УДК 517.5

©2013 р. Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків

Українська академія друкарства
Львівський національний університет імені Івана Франка

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА-СТІЛТ'ЄСА

Отримано новий опис виняткової множини в асимптотичній оцінці зверху типу Вімана через максимум підінтегральної функції для інтегралів Лапласа–Стілт'єса.

We obtain a new description of the exceptional set in an asymptotic estimate from above of Wiman's type in terms of maximum of integrand function of the Laplace–Stieltjes integrals.

За теоремою Вімана-Валірона [1,2] для кожної цілої функції

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

і для кожного $\varepsilon>0$ існує множина $E\subseteq[1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int_E \frac{1}{r}dr<+\infty$), така, що для всіх $r\in[1;+\infty)\setminus E$ виконується нерівність Вімана

$$M_f(r)\le \mu_f(r)\big(\ln\mu_f(r)\big)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad (1)$$

де

$$M_f(r)=\max\big\{|f(z)|\colon |z|=r\big\},$$
$$\mu_f(r)=\max\big\{|a_n|r^n\colon n\ge 0\big\}.$$

Різноманітні аналоги цієї теореми для цілих рядів Діріхле отримано в [3]. В [4] отримано непокращувані достатні умови для справедливості аналогів класичної нерівності Вімана. Певний аналог нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле отримано в [5]. У статтях [6,7] доведено деякі твердження про нерівності типу Вімана для інтегралів типу Лапласа–Стілт'єса вигляду

$$F(\sigma)=\int\limits_{\mathbb{R}^p_+} f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle}\nu(dx), \qquad (2)$$

де ν — зліченно-адитивна невід'ємна на $\mathbb{R}^p_+$ міра з необмеженим носієм, f — довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}^p_+$. Через $\mathcal{I}^p(\nu)$ позначимо клас функцій $F\colon\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, зображуваних для всіх $\sigma\in\mathbb{R}^p$ інтегралом вигляду (2).

Через $\nu(E)$ позначимо ν-міру ν-вимірної множини $E\subseteq\mathbb{R}^p$. Для $0\le a\le b<+\infty$ покладемо

$$\nu_0(a,b]=\nu\{x\in\mathbb{R}^p\colon a<\|x\|\le b\},$$

де $\|\cdot\|$ – евклідова норма на $\mathbb{R}^p$.

Для $F\in\mathcal{I}^p(\nu)$ і $\sigma\in\mathbb{R}^p$ позначимо

$$\mu_*(\sigma,F)=\sup\{f(x)e^{<\sigma,x>}\colon x\in\operatorname{supp}\nu\},$$

де supp ν – носій міри ν.

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій $\psi(t)$, таких, що $\psi(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$; L^+ — підклас L, в який входять строго зростаючі до $+\infty$ при $t\to+\infty$ функції, L_1^+ — підклас L^+, який складається з функцій $\psi\in L^+$, таких, що

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{\psi(t)}<+\infty.$$

Для функції $\psi\in L^+$ через ψ^{-1} позначимо обернену до неї функцію. Через L_0^+ позначимо підклас L^+, в який входять такі функції $h\in L^+$, що $h(t)\ge\ln t$ $(t\ge t_0)$, і обернені функції до них задовольняють умови

$$h^{-1}(t\varepsilon(t))=o(h^{-1}(t))\ (t\to+\infty),$$
$$(\forall C>0)\colon h^{-1}(t+C)=O(h^{-1}(t))\ (t\to+\infty)$$

для кожної функції $\varepsilon(t)\to+0$ $(t\to+\infty)$.

У випадку, коли міра ν є прямим добутком зліченно-адитивних мір ν_j на $\mathbb{R}_+$, тобто

$$\nu=\nu_1\times\ldots\times\nu_p,$$

в [6] отримано аналог нерівності Вімана (1) для інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса за мірою ν.

Для довільної міри ν і класу $\mathcal{I}^p(\nu)$ при $p \geq 2$ в [7] доведено таку теорему.

Теорема A. Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Якщо для міри ν виконується умова

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln t} \ln \nu(\{x \in \mathbb{R}^p \colon t - \sqrt{\psi(t)} \leq \|x\| \leq \\ \leq t + \sqrt{\psi(t)}\}) \leq \beta < +\infty,$$

де $\psi \in L_1^+$, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться така множина $E \subseteq \mathbb{R}^p$, що для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p \backslash E$

$$F(\sigma) \leq C\mu_*(\sigma, F)(\ln \mu_*(\sigma, F))^{\beta+\varepsilon}$$

і

$$meas_p(E \cap S_R) = O(R^{p-1}) \ (R \to +\infty),$$

де $meas_p$ — лебегова міра на $\mathbb{R}^p$, S_R — образ циліндра $\{x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \colon x_2^2 + \ldots + x_p^2 \leq R^2\}$ при такому повороті системи координат навколо початку координат, що додатна піввісь Ox_1 переходить у промінь $\{x \in \mathbb{R}^p \colon x_1 = \ldots = x_p \geq 0\}$.

