УДК 004:504

Ю.К. ТАРАНЕНКО,
доктор технічних наук,
старший науковий співробітник,
завідувач кафедри
Дніпропетровського університету
імені Альфреда Нобеля

О.Г. ХОЛОД,
кандидат технічних наук, доцент, професор
Дніпропетровського університету
імені Альфреда Нобеля

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗМІН КАПІТАЛУ В ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ

У статті пропонується можливість подальшого розвитку класичної екологічної моделі А. Лотки типу «хижак-жертва» для аналізу динаміки змін капіталу в еколого-економічних системах

Ключові слова: питомі доходи та витрати на одиницю капіталу, швидкість змін доходів та витрат, еколого-економічна система.

Актуальність теми дослідження. Сучасний процес соціально-економічного розвитку здійснюється як безперервний ланцюг змін. За аналогією з еволюційними процесами в житті живих та неживих істот процес соціально-економічного розвитку складається з циклічних змін стійкості на нестабільність. З метою досягнення найбільшого ефекту в функціонуванні соціально-економічної структури необхідне своєчасне прогнозування змін станів системи, тому моделювання динамічних змін капіталу в еколого-економічних системах є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Загальне уявлення щодо циклічного характеру практично усіх економічних процесів було обґрунтовано у працях А. Маршалла. Пізніше цю проблему розглядали Г. Шульц, У. Рикки та Дж. Хікс. Питання, пов'язані із загальною економічною рівновагою та нерівновагою, розглядалися також у працях М. Фрідмена, Р. Барро, Т. Саржента. Слід зауважити, що саме поняття терміна «цикл» в економіці має не тільки технічний а, насамперед, змістовий сенс. Цикли, на відміну від хвиль, визначаються не стільки їх періодичністю, скільки повтореннями, одним типом зв'язку та формою виявлення [1].

Слід зазначити, що на сьогоднішній день існує багато підходів до модулювання економічних циклів. Більшість цих моделей відрізняються необґрунтованою складністю, надмірною стохастичністю та недостатньою адекватністю реальним процесам.

Певну зацікавленість викликає модель Лотки-Вольтерри «хижак-жертва» [2], а точніше, її розвиток в економічному аспекті, який запропоновано в праці [3]. Такий підхід дає певні додаткові можливості, а саме: дозволяє комплексно оцінити динаміку, вийти на рівноважний рівень конкуруючих систем, зробити теоретичні прогнози і управляти основними параметрами системи. Однак у відомих літературних джерелах не наведені дослідження запропонованої системи, відсутній її фазовий портрет, не визначений головний параметр циклічності – період, не обґрунтована залежність зменшення швидкості зростання питомої ваги доходів від квадрата питомої ваги доходів з коефіцієнтом доступності ресурсів.

Метою цієї роботи є подальші дослідження моделі Лотки-Вольтерри «хижак-жертва» стосовно до еколого-економічної галузі.

Виклад основного матеріалу. Почнемо порівняльний аналіз класичної моделі Лотки-Вольтерри і моделі [3], пристосованої до еколого-економічної системи. Змінні та коефіцієнти впливу, які будуть використовуватися для подальшого аналізу, наведені в табл. 1.

Знайдемо рішення систем (1) і (2) для стаціонарного режиму: $\bar{x} > 0, \quad \bar{y} > 0$, навколо якого і відбуваються коливання.

Для системи (1) у стаціонарному режимі $(d\bar{x} / dt) = (d\bar{y} / dt) = 0$:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot \bar{x} - \alpha_2 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \\ -\alpha_4 \cdot \bar{y} + \alpha_5 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 , \end{cases} \tag{3}$$

із системи рівнянь (3) отримаємо:

$$\bar{x} = \frac{\alpha_4}{\alpha_5}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Введемо у систему коливання $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ за умови $\tilde{x} << \bar{x}, \quad \tilde{y} << \bar{y}$, тоді

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha_4}{\alpha_5} + \tilde{x}, \\ y = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + \tilde{y}. \end{cases} \tag{4}$$

