УДК 517.524

©2013 р. Р.І. Дмитришин

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

РЕГУЛЯРНИЙ ДВОВИМІРНИЙ C-ДРІБ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ ДЛЯ ПОДВІЙНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

Досліджено відповідність між формальним подвійним степеневим рядом і регулярним двовимірним C-дробом з нерівнозначними змінними. Побудовано алгоритм розвинення заданого формального подвійного степеневого ряду у відповідний регулярний двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено умови існування такого алгоритму.

We study the correspondence between a formal double power series and a regular two-dimensional C-fraction with independent variables. As a result, we construct an algorithm for the expansion of a given formal double power series into the corresponding regular two-dimensional C-fraction with independent variables and find conditions for the existence of such an algorithm.

Одним із методів розвинення аналітичних і мероморфних функцій двох змінних, заданих формальним подвійним степеневим рядом (ФПСР), у гіллясті ланцюгові дроби є побудова відповідних таких дробів [1–5].

Функція $f_n(\mathbf{z}) = P_{m_n}(\mathbf{z})/Q_{l_n}(\mathbf{z})$, де $P_{m_n}(\mathbf{z})$ і $Q_{l_n}(\mathbf{z})$ — багаточлени степенів m_n і l_n відповідно, $n \geq 1$, $Q_{l_n}(0,0) \neq 0$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, називається відповідною деякому ФПСР

$$L(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{r,s=1}^{\infty} c_{rs} z_1^r z_2^s, \qquad (1)$$

де $c_{rs} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$, з порядком відповідності ν_n, якщо розвинення $f_n(\mathbf{z})$ у ФПСР збігається з $L(\mathbf{z})$ за всіма однорідними багаточленами до степеня $\nu_n - 1$ включно.

Послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ є відповідною ряду (1), якщо $\lim_{n\to+\infty} \nu_n = +\infty$.

Гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними виду

$$F_0(z_1) + \mathop{\mathrm{D}}_{s=1}^{\infty} \frac{a_{0s} z_2}{F_s(z_1)}, \qquad (2)$$

де

$$F_p(z_1) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{\infty} \frac{a_{rp} z_1}{1}, \quad p \geq 0,$$

a_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, — комплексні сталі, $a_{rs} \neq 0$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$, називаються регулярними двовимірними C-дробами з нерівнозначними змінними.

Відповідність дробу (2) до ФПСР (1) означає, що послідовність $\{g_n(\mathbf{z})\}$, де $g_n(\mathbf{z})$ — n-й підхідний дріб регулярного двовимірного C-дробу з нерівнозначними змінними (2), є відповідною до $L(\mathbf{z})$.

Теорема 5. *Для регулярного двовимірного C-дробу з нерівнозначними змінними (2) існує єдиний ФПСР виду (1), до якого цей дріб буде відповідним. Порядок відповідності n-го підхідного дробу $g_n(\boldsymbol{z})$ рівний $\nu_n = n+1$, і тому ФПСР Тейлора в точці $\boldsymbol{z} = (0,0)$ для $g_n(\boldsymbol{z})$ має вигляд*

$$g_n(\boldsymbol{z}) = \\ = 1 + \sum_{r,s=1}^{n} c_{rs} z_1^r z_2^s + \sum_{p,q=n+1}^{\infty} \gamma_{pq}^{(n)} z_1^p z_2^q, \ n \geq 1,$$

де $\gamma_{pq}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q \geq n+1$, $n \geq 1$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^2$.

Доведення. проводиться за схемою доведення теореми 1 [5].

Побудуємо та дослідимо алгоритм розвинення заданого ФПСР (1) у відповідний регулярний двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними (2).

Позначимо $c_{rs}^{(0)} = c_{rs}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$. Ряд (1) за умови, що $c_{01}^{(0)} \neq 0$ запишемо у вигляді $L(\mathbf{z}) = P_0(z_1) + c_{01}^{(0)} z_2 R_0(\mathbf{z})$, де при $n = 0$

$$P_n(z_1) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_{r0}^{(n)} z_1^r,$$

$$R_n(\mathbf{z}) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{c^{(n)}_{r,s+1}}{c^{(n)}_{01}} z_1^r z_2^s.$$

Нехай

$$\mathcal{H}^{(0)}_{10}(n) \neq 0, \quad \mathcal{H}^{(0)}_{20}(n) \neq 0, \quad n \geq 1, \qquad (3)$$

де при $r = 1, 2$

$$\mathcal{H}^{(0)}_{r0}(n) = \begin{vmatrix} c^{(0)}_{r0} & c^{(0)}_{r+1,0} & \cdots & c^{(0)}_{r+n-1,0} \\ c^{(0)}_{r+1,0} & c^{(0)}_{r+2,0} & \cdots & c^{(0)}_{r+n,0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c^{(0)}_{r+n-1,0} & c^{(0)}_{r+n,0} & \cdots & c^{(0)}_{r+2n-2,0} \end{vmatrix},$$