Об'єктом розгляду в цій статті є клас $\mathcal{I}^p(\nu)$ інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса з довільною зліченно-адитивною мірою ν на $\mathbb{R}^p$ з необмеженим носієм, а основним результатом є отримання непокращуваних умов достатніх для справедливості аналогів класичної нерівності Вімана для класу $\mathcal{I}^p(\nu)$.

Наступна теорема містить новий опис величини виняткових множин у нерівностях типу Вімана для функцій $F \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ з класу $\mathcal{I}^p(\nu)$.

Теорема 1. *Нехай* $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$ *і* $h \in L_0^+$. *Якщо виконується умова*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dh(\nu_0(0, t])}{t} < +\infty, \tag{3}$$

то існує така множина E, *що*

$$\nu_p(E \cap K) < +\infty,$$

і співвідношення

$$F(\sigma) \leq o(\mu_*(\sigma, F)h^{-1}(\ln \mu_*(\sigma, F))) \tag{4}$$

виконується при $|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K \backslash E$ *для кожного конуса* $K \subseteq \mathbb{R}_+^p$ *з вершиною в початку координат* O, *такого, що* $\overline{K} \backslash \{O\} \subseteq \mathbb{R}_+^p$.

Нам буде потрібна така лема.

Лема 1. *Якщо* $v(t)$ — *невід'ємна додатна при* $t > t_0 \geq 0$ *зростаюча на* $[0, +\infty)$ *функція, така, що*

$$\int_0^{+\infty} \frac{v(t)}{t^2} dt < +\infty, \tag{5}$$

то існує така додатна неперервна на $[0, +\infty)$, *зростаюча до* $+\infty$ *при* $t \to +\infty$ *функція* $\psi(t)$, *що*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$$

і

$$v(t) = o(\psi^{-1}(t)) \ (t \to +\infty).$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що, не зменшуючи загальності міркувань, можемо вважати, що функція $v(t)$ строго зростає на $[0, +\infty)$. Для цього досить вибрати замість функції $v(t)$ функцію $v_1(t) = v(t) + \ln(1 + t^2)$. Зрозуміло, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{v_1(t)}{t^2} dt < +\infty,$$

і $v_1(t) \geq v(t)$ $(t \geq 0)$, та якщо

$$v_1(t) = o(\psi^{-1}(t)) \ (t \to +\infty),$$

то й

$$v(t) = o(\psi^{-1}(t)) \ (t \to +\infty).$$

Припускаючи, що функція $v(t)$ — строго зростаюча, виберемо функцію

$$V(t) = \int_0^{et} \frac{v(x)}{x} dx \ (t \geq 0).$$

Зауважимо, що $V(0) = 0$ і

$$V(t) \geq \int_t^{et} \frac{v(x)}{x} dx \geq v(t) \ (t \geq 0), \tag{6}$$

а також, що з умови (5) і монотонності v випливає, що

$$\frac{v(t)}{t} \to 0 \ (t \to +\infty),$$

і тому

$$\frac{V(t)}{t} \to 0 \ (t \to +\infty).$$

Звідси

$$\int_0^{+\infty} \frac{v(et)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} dV(t) = \frac{V(t)}{t}\Big|_0^{+\infty} + \\ + \int_0^{+\infty} \frac{V(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{V(t)}{t^2} dt.$$

Тобто з умови (5) випливає, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{V(t)}{t^2} dt < +\infty.$$

З огляду на (6) залишається вибрати неперервну додатну зростаючу до $+\infty$ функцію ψ, для якої виконуються умови

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$
$$V(t) = o(\psi^{-1}(t)) \ (t \to +\infty).$$

Нехай

$$l(t) = \int_t^{+\infty} \frac{V(x)}{x^2} dx,$$
$$C(t) = (l(t))^{-\frac{1}{2}} \ (t \geq 0).$$

Виберемо тепер таку додатну неперервну зростаючу на $[0, +\infty)$ функцію ψ, що обернена до неї

$$\psi^{-1}(t) = \begin{cases} C(t)V(t), & t \geq 2, \\ C(2)V(2)(t-1), & t \in [1; 2]. \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція ψ^{-1} — неперервна і строго зростаюча на $[1, +\infty)$, тому такою ж є на $[0, +\infty)$ функція ψ, при цьому $\psi(0) = 1$, бо $\psi^{-1}(1) = 0$.

