x_1, x_2, ..., x_m)^T$, то (3) перепишется в векторно-матричной форме:

$$x(k+1) = A \cdot x(k) \quad (4)$$

с заданным начальным вектором

$$x(0) = (x_1(0), x_2(0), ..., x_m(0))^T.$$

Система разностных уравнений (4) имеет решение

$$x(k) = A^k x(0). \quad (5)$$

Таким образом, получение аналитического решения для вектора $x(k)$ в произвольный момент времени k сводится к вычислению соответствующей степени матрицы A.

Рассмотрим частный случай структурной матрицы торговли A следующего вида:

$$a_{ij} = \frac{1-\alpha}{m-1}, i \ne j; \quad a_{ij} = \alpha, i = j; \quad 0 < \alpha < 1.$$

Это означает, что каждая страна оставляет долю средств α на внутренний товарооборот и выделяет оставшуюся часть ресурсов 1 – α равномерно на внешнюю торговлю с m – 1 страной. В векторно-матричном виде (5) получим представление:

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_m(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1-\alpha}{m-1} & \dots & \frac{1-\alpha}{m-1} \\ \frac{1-\alpha}{m-1} & \alpha & \dots & \frac{1-\alpha}{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-\alpha}{m-1} & \frac{1-\alpha}{m-1} & \dots & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_m(0) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Из свойств конкретного преобразования Лапласа (Z-преобразования) известно, что формула (5) имеет представление

$$X(z) = z(zE - A)^{-1} X(0), \quad (7)$$

где $X(z)$ есть Z-преобразование вектора $X(k)$. Из явного вида матрицы A очевидно, что

$$zE - A = \begin{pmatrix} z-\alpha & \frac{\alpha-1}{m-1} & \dots & \frac{\alpha-1}{m-1} \\ \frac{\alpha-1}{m-1} & z-\alpha & \dots & \frac{\alpha-1}{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\alpha-1}{m-1} & \frac{\alpha-1}{m-1} & \dots & \frac{\alpha-1}{m-1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Обращение полиномиальной матрицы (8) даёт:

$$\left(zE-A\right)^{-1}=\frac{1}{(z-1)\left(z-\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)}\begin{pmatrix} z-\frac{m-2+\alpha}{m-1} & \frac{1-\alpha}{m-1} & \dots & \frac{1-\alpha}{m-1} \\ \frac{1-\alpha}{m-1} & z-\frac{m-2+\alpha}{m-1} & \dots & \frac{1-\alpha}{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-\alpha}{m-1} & \frac{1-\alpha}{m-1} & \dots & z-\frac{m-2+\alpha}{m-1} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(9)}$$

В таком случае выражение (7) с помощью (9) преобразуется к форме:

$$\begin{pmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \\ \dots \\ x_m(z) \end{pmatrix}=\frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)}\begin{pmatrix} z-\frac{m-2+\alpha}{m-1} & \frac{1-\alpha}{m-1} & \dots & \frac{1-\alpha}{m-1} \\ \frac{1-\alpha}{m-1} & z-\frac{m-2+\alpha}{m-1} & \dots & \frac{1-\alpha}{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-\alpha}{m-1} & \frac{1-\alpha}{m-1} & \dots & z-\frac{m-2+\alpha}{m-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_m(0) \end{pmatrix}. \quad \textbf{(10)}$$

Несложно показать, что обратное *Z*-преобразование даёт следующие соответствия:

$$\frac{1-\alpha}{m-1}\cdot\frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)}\Rightarrow\frac{1}{m}\left(1-\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k+1}\right);\quad \frac{z\left(z-\frac{m-2+\alpha}{m-1}\right)}{(z-1)\left(z-\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)}\Rightarrow\frac{1}{m}\left(1+(m-1)\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k}\right).$$

Тогда формула (6) получит явное представление:

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_m(k) \end{pmatrix}=\frac{1}{m}\begin{pmatrix} 1+(m-1)\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k} & \frac{1-\alpha}{m-1} & \dots & \frac{1-\alpha}{m-1} \\ 1-\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k+1} & 1+(m-1)\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k} & \dots & 1-\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k+1} & 1-\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k+1} & \dots & 1+(m-1)\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_m(0) \end{pmatrix}. \quad \textbf{(11)}$$

Из (11) следует выражение для каждой из компонент $x_i(k)$:

$$x_з(k)=\frac{1}{m}\left\{\left(1+(m-1)\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k}\right)x_i(0)+\left(1-\left(\frac{m\alpha-1}{m-1}\right)^{k+1}\right)\cdot\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m}x_j(0)\right\},\quad i=\overline{1,m}. \quad \textbf{(12)}$$

Так как величина $\left|\frac{m\alpha-1}{m-1}\right|<1$, то $\lim\limits_{k\to\infty}x_i(k)=\frac{1}{m}$, что соответствует компонентам собственного вектора при единичном собственном значении. Вид переходного процесса из начального значения $x(0)$ в установившееся $\overline{x}=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right)$ будет зависеть от выбора величины α. При $\alpha>\frac{1}{m}$ процесс будет апериодическим, а при $\alpha<\frac{1}{m}$ будут наблюдаться затухающие колебания. На *рис. 1* для различных значений α и *m* приведены соответствующие зависимости. В случае α = 0, то есть при условии отсутствия внутреннего товарооборота в данной системе, всегда присутствует периодический режим с убывающей в геометрической прогрессии амплитудой [7].