(зауважимо, що $\mathcal{H}^{(0)}_{r0}(n)$ — це визначники Ганкеля (порядку n), які зв'язані з формальним степеневим рядом $P_0(z_1)$). Тоді згідно з теоремою 7.2 [6] існують числа a_{n0}, $n \geq 1$, такі, що $a_{n0} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} c^{(0)}_{r0} z_1^r \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r0} z_1}{1},$$

де символ "$\sim$" означає відповідність між рядом і дробом. Коефіцієнти a_{n0}, $n \geq 1$, обчислюються за формулами

$$\left.\begin{aligned} a_{10} &= \mathcal{H}^{(0)}_{10}(1), \\ a_{2n,0} &= -\tfrac{\mathcal{H}^{(0)}_{10}(n-1)\mathcal{H}^{(0)}_{20}(n)}{\mathcal{H}^{(0)}_{10}(n)\mathcal{H}^{(0)}_{20}(n-1)}, \\ a_{2n+1,0} &= -\tfrac{\mathcal{H}^{(0)}_{10}(n+1)\mathcal{H}^{(0)}_{20}(n-1)}{\mathcal{H}^{(0)}_{10}(n)\mathcal{H}^{(0)}_{20}(n)}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{H}^{(0)}_{r0}(0) = 1$, $r = 1, 2$.

Нехай

$$\mathcal{H}^{(0)}_{01}(n) \neq 0, \quad \mathcal{H}^{(0)}_{02}(n) \neq 0, \quad n \geq 1, \qquad (5)$$

де при $s = 1, 2$

$$\mathcal{H}^{(0)}_{0s}(n) = \begin{vmatrix} c^{(0)}_{0s} & c^{(0)}_{0,s+1} & \cdots & c^{(0)}_{0,s+n-1} \\ c^{(0)}_{0,s+1} & c^{(0)}_{0,s+2} & \cdots & c^{(0)}_{0,s+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c^{(0)}_{0,s+n-1} & c^{(0)}_{0,s+n} & \cdots & c^{(0)}_{0,s+2n-2} \end{vmatrix}.$$

Тоді згідно з теоремою 7.2 [6] існують числа a'_{0n}, $n \geq 1$, такі, що $a'_{0n} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$\sum_{s=1}^{\infty} c^{(0)}_{0s} z_2^s \sim \mathop{\mathrm{D}}_{s=1}^{\infty} \frac{a'_{0s} z_2}{1}.$$

Коефіцієнти a'_{0n}, $n \geq 1$, обчислюються за формулами

$$\left.\begin{aligned} a'_{01} &= \mathcal{H}^{(0)}_{01}(1), \\ a'_{0,2n} &= -\tfrac{\mathcal{H}^{(0)}_{01}(n-1)\mathcal{H}^{(0)}_{02}(n)}{\mathcal{H}^{(0)}_{01}(n)\mathcal{H}^{(0)}_{02}(n-1)}, \\ a'_{0,2n+1} &= -\tfrac{\mathcal{H}^{(0)}_{01}(n+1)\mathcal{H}^{(0)}_{02}(n-1)}{\mathcal{H}^{(0)}_{01}(n)\mathcal{H}^{(0)}_{02}(n)}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{H}^{(0)}_{0s}(0) = 1$, $s = 1, 2$.

Позначимо через

$$R'_0(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{r,s=1}^{\infty} c^{(1)}_{rs} z_1^r z_2^s \qquad (7)$$

— ряд, обернений до ряду $R_0(\mathbf{z})$. Коефіцієнти ряду (7) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул при $h = 1$

$$c^{(h)}_{rs} = -\sum_{p,q=1}^{r+s} c^{(h)}_{r-p,s-q} \frac{c^{(h-1)}_{p,q+1}}{c^{(h-1)}_{01}}, \qquad (8)$$

де $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, $c^{(h)}_{00} = 1$, причому $c^{(h)}_{kl} = 0$, якщо $k < 0$ або $l < 0$. Ряд (7) за умови, що $c^{(1)}_{01} \neq 0$, запишемо у вигляді $R'_0(\mathbf{z}) = P_1(z_1) + c^{(1)}_{01} z_2 R_1(\mathbf{z})$. Тоді

$$R_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{P_1(z_1) + c^{(1)}_{01} z_2 R_1(\mathbf{z})}.$$

Оскільки $c^{(0)}_{01} = a'_{01}$, то покладемо $a_{01} = a'_{01}$.