З урахуванням (4) співвідношення (1) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \alpha_1 \cdot \left(\dfrac{\alpha_4}{\alpha_5} + \tilde{x}\right) - \alpha_2 \cdot \left(\dfrac{\alpha_4}{\alpha_5} + \tilde{x}\right) \cdot \left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + \tilde{y}\right) = -\left(\dfrac{\alpha_2 \cdot \alpha_4}{\alpha_5}\right) \cdot \tilde{y}, \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = -\alpha_4 \cdot \left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + \tilde{y}\right) + \alpha_5 \cdot \left(\dfrac{\alpha_4}{\alpha_5} + \tilde{x}\right) \cdot \left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + \tilde{y}\right) = \left(\dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_5}{\alpha_2}\right) \cdot \tilde{x}. \end{cases} \tag{5}$$

Система диференціальних рівнянь (5) зводиться до диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \alpha_1 \cdot \alpha_4 \cdot \tilde{x} = 0, \tag{6}$$

розв'язок якого має вигляд:

$$\tilde{x} = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi), \tag{7}$$

де $\omega = \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_4}$ – частота коливань популяції жертв,

$T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_4}}$ – період коливань популяції жертв,

$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$ – амплітуда зміни популяції жертв,

$x_0, \ v_0 = \dfrac{dx}{dt}$ – початкова величина популяції та початкова швидкість зростання популяції жертв відповідно,

$\psi = arctg \dfrac{\omega \cdot x_0}{v_0}$ – фаза зміни популяції жертв.

Таблиця 1

Дані для дослідження математичних моделей

Змінні та коефіцієнти впливу	Характер змінних та коефіцієнтів впливу
Класична модель Лотки-Вольтерри	
x	Кількість жертв
y	Кількість хижаків
α_1	Коефіцієнт народжуваності жертв
α_2	Коефіцієнт смертності жертв від хижаків
α_4	Коефіцієнт зменшення хижаків
α_5	Коефіцієнт народжуваності хижаків
t	Час
$\frac{dx}{dt}$	Швидкість зростання кількості жертв
$\frac{dy}{dt}$	Швидкість зростання кількості хижаків
$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 \cdot x \cdot y, \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha_4 \cdot y + \alpha_5 \cdot x \cdot y. \end{cases}$ (1)	
Еколого-економічна інтерпретація моделі Лотки-Вольтерри	
x	Питомі доходи на одиницю капіталу
y	Питомі витрати на одиницю капіталу
$\alpha_1 \cdot x$	Збільшення швидкості зростання питомих доходів залежно від джерела доходів *(чим краще положення системи, тим більше* α_1 *– коефіцієнт монопольності)*
$\alpha_2 \cdot x \cdot y$	Зменшення швидкості зростання питомих доходів у зв'язку з додатковими витратами
$\alpha_3 \cdot x^2$	Зменшення швидкості зростання питомих доходів у зв'язку з конкуренцією за ресурсами (трудовими, природними, інформаційними), α_3 – коефіцієнт доступності ресурсів
$\alpha_4 \cdot y$	Зменшення швидкості зростання питомих витрат, не пов'язаних з доходами
$\alpha_5 \cdot x \cdot y$	Збільшення швидкості зростання питомих витрат, що забезпечені доходами
$\frac{dx}{dt}$	Швидкість зростання питомого доходу
$\frac{dy}{dt}$	Швидкість зростання питомих витрат
$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 \cdot x \cdot y - \alpha_3 \cdot x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha_4 \cdot y + \alpha_5 \cdot x \cdot y. \end{cases}$ (2)	

Аналогічний результат можна отримати, якщо перетворити систему рівнянь (5) до диференціального рівняння другого порядку відносно $\tilde{y}$:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \alpha_1 \cdot \alpha_4 \cdot \tilde{y} = 0 .$$

Чисельні дослідження системи (1) підтверджують теоретичні висновки, а саме: отримані співвідношення для періоду коливань, амплітуди і фази можуть бути використані для розрахунків.

На рис. 1 і 2 наведено результати розрахунків для різних значень коефіцієнтів народжуваності жертв і смертності жертв від хижаків.