Зауважимо тепер, що

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{C(2)V(2)(t-1)}{t^2} dt + \\ + \int_2^{+\infty} \frac{C(t)V(t)}{t^2} dt = C(2)V(2)\Big(\ln 2 - \frac{1}{2}\Big) - \\ - \int_2^{+\infty} \frac{dl(t)}{\sqrt{l(t)}} = C(2)V(2)\Big(\ln 2 - \frac{1}{2}\Big) + \\ + 2\sqrt{l(2)} < +\infty,$$

а, оскільки,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt \geq \frac{\psi^{-1}(A)}{A},$$

то $\psi^{-1}(t) = o(t)$ $(t \to +\infty)$. Тому, інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt = \frac{\psi^{-1}(t)}{t}\Big|_1^{+\infty} + \\ + \int_1^{+\infty} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)},$$

тобто функція ψ задовольняє всі потрібні умови, позаяк, за вибором, при $t \to +\infty$

$$v(t) \leq V(t) \leq \frac{1}{C(t)} \psi^{-1}(t) = o(\psi^{-1}(t)).$$

Лему доведено.

Доведення теореми 1. Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $F(0) = 1$. Справді, зважаючи на те, що $F(0) \neq 0$, у випадку $F(0) \neq 1$ досить розглянути функцію

$$F_1(\sigma) = F(\sigma)/F(0), \ F_1(0) = 1.$$

Оскільки

$$\mu_*(\sigma, F) = F(0)\mu_*(\sigma, F_1)$$

і $h \in L_0^+$, то в конусі зростання співвідношення (4) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$F_1(\sigma) \leq o(\mu_*(\sigma, F_1) h^{-1}(\ln \mu_*(\sigma, F_1))).$$

Для кожного фіксованого $\sigma_0 \in \mathbb{R}^p_+, |\sigma_0| = 1$, визначимо функцію

$$g(t) = g_{\sigma_0}(t) = \ln F(t\sigma_0),\ t \in \mathbb{R}_+.$$

За лемою 1, застосованою до функції

$$v(t) = \begin{cases} h(\nu_0(0,t]) - h(\nu_0(0,t_0]), & t \geq t_0; \\ h(\nu_0(0,t_0]), & t \in [0,t_0], \end{cases}$$

де t_0 таке, що $h(\nu_0(0,t_0]) > 0$, отримуємо, що

$$\exists \psi \in L^+_1 \colon h(\nu_0(0,t]) = o(\psi^{-1}(t))\ (t \to +\infty).$$

Зауважимо тепер, що з умови (3) і того, що $h(t) \geq \ln t$ $(t \to +\infty)$ випливає, що виконується умова

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(0,t]}{t} < +\infty, \tag{7}$$

Тому, ввівши як і в доведенні теореми 1 ([8]), для фіксованого $\sigma_0 \in K$ множину

$$E(\sigma_0) = \Big\{\sigma = t\sigma_0 \colon t > 0, \frac{2}{y^*} g'_{\sigma_0}(t) > \\ > \psi\Big(\frac{g_{\sigma_0}(t)}{2}\Big)\Big\}$$

і

$$E = \bigcup_{\sigma_0 \in S_1} E(\sigma_0),$$

де $S_1 = \{\sigma \in \mathbb{R}^p_+ \colon |\sigma| = 1\}$, за теоремою 1 з [8] отримаємо, що

$$\tau_p(E \cap K) < +\infty$$

і

$$\ln F(\sigma) \leq (1 + o(1)) \ln \mu_*(\sigma, F)$$

при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \backslash E)$. Зокрема, при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \backslash E)$

$$\frac{1}{2} \ln F(\sigma) \leq \ln \mu_*(\sigma, F)\ (|\sigma| \geq c_0). \tag{8}$$