Рассмотрим ещё один пример товарообмена между тремя странами. При этом будем полагать отсутствие внутреннего товарооборота у каждой из стран C_1, C_2, C_3. Пусть структурная матрица торговли представлена в следующем виде:

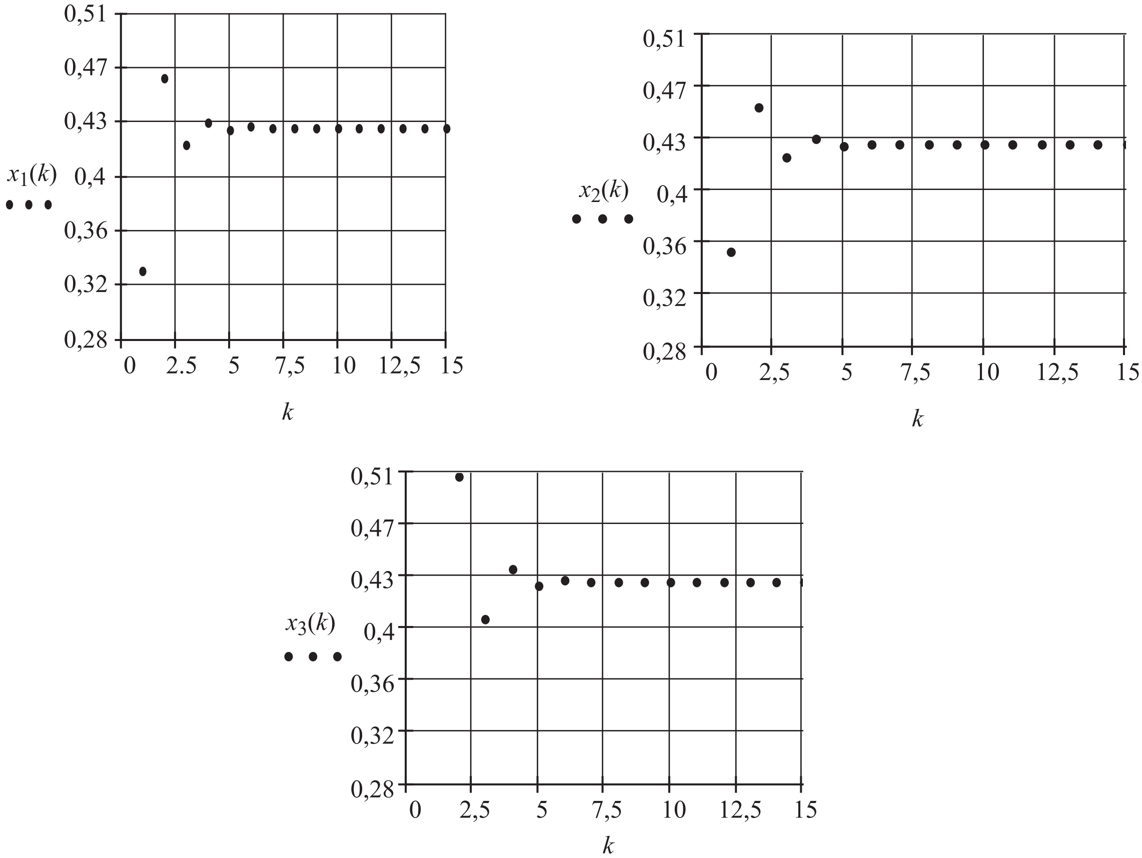

Рис. 1а. Переходная динамика многомерной модели линейного обмена (α = 0,1, *m* = 3)

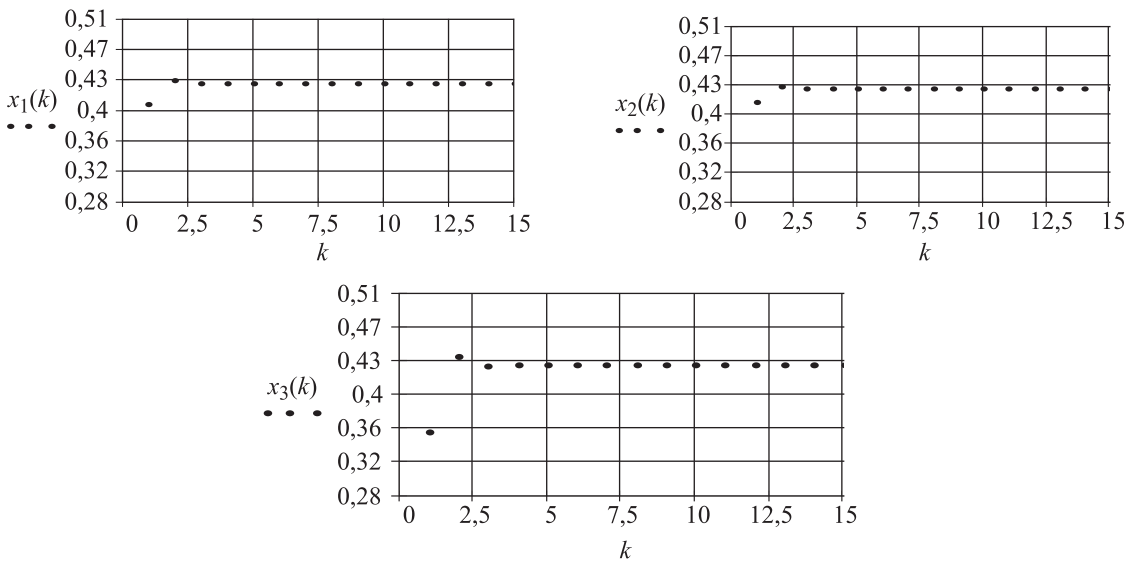

Рис. 1б. Переходная динамика многомерной модели линейного обмена (α = 0,25, *m* = 3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & 1-\gamma \\ 1-\alpha & 1-\beta & 0 \end{pmatrix},$$