Слід наголосити на певних перевагах наведеної моделі для економічної галузі, де більшість процесів є саме циклічними.

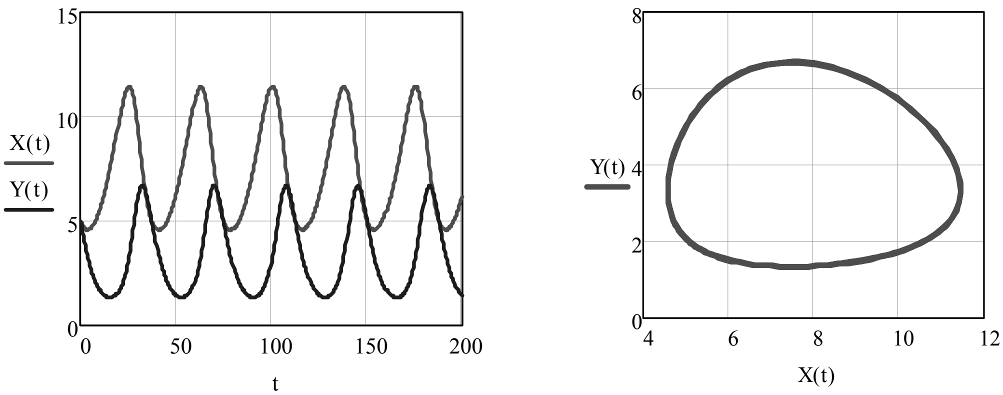

Рис. 1. Залежність циклічності коливань популяцій і фазовий портрет
$\left(T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} = 114,715 ,\ \alpha_1 = 0,1 ,\ \alpha_2 = 0,03 \right)$

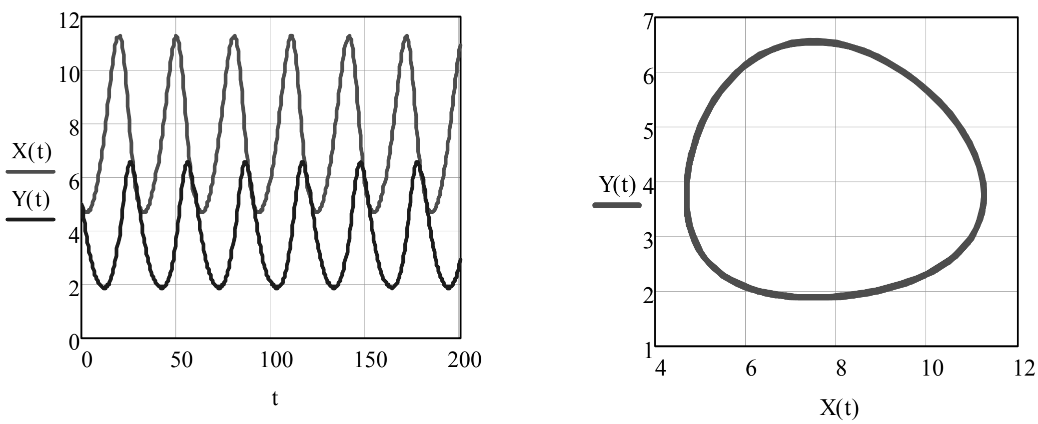

Рис. 2. Залежність циклічності коливань популяцій і фазовий портрет
$\left(T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} = 81,116 ,\ \alpha_1 = 0,15 ,\ \alpha_2 = 0,04 \right)$

Для системи (2) у стаціонарному режимі $\left(d\bar{x} / dt\right) = \left(d\bar{y} / dt\right) = 0$:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot \bar{x} - \alpha_2 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} - \alpha_3 \cdot \bar{x}^2 = 0, \\ -\alpha_4 \cdot \bar{y} + \alpha_5 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Рішення системи рівнянь (8) має вигляд:

$$\bar{x} = \frac{\alpha_4}{\alpha_5}, \qquad \bar{y} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_5 - \alpha_3 \cdot \alpha_4}{\alpha_5}.$$