З доведення цієї ж теореми 1 з [8], для кожного фіксованого $\sigma_0 \in \mathbb{R}^p_+$ $(|\sigma_0| = 1)$ і для всіх $t > 0$ маємо

$$F(t\sigma_0) \leq 2\mu_*(t\sigma_0, F)\nu_0\Big(0, \frac{2g'(t)}{y^*}\Big],$$

крім того, при $t \to +\infty$

$$\inf\{g'_{\sigma_0}(t) \colon \sigma_0 \in S_1 \cap K\} \to +\infty. \tag{9}$$

Тоді при $|\sigma| \to +\infty$, $\sigma = t\sigma_0$, $\sigma \in K$, завдяки (9) і умові $h \in L^+_0$ отримуємо

$$F(\sigma) \leq 2\mu_*(\sigma, F)\nu_0\Big(0, \frac{2g'(t)}{y^*}\Big] \leq \\ \leq 2\mu_*(\sigma, F) h^{-1}\Big(o\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{2g'(t)}{y^*}\Big)\Big)\Big) = \\ = \mu_*(\sigma, F) o\Big(h^{-1}\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{2g'(t)}{y^*}\Big)\Big)\Big).$$

Звідки при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \backslash E)$ одержуємо

$$F(\sigma) \leq \mu_*(\sigma, F) \cdot \\ \cdot o\Big(h^{-1}\Big(\psi^{-1}\Big(\psi\Big(\frac{\ln F(\sigma)}{2}\Big)\Big)\Big)\Big) \leq \\ \leq \mu_*(\sigma, F) o\Big(h^{-1}\Big(\frac{\ln F(\sigma)}{2}\Big)\Big),$$

а отже, за нерівністю (8), при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \backslash E)$ остаточно отримуємо

$$F(\sigma) \leq \mu_*(\sigma, F) o\Big(h^{-1}\Big(\frac{\ln F(\sigma)}{2}\Big)\Big) \leq \\ \leq o(\mu_*(x, F) h^{-1}(\ln \mu_*(\sigma, F))).$$

Теорему 1 доведено.

Умову (3) теореми 1 в класі $\mathcal{I}^p(\nu)$ послабити, взагалі кажучи, не можна. Сформулюємо спочатку наслідок у випадку $h(t) = t^q$, $q \in (0, +\infty)$.

Наслідок 1. *Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Якщо виконується умова*

$$(\exists\ q > 0) \colon \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(\nu_0(0,t])^q}{t^2} dt < +\infty, \tag{10}$$

то співвідношення

$$F(\sigma) \leq o\big(\mu_*(\sigma, F) \ln^{1/q} \mu_*(\sigma, F)\big) \tag{11}$$

виконується при $|\sigma| \to +\infty$, $\sigma \in K \backslash E$ для кожного конуса K в $\mathbb{R}^p_+$ з вершиною в початку координат O, такого, що $\overline{K} \backslash \{O\} \subseteq \mathbb{R}^p_+$, причому для множини E виконується

$$\tau_p(E \cap K) < +\infty.$$

Справді, вище вже зазначалось, що для додатної неспадної на $[0,+\infty)$ функції ψ

$$\int^{+\infty}\frac{d\psi(t)}{t}<+\infty \Longleftrightarrow \int^{+\infty}\frac{\psi(t)}{t^2}dt<+\infty.$$

Наступна теорема, вказує на те, що оцінку (11) (в загальному) і саме твердження наслідку 2 в класі $\mathcal{I}^p(\nu)$ істотно покращити не можна.

Теорема 2. *Для кожного $q>0$ існують міра ν, для якої виконується умова* (10) *і для кожного $\eta>0$*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{(\nu_0(0,t])^{q+\eta}}{t^2}dt=+\infty,$$

та функція $F\in\mathcal{I}^p(\nu)$, такі, що для кожного $\varepsilon>0$ і для кожного конуса $K\subseteq\mathbb{R}^p_+$ з вершиною в початку координат O, такого, що $\overline{K}\backslash\{O\}\subseteq\mathbb{R}^p_+$, виконується

$$\frac{F(\sigma)}{\mu_*(\sigma,F)(\ln\mu_*(\sigma,F))^{1/q-\varepsilon}}\to+\infty$$

при $|\sigma|\to+\infty$ $(\sigma\in K)$.

Доведення. Нехай $\lambda_0=0,\ n_0=0,$

$$\lambda_k=e^k,\ n_k=\left(\frac{e^k}{k\ln^2(k+1)}\right)^{1/q}\ (k\geq1).$$

Розглянемо цілий ряд Діріхле

$$f(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\{-\lambda_k\ln\lambda_k+z\lambda_k\}.$$

Оскільки при $1\leq k\uparrow+\infty$

$$\varkappa_k\stackrel{def}{=}\frac{\lambda_k\ln\lambda_k-\lambda_{k-1}\ln\lambda_{k-1}}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\uparrow+\infty,$$