где α, β, γ – положительные и не превосходящие единицу числа, имеющие смысл долей средств каждой из стран на взаимный товарообмен. Сумма элементов каждого столбца является единицей, и поэтому *A* является стохастической матрицей [5].

Определим вектор средств, компонентами которого – x_1, x_2, x_3 – есть части от общего объёма торговли, которые должна вкладывать каждая из стран во внешний товарооборот для сбалансированности торговли. Искомый вектор по сути является собственным вектором матрицы *A*, соответствующим собственному значению, равному единице. Компоненты данного вектора образуют нетривиальное решение однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\beta x_2+\gamma x_3=x_1\\ \alpha x_2+(1-\gamma)x_3=x_2\\ (1-\alpha)x_2+(1-\beta)x_2=x_3\end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases}x_1-\beta x_2-\gamma x_3=0\\ -\alpha x_1+x_2+(\gamma-1)x_3=x_2\\ (\alpha-1)x_1+(\beta-1)x_2+x_3=0\end{cases}. \qquad \textbf{(14)}$$

Одним из решений системы (14) является $x_1=\beta+\gamma-\beta\gamma,\ \ x_2=1-\gamma+\alpha\gamma,\ \ x_3=1-\alpha\beta.$ Отсюда следует, что для сбалансированной торговли необходимо, чтобы средства, которые вкладывает каждая из стран во внешнеторговый оборот, соотносились как $(\beta+\gamma-\beta\gamma):(1-\gamma+\alpha\gamma):(1-\alpha\beta).$

В частном случае, когда $\alpha=\beta=\gamma,$ имеем $x_1=2\alpha-\alpha^2;\ \ x_1=2\alpha-\alpha^2;\ \ x_3=1-\alpha^2.$

Соответствующее соотношение баланса есть

$$(2\alpha-\alpha^2):(1-\alpha+\alpha^2):(1-\alpha^2),$$

и при различных α может принимать разные значения. Только лишь при $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$ достигается равный вклад каждой из стран во внешнеторговый баланс. Структурная матрица торговли в данном случае имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

и является двоякостохастической, то есть суммы элементов по столбцам и по строкам равны единице. На *рис. 2* показаны зависимости x_1, x_2, x_3 при различных значениях α на интервале $0<\alpha<1.$

Исследуем спектральные свойства матрицы *A*. Характеристический полином по параметру λ выражается при помощи определителя:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda&\beta&\gamma\\ \alpha&-\lambda&1-\gamma\\ 1-\alpha&1-\beta&-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Так как одно из собственных значений λ = 1, то данный определитель даёт факторизованное выражение:

$$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+\delta)=0, \qquad \textbf{(15)}$$

где $\delta=\beta(1-\alpha)(1-\gamma)+(1-\beta)\alpha\gamma.$

Величина δ есть определитель матрицы *A* и, очевидно, что δ > 0, так как значения α, β, γ находятся между нулем и единицей. В результате преобразований получим для определителя δ иное выражение:

$$\delta=\beta-\alpha\beta-\beta\gamma+\alpha\gamma. \qquad \textbf{(16)}$$

Из (16) вытекает, что определитель есть функция трёх переменных $\delta=\delta(\alpha,\beta,\gamma).$ Мы уже располагаем информацией о том, что δ > 0, и попытаемся выяснить его верхнюю границу в силу ограниченности α, β, γ. Необходимые условия существования экстремума для δ дают следующие соотношения:

$$\frac{\partial\delta}{\partial\alpha}=\gamma-\beta=0;\ \ \frac{\partial\delta}{\partial\beta}=1-\alpha-\gamma=0;$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\gamma}=\alpha-\beta=0. \qquad \textbf{(17)}$$

Система (17) имеет решение $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}.$ Следовательно, $\delta_{\max}=\frac{1}{4},$ и можно сделать окончательный вывод о пределах изменения величины δ:

$$0<\delta<\frac{1}{4}. \qquad \textbf{(18)}$$

С помощью (15) и (18) можно сделать вывод о локализации собственных чисел матрицы *A*:

$$\lambda_1=1,\ \ \lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\delta},\ \ -1<\lambda_{2,3}<0. \qquad \textbf{(19)}$$

Геометрические соображения по поводу формы определителя δ пространственной конфигурации свидетельствуют о том, что это будет однополостный гиперболоид. Доказывает этот факт то, что при помощи замены переменных

$$x=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{3}-\frac{1}{6},\ \ y=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ z=\frac{\alpha-\beta-2\gamma}{6}+\frac{1}{6}.$$

Получим каноническую форму гиперболоида:

$$-\frac{3}{1/4-\delta}x^2+\frac{1}{1/4-\delta}y^2+\frac{3}{1/4-\delta}z^2=1. \qquad \textbf{(20)}$$

При δ = 1/4 гиперболоид превращается в конус второго порядка:

$$-3x^2+y^2+3z^2=0. \qquad \textbf{(21)}$$

На *рис. 3* представлены соответствующие геометрические объекты с учетом ограничений на параметры системы.