Введемо у систему коливання $\tilde{x}, \tilde{y}$ за умови $\tilde{x} << \bar{x}$, $\tilde{y} << \bar{y}$, тоді $\tilde{x}, \tilde{y}$ можна знехтувати:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha_4}{\alpha_5} + \tilde{x}, \\ y = \dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_5 - \alpha_3 \cdot \alpha_4}{\alpha_2 \cdot \alpha_5} + \tilde{y}. \end{cases} \tag{9}$$

З використанням співвідношень (9) диференціальні рівняння (2) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = -\left(\dfrac{\alpha_3 \cdot \alpha_4}{\alpha_5}\right) \cdot \tilde{x} - \left(\dfrac{\alpha_2 \cdot \alpha_4}{\alpha_5}\right) \cdot \tilde{y}, \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \left(\dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_5 - \alpha_3 \cdot \alpha_4}{\alpha_2}\right) \cdot \tilde{x}. \end{cases} \tag{10}$$

Система диференціальних рівнянь (10) зводиться до такого диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \frac{\alpha_3 \cdot \alpha_4}{\alpha_5} \cdot \frac{d\tilde{x}}{dt} + \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 - \alpha_3 \cdot \alpha_4^2}{\alpha_5} \cdot \tilde{x} = 0. \tag{11}$$

Рівняння (11) описує вільні коливання при в'язкому терті і може бути записано у вигляді:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + 2 \cdot n \cdot \frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2 \cdot \tilde{x} = 0, \tag{12}$$

де $n = \dfrac{\alpha_3 \cdot \alpha_4}{2 \cdot \alpha_5}$, $\omega_0^2 = \dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 - \alpha_3 \cdot \alpha_4^2}{\alpha_5}$.

Розв'язок диференціального рівняння (12) запишемо таким чином:

$$\tilde{x} = A \cdot e^{-n \cdot t} \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - n^2} \cdot t + \psi), \tag{13}$$

де $\omega = \sqrt{\dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 - \alpha_3 \cdot \alpha_4^2}{\alpha_5} - n^2}$ — частота коливань доходів,

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\alpha_5}{\alpha_1 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 - \alpha_3 \cdot \alpha_4^2 - \alpha_5 \cdot n^2}}$ — період коливань доходів,

$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{(\nu_0 + n \cdot x_0)^2}{\omega^2 - n^2}}$ — амплітуда змін доходів,

x_0, $v_0 = \dfrac{dx}{dt}$ — початкова величина доходів та початкова швидкість їх зростання відповідно,

$\psi = arctg\ \dfrac{x_0 \cdot \sqrt{\omega^2 - n^2}}{v_0 + n \cdot x_0}$ — фаза зміни коливань доходів.

Аналіз отриманих результатів свідчить про затухання коливань доходів і витрат. Цей факт підтверджує чисельна перевірка запропонованої в праці [3] еколого-економічної інтерпретації моделі Лотки-Вольтерри.

Для чисельних розрахунків було використано такі значення параметрів:

$$n=\frac{\alpha_3\,\alpha_4}{\alpha_5}\ ,\quad T=\sqrt{\frac{\alpha_5}{\alpha_1\alpha_4\alpha_5-\alpha_3\,(\alpha_4)^2-\alpha_5 n^2}}\ ,\quad n=0,038,\quad T=5,56.$$

Дані чисельної реалізації проілюстровано на рис. 3.