Нехай при $h = 1$

$$\mathcal{H}^{(h)}_{11}(n) \neq 0, \quad \mathcal{H}^{(h)}_{21}(n) \neq 0, \quad n \geq 1, \qquad (9)$$

де при $r = 1, 2$

$$\mathcal{H}^{(h)}_{r1}(n) = \begin{vmatrix} c^{(h)}_{r1} & c^{(h)}_{r+1,1} & \cdots & c^{(h)}_{r+n-1,1} \\ c^{(h)}_{r+1,1} & c^{(h)}_{r+2,1} & \cdots & c^{(h)}_{r+n,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c^{(h)}_{r+n-1,1} & c^{(h)}_{r+n,1} & \cdots & c^{(h)}_{r+2n-2,1} \end{vmatrix}.$$

Тоді згідно з теоремою 7.2 [6] існують числа a_{n1}, $n \geq 1$, такі, що $a_{n1} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} c^{(1)}_{r1} z_1^r \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r1} z_1}{1}.$$

Коефіцієнти a_{n1}, $n \geq 1$, обчислюються за формулами при $h = 1$

$$\left.\begin{aligned} a_{1h} &= \mathcal{H}_{11}^{(h)}(1), \\ a_{2n,h} &= -\frac{\mathcal{H}_{11}^{(h)}(n-1)\mathcal{H}_{21}^{(h)}(n)}{\mathcal{H}_{11}^{(h)}(n)\mathcal{H}_{21}^{(h)}(n-1)}, \\ a_{2n+1,h} &= -\frac{\mathcal{H}_{11}^{(h)}(n+1)\mathcal{H}_{21}^{(h)}(n-1)}{\mathcal{H}_{11}^{(h)}(n)\mathcal{H}_{21}^{(h)}(n)}, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{H}_{r1}^{(h)}(0) = 1$, $r = 1, 2$. Оскільки $c_{01}^{(1)} = -c_{02}^{(0)}/c_{01}^{(0)} = a'_{02}$, то покладемо $a_{02} = a'_{02}$.

Обчислюючи далі коефіцієнти $c_{rs}^{(h)}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, $h \geq 3$, за допомогою рекурентних формул (8) і продовжуючи процес ітерації, за умов (3), (5) і умов (9) при $h \geq 1$, для ряду (1) отримаємо дріб (2), де a_{n0}, $n \geq 1$, і a_{nh}, $n \geq 1$, $h \geq 1$, визначаються за формулами (4) і (10) відповідно; $a_{0n} = a'_{0n}$, $n \geq 1$, де a'_{0n}, $n \geq 1$, визначаються за формулами (6).

Таким чином, побудовано алгоритм обчислення коефіцієнтів дробу (2), якщо задані коефіцієнти ряду (1). Відповідність дробу (2) до ряду (1) доводиться за схемою, запропонованою в роботі [5].

Отже, справджується теорема:

Теорема 6. *Регулярний двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними (2) є відповідним заданому ФПСР (1) тоді і лише тоді, коли виконуються умови (3), (5) і умови (9) при $h \geq 1$.*

Приклад 1. *Функція*

$$f(\boldsymbol{z}) = 1 + \sqrt{z_1}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{z_1} + \\ + \sqrt{\frac{z_2}{1 + z_2\sqrt{z_1}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{z_1}}} \times \\ \times \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{z_2}{1 + z_2\sqrt{z_1}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{z_1}}}$$

має в точці $\boldsymbol{z} = (0, 0)$ ФПСР вигляду

$$L^*(\boldsymbol{z}) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} z_1^r}{2r-1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} z_2^s}{2s-1} \times \\ \times \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha(r)=r} \frac{(n-\alpha'(r))!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_r!} \times \\ \times \prod_{p=1}^{r}\left(\frac{-z_2}{2p-1}\right)^{\alpha_p}\right) z_1^r\right)^s,$$

де α_p, $1 \leq p \leq r$, $r \geq 1$, — цілі невід'ємні числа, $\alpha(r) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + r\alpha_r$, $\alpha'(r) = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + (r-1)\alpha_r$, $r \geq 1$. Коефіцієнти цього подвійного степеневого ряду задовольняють умови теореми 2. Застосовуючи вище побудований алгоритм, отримуємо дріб виду (2), де $a_{1s} = a_{01} = 1$, $a_{rs} = a_{0r} = (r-1)^2/[(2r-3)(2r-1)]$, $r \geq 2$, $s \geq 0$, який за теоремою 2 є відповідним в точці $\boldsymbol{z} = (0, 0)$ ФПСР $L^*(\boldsymbol{z})$.

Запропонований алгоритм надає зручну чисельну процедуру обчислення коефіцієнтів регулярних двовимірних C-дробів з нерівнозначними змінними, відповідних до заданого ФПСР, і може бути узагальнений на випадок довільного числа змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баран О.Є., Дмитришин Р.І.* Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці ІМ НАН України. – Київ. – 2000. – Вип. 31. – С. 82-92.

2. *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.

3. *Боднар Д.И.* Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 474-482.

4. *Кучмінська Х.Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Пістригача НАН України, 2010. – 218 с.

5. *Dmytryshyn R.I.* The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series // J. Approx. Theory. – 2012. – **164**, № 12. – P. 1520-1539.

6. *Jones W.B., Thron W.J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Vol. 11.: Encycl. of Math. & its Appl. – London – Amsterdam – Don Mills – Ontario – Sydney – Tokyo: Addison-Wesley, 1980. – 429 p.