По аналогии с (4)–(6) рассмотрим динамическую систему международной торговли с матрицей вида (13):

$$\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ x_3(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\beta&\gamma\\ \alpha&0&1-\gamma\\ 1-\alpha&1-\beta&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_3(k)\end{pmatrix}. \qquad \textbf{(22)}$$

Для некоторого упрощения аналитических преобразований рассмотрим частный случай (22) при α = β = γ. В таком случае имеем систему:

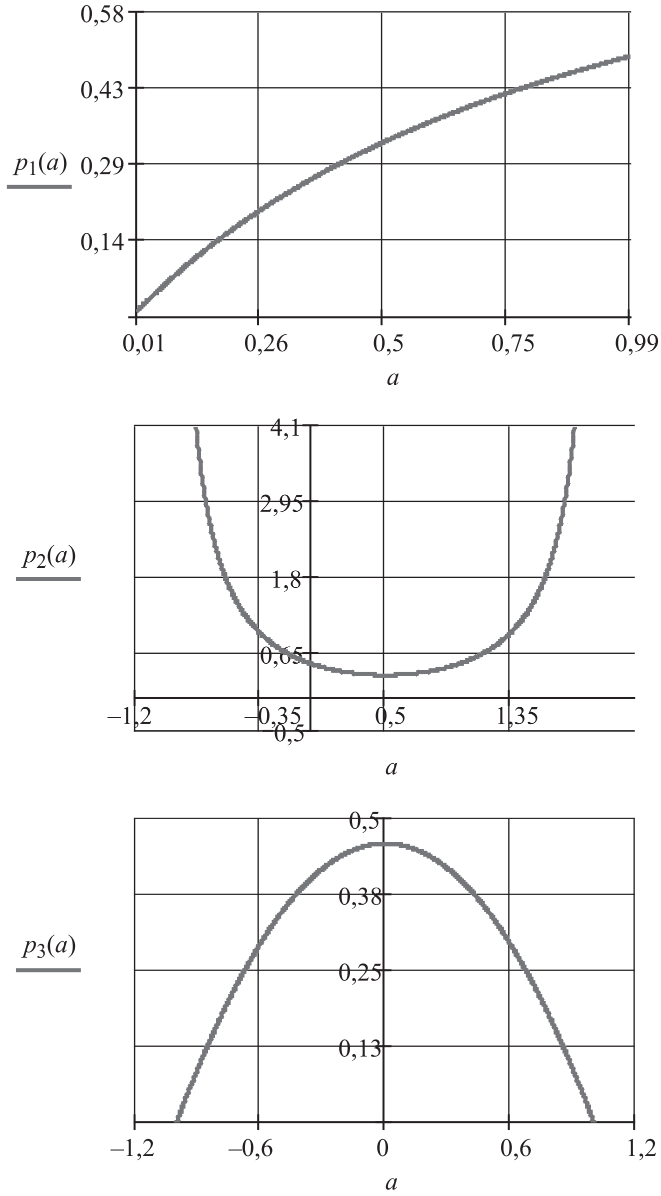

Рис. 2. Структура равновесного торгового баланса

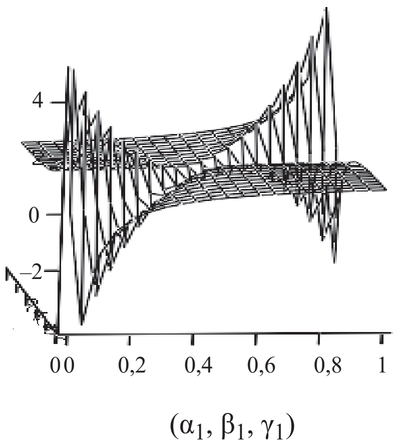

Рис. 3а. Зависимость фазового объема трёхмерной модели торговли от структурных параметров (δ = 0,25)

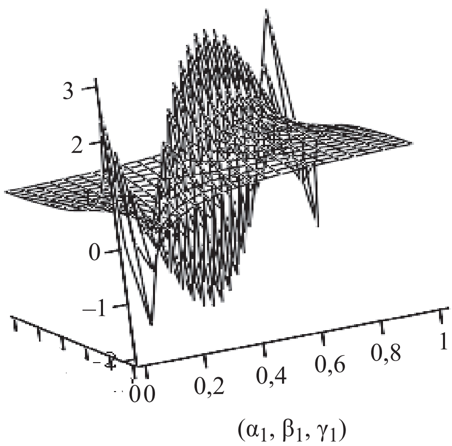

Рис. 3б. Зависимость фазового объема трёхмерной модели торговли от структурных параметров (δ = 0,125)

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Применяя к (23) Z-преобразование с учётом начальных условий, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \\ x_3(z) \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} z & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & z & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}.$$