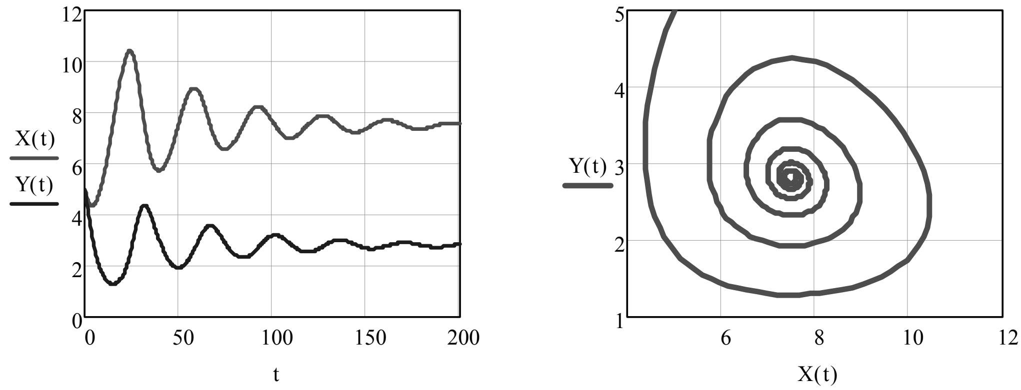

Рис. 3. Затухаючий характер коливань доходів і витрат у часі для моделі на основі системи рівнянь (2)

Наведений недолік моделі можна усунути (саме для коротких циклів), прийнявши, що залежність швидкості зміни доходів від доступності ресурсів відбувається за законом:

$$-\ \alpha_3\cdot x^{\frac{2}{3}}.$$

Результати розрахунків наведено на рис. 4.

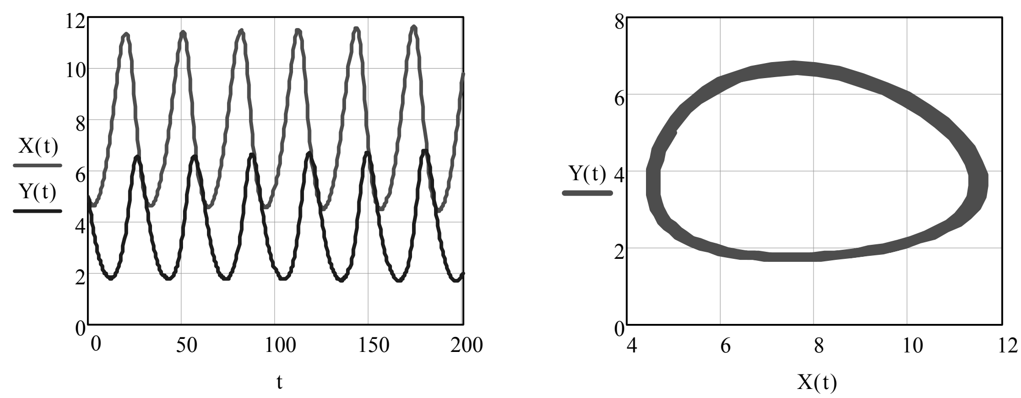

Рис. 4. Залежність циклічного характеру коливань доходів і витрат у часі за удосконаленою моделлю Лотки-Вольтерри

Порівняння отриманих залежностей і фазових портретів на рис. 1, 2 і рис. 4 свідчить про їх ідентичність принаймні на коротких циклах довжиною 5–6 років.

Висновки та напрями подальших досліджень. Проведено порівняльний аналіз класичної моделі Лотки-Вольтерри і її еколого-економічної інтерпретації. Отримано співвідношення для параметрів циклів. Наведені шляхи доцільно використовувати для подальшого удосконалення еколого-економічної моделі та її детального дослідження.

Список використаної літератури

1. Василькова В.В. Порядок и хаос в развитии социальных систем / В.В. Василькова. – СПб: Издательство «Лань», 1999. – 480 с.
2. Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
3. Маценко А.М. Эколого-экономические принципы моделирования циклических колебаний в экономике / А.М. Маценко // Вісник СумДУ. Серія «Економіка». – Суми: Вид-во СумДУ, 2007. – № 1. – С. 103–110.

В статье рассмотрена возможность дальнейшего развития классической эколого-экономической модели А. Лотки типа «хищник-жертва» для анализа динамических изменений капитала в эколого-экономических системах.

Ключевые слова: удельные доходы и расходы на единицу капитала, скорость изменения доходов и расходов, эколого-экономическая система.

The possibility of the further development of the classical ecological and economic model of A. Lotka (type «predator-victim») for the analysis of dynamic changes of capital in ecological and economic systems is considered.

Key words: specific revenues and expenses per capital unit, rate of revenues and expenses change, ecological and economic system.

Надійшло до редакції 5.04.2012.