После выполнения операции обращения матрицы результат следующий:

$$\begin{pmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \\ x_3(z) \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \frac{z(z-1+\alpha)}{(z-1)(z+\alpha)} & \frac{\alpha z}{(z-1)(z+\alpha)} & \frac{\alpha z}{(z-1)(z+\alpha)} \\ \frac{z(\alpha z+(1-\alpha)^2)}{(z-1)(z+\alpha)\left(z+1-\alpha\right)} & \frac{z(z^2-\alpha(1-\alpha))}{(z-1)(z+\alpha)(z+1-\alpha)} & \frac{z((1-\alpha)z+\alpha^2)}{(z-1)(z+\alpha)(z+1-\alpha)} \\ \frac{\left(1-\alpha\right)z}{(z-1)(z+1-\alpha)} & \frac{(1-\alpha)z}{(z-1)(z+1-\alpha)} & \frac{z(z-\alpha)}{(z-1)(z+1-\alpha)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Выполняя обратное Z-преобразование для системы (24), получим явное решение (23) в дискретном времени:

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix},$$

где $A_{11}(k) = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}(1+(-\alpha)^k)$, $A_{12}(k) = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}(1-(-\alpha)^k)$, $A_{13}(k) = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}(1+(-\alpha)^k)$,

$A_{21}(k) = \dfrac{1-\alpha+\alpha^2}{2+\alpha-\alpha^2} - \dfrac{(-\alpha)^k}{1+\alpha} + \dfrac{1-\alpha}{2-\alpha}(\alpha-1)^k$, $A_{22}(k) = \dfrac{1-\alpha+\alpha^2}{2+\alpha-\alpha^2} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}(-\alpha)^k + \dfrac{1}{2-\alpha}(\alpha-1)^k$,

$A_{23}(k) = \dfrac{1-\alpha+\alpha^2}{2+\alpha-\alpha^2} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}(-\alpha)^k - \dfrac{1}{2-\alpha}(\alpha-1)^k$, $A_{31}(k) = \dfrac{1-\alpha}{2-\alpha} - \dfrac{1-\alpha}{2-\alpha}(\alpha-1)^k$,

$A_{32}(k) = \dfrac{1-\alpha}{2-\alpha} - \dfrac{1-\alpha}{2-\alpha}(\alpha-1)^k$, $A_{33}(k) = \dfrac{1-\alpha}{2-\alpha} + \dfrac{1}{2-\alpha}(\alpha-1)^k$.

Матрица системы (23) имеет собственные значения: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -\alpha$; $\lambda_3 = \alpha - 1$. Данный матричный спектр свидетельствует о наличии в решении (25) двух затухающих колебательных движений с амплитудами α и $1 - \alpha$. При условии $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 1$ установившиеся значения компонент вектора средств каждой из стран равны:

$$x_1^* = \frac{\alpha}{1+\alpha},\ x_2^* = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{2+\alpha-\alpha^2},\ x_3^* = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}. \tag{26}$$

При этом справедливо соотношение:

$$x_1^* = \frac{\alpha}{1+\alpha},\ x_2^* = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{2+\alpha-\alpha^2},\ x_3^* = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}. \tag{27}$$

Более того, (26) равносильно значениям

$$x_1^* = \frac{2\alpha-\alpha^2}{2+\alpha-\alpha^2},\ x_2^* = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{2+\alpha-\alpha^2},\ x_3^* = \frac{1-\alpha^2}{2+\alpha-\alpha^2},$$

что подтверждает ранее полученное условие торгового баланса:

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* = (2\alpha-\alpha^2) : (1-\alpha+\alpha^2) : (1-\alpha^2).$$

На *рис. 4* представлены результаты переходных процессов в системе (23).

Возвращаясь к исходной системе (22), выполним традиционный приём данного исследования – Z-преобразования:

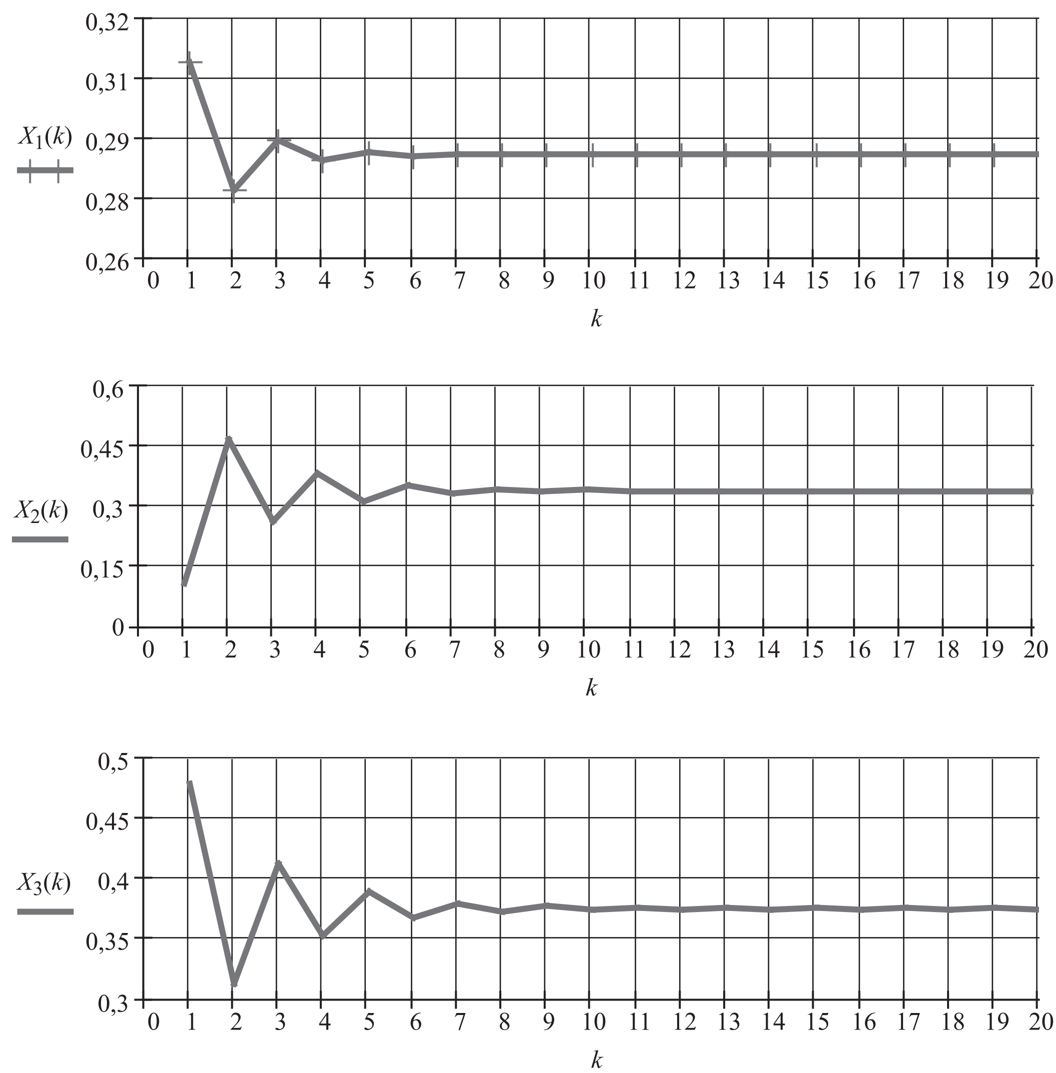

Рис. 4а. Вид переходных процессов в трёхмерной модели внешней торговли (α = 0,4)

$$\begin{pmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \\ x_3(z) \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} z & -\beta & -\gamma \\ -\alpha & z & \gamma - 1 \\ \alpha - 1 & \beta - 1 & z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}. \quad \textbf{(28)}$$

При помощи стандартной методики обращения полиномиальной матрицы будем иметь:

$$\begin{pmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \\ x_3(z) \end{pmatrix} = \frac{z}{(z-1)(z^2+z+\delta)} \times$$
$$\times \left(\begin{array}{c|c|c} z^2 - (1-\alpha)(1-\beta) & \alpha z + (1-\alpha)(1-\beta) & (1-\alpha)z + \alpha(1-\beta) \\ \hline \beta z + (1-\beta)\gamma - \alpha & z^2 - (1-\alpha)\gamma & (1-\beta)z + (1-\alpha)\beta \\ \hline \gamma z + \beta(1-\gamma) & (1-\gamma)z + \alpha\gamma & z^2 - \alpha\beta \end{array} \right). \quad \textbf{(29)}$$

Таким образом, (29) – это уже и есть решение системы (22) в операциональном выражении символьного Z-преобразования. Для выполнения обратного перехода от Z-преобразования к дискретному времени можно воспользоваться соответствующими таблицами [6]. При этом стоит учесть, что $z^2 + z + \delta = (z - z_1)(z - z_2)$, где z_1, z_2 – отрицательные действительные числа, так как $0 < \delta \le \frac{1}{4}$.

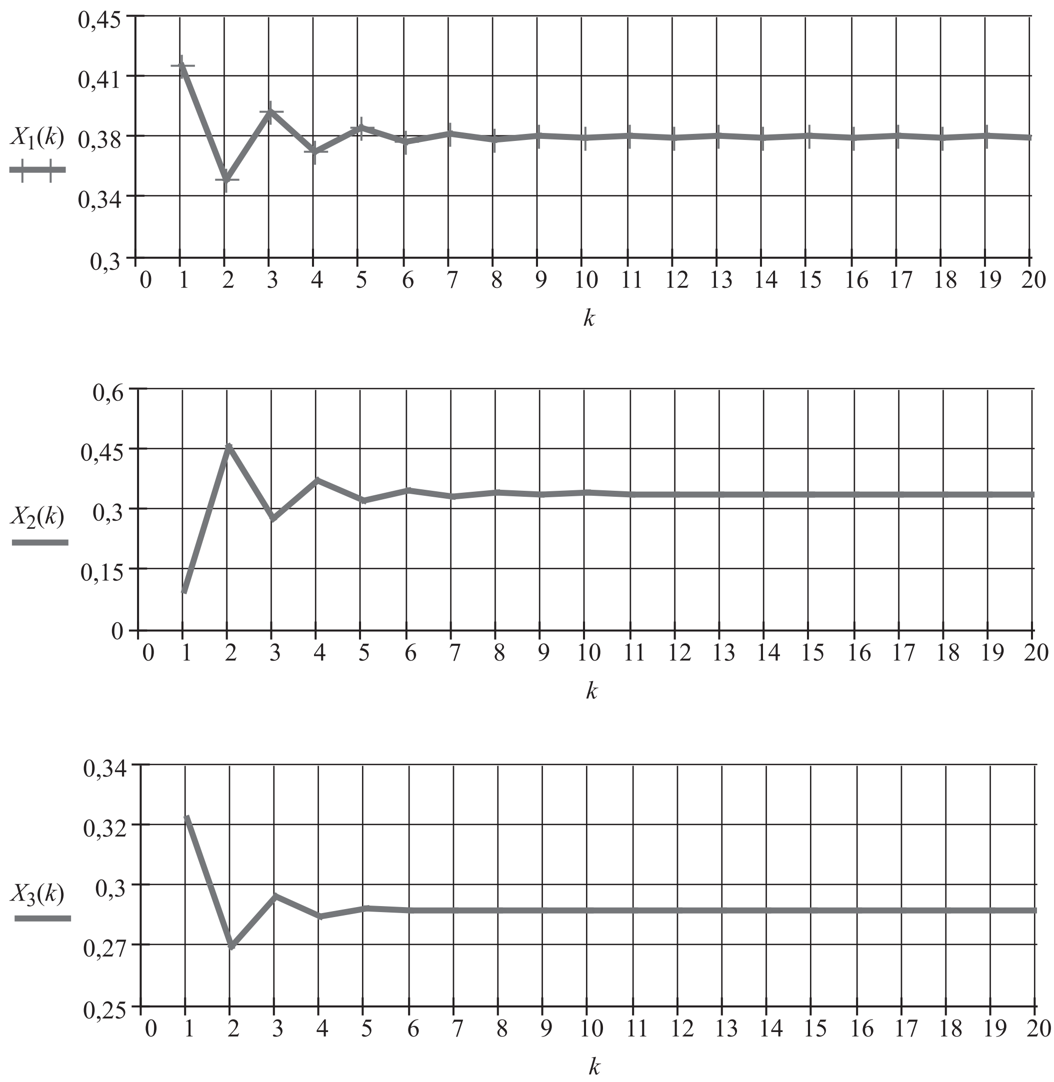

Рис. 4б. Вид переходных процессов в трёхмерной модели внешней торговли (α = 0,6)

Дальнейший этап получения явного решения $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$ является сугубо техническим и не имеет никаких трудностей принципиального характера. Важным для нас является лишь то обстоятельство, что $|z_1| < 1, |z_2| < 1,$ и соответствующие переходные процессы так же, как и в случае (25), будут характеризоваться двумя затухающими в геометрической прогрессии колебательными движениями, а установившийся режим будет соответствовать условию баланса:

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* = (\beta + \gamma - \beta\gamma) : (1 - \gamma + \alpha\gamma) : (1 - \alpha\beta).$$

В заключение необходимо подчеркнуть, что рассмотренные в настоящей статье математические модели внешнеторговой деятельности являются отражением экономической теории линейного обмена, однако в определенной мере отражают специфику рассматриваемой экономической системы [8]. Использование подобного рода модельных конструкций в практических расчетах, как правило, сопряжено с трудностью получения достоверных данных для формирования структуры матрицы международной торговли, а также содержательной интерпретацией полученных результатов. И всем представленная в данной работе методология может оказаться полезной для предсказания динамического поведения многострановой модели экономического взаимодействия. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. **Московкин В. М., Монастырный В. Н.** Матричный анализ взаимной торговли группы стран. *Бизнес Информ*. 2000. № 6. С. 37–43.

2. **Московкин В. М., Колесникова Н. Н.** Матричный анализ взаимной торговли стран ЕС. *Бизнес Информ*. 2002. № 3-4. С. 35–38.

3. **Московкин В. М., Бригит Юсеф, Тюна Д. И.** Матрично-аналитический инструментарий для изучения развития договорно-правовой базы двустороннего внешнеэкономического сотрудничества: на примере Украины и стран Среднего Востока и Северной Африки. *Актуальні проблеми економіки*. 2005. № 11. С. 89–93.

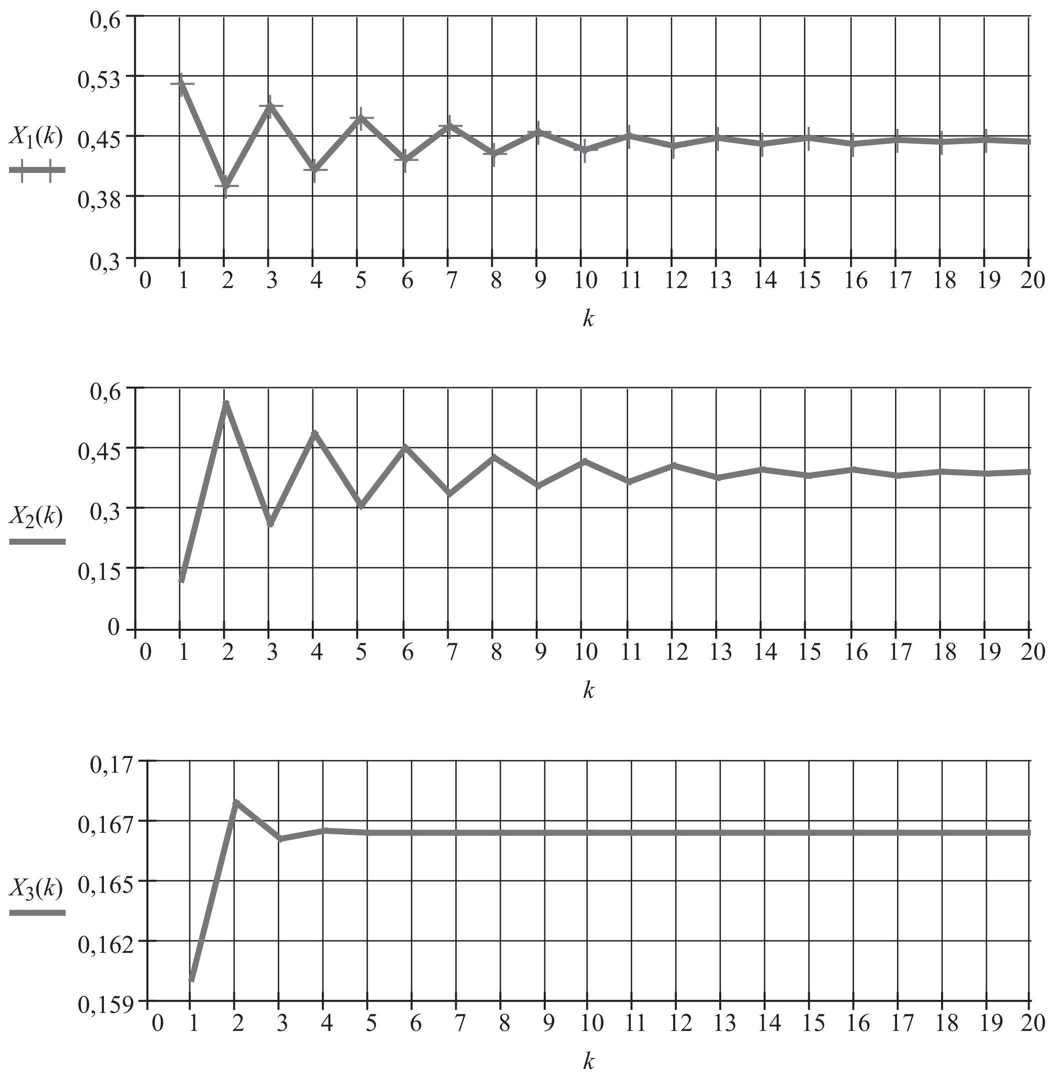

Рис. 4в. Вид переходных процессов в трёхмерной модели внешней торговли (α = 0,8)

4. Колесникова Н. И., Московкин В. М. Матричный анализ развития договорно-правовой базы двустороннего внешнеэкономического сотрудничества Украины со странами ЕС. *Бизнес Информ*. 2007. № 1-2. С. 26–29.

5. Вища математика : підручник для студентів економічних напрямків підготовки / кол. авторів ; заг. ред. д-ра екон. наук, проф. Пономаренка В. С. Харків : Фоліо, 2014. 669 с.

6. Макаров И. М., Менский Б. М. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных Z-преобразований: дробно-рациональные изображения : учеб. пособие для ВТУЗов. М. : Высшая школа, 1978. 247 с.

7. Гунько О. В. Використання середовища Mathcad при вивченні навчальної дисципліни «Математика для економістів». Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. 288 с.

8. Барро Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост. М. : Бином, 2010. 824 с.

REFERENCES

Barro, Dzh., and Sala-i-Martin, Kh. *Ekonomicheskiy rost* [The economic growth]. Moscow: Binom, 2010.

Hunko, O. V. *Vykorystannia seredovyshcha Mathcad pry vyvchenni navchalnoi dystsypliny «Matematyka dlia ekonomistiv»* [Use of the Mathcad environment in studying the discipline "Mathematics for Economists"]. Kharkiv: Vyd-vo KhNEU, 2010.

Kolesnikova, N. I., and Moskovkin, V. M. “Matrichnyy analiz razvitiya dogovorno-pravovoy bazy dvustoronnego vneshneekonomicheskogo sotrudnichestva Ukrainy so stranami YeS“ [Matrix analysis of the development of the legal framework for bilateral foreign economic cooperation of Ukraine with the EU countries]. *Biznes Inform*, no. 1-2 (2007): 26-29.

Makarov, I. M., and Menskiy, B. M. *Tablitsa obratnykh preobrazovaniy Laplasa i obratnykh Z-preobrazovaniy: drobno-ratsionalnyye izobrazheniya* [Table of inverse Laplace transforms and inverse Z-transformations: fractional-rational images]. Moscow: Vysshaya shkola, 1978.

Moskovkin, V. M., and Kolesnikova, N. N. “Matrichnyy analiz vzaimnoy torgovli stran YeS“ [Matrix analysis of mutual trade of the EU countries]. *Biznes Inform*, no. 3-4 (2002): 35-38.

Moskovkin, V. M., and Monastyrnyy, V. N. “Matrichnyy analiz vzaimnoy torgovli gruppy stran“ [Matrix analysis of the mutual trade of a group of countries]. *Biznes Inform*, no. 6 (2000): 37-43.

Moskovkin, V. M., Brigit, Yu., and Tiuna, D. I. “Matrichno-analiticheskiy instrumentariy dlya izucheniya razvitiya dogovorno-pravovoy bazy dvustoronnego vneshneekonomicheskogo sotrudnichestva: na primere Ukrainy i stran Srednego Vostoka i Severnoy Afriki“ [Matrix-analytical tools for studying the development of the legal framework of bilateral foreign economic cooperation: the example of Ukraine and the countries of the Middle East and North Africa]. *Aktualni problemy ekonomiky,* no. 11 (2005): 89-93.

Vyshcha matematyka [Higher mathematics]. Kharkiv: Folio, 2014.