то, як добре відомо [3, с.19], у цьому випадку при $x\in[\varkappa_k,\varkappa_{k+1}]$

$$\mu(x,f)=\exp\{-\lambda_k\ln\lambda_k+x\lambda_k\}.$$

Зауважимо тепер, що для $x\in[\varkappa_k,\varkappa_{k+1}]$

$$\frac{e^k}{e-1}\leq\ln\mu(x,f)\leq\Big(1+\frac{1}{e-1}\Big)e^k,$$

а також

$$x-1-\frac{1}{e-1}\leq k\leq x-\frac{1}{e-1}.$$

Виберемо міру ν, зосереджену в точках векторної послідовності $\widehat{\lambda}_k=(\lambda_k,\ldots,\lambda_k)\in\mathbb{R}^p_+$ $(k\geq1)$ і таку, що

$$\nu(\{\widehat{\lambda}_k\})=n_k.$$

для кожного фіксованого $k\geq1$

Безпосередніми обчисленнями перевіряється виконання умови (10). Справді,

$$\int\limits_{\lambda_1}^{+\infty}\frac{d(\nu_0(0,t])^q}{t}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Delta_k}{\lambda_k},$$

де

$$\Delta_k=(\nu_0(0,\lambda_k])^q-(\nu_0(0,\lambda_k-0])^q.$$

Зауважуючи, що $\Delta_k\asymp(n_k)^q$, звідси отримуємо, що умова (10) виконується.

Нехай функція $f\colon\mathbb{R}^p_+\to\mathbb{R}_+$ така, що

$$f(\widehat{\lambda}_k)=\exp\{-\lambda_k\ln\lambda_k\}.$$

Розглянемо функцію

$$F(\sigma)=\int\limits_{\mathbb{R}^p_+}f(x)\exp\langle x,\sigma\rangle d\nu(x).$$

Оскільки

$$F(\sigma)=\sum_{k=1}^{+\infty}n_k\cdot f(\widehat{\lambda}_k)e^{\|\sigma\|\lambda_k}$$

і для кожного фіксованого $\sigma\in\mathbb{R}^p_+$

$$n_k\cdot f(\widehat{\lambda}_k)e^{\|\sigma\|\lambda_k}= \\ =\exp\{-(1+o(1))\lambda_k\ln\lambda_k\}\ (k\to+\infty),$$

то зрозуміло, що $F\in\mathcal{I}^p(\nu)$. Далі, для всіх $\sigma\in\mathbb{R}^p_+$

$$\mu_*(\sigma,F)= \\ =\sup\{f(x)\exp\langle x,\sigma\rangle\colon x\in\operatorname{supp}\nu\}= \\ =\sup\{f(\widehat{\lambda}_k)\exp\langle\widehat{\lambda}_k,\sigma\rangle\colon k\geq1\}= \\ =\mu(\|\sigma\|,f).$$

Тому, для всіх $k\geq1$ і всіх $\sigma\in\mathbb{R}^p_+$, таких, що $\|\sigma\|\in[\varkappa_k,\varkappa_{k+1}]$, отримуємо

$$F(\sigma)\geq n_k\cdot\mu(\|\sigma\|,f)\geq d_{p,q}\mu_*(\sigma,F)\times$$

$$\times\left(\frac{\ln\mu_*(\sigma,F)}{\ln\ln\mu_*(\sigma,F)\ln^2\ln\ln\mu_*(\sigma,F)}\right)^{1/q}, \quad (12)$$

де $d_{p,q} > 0$ — деяка стала, залежна лише від p і q. Оскільки, як встановлено вище,

$$\ln\mu_*(\sigma,F)\to+\infty$$

при $|\sigma|\to+\infty$ $(\sigma\in K)$, то з нерівності (12) отримуємо потрібне співвідношення.

Теорему 2 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Valiron G. *Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere* // Ann Fac. Sci. Univ. Toulouse. – 1914. – V. 5. – P. 117–257.

2. Wiman A. *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytishen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorischen Reihe* // Acta Math. – 1914. – V. 37. – P. 305–326.

3. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.

4. *Скасків О.Б.* Про наявність виняткових значень у співвідношенні типу Бореля для цілих рядів Діріхле // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. 30. – С. 53–54.

5. *Орищин О.Г., Скасків О.Б.* Нерівності типу Вімана для кратних рядів Діріхле // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №346. – С. 43–48.

6. *Скасків О.Б., Тракало О.М. Про класичну нерівність Вімана для цілих кратних рядів Діріхле* // Матем. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 44, №3. – С. 34–39.

7. *Орищин О.Г., Скасків О.Б., Тракало О.М. Зауваження про нерівності типу Вімана для кратних рядів Діріхле*// Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1999. – №364. – С. 127–131.

8. Zikrach D.Yu., Skaskiv O.B. *On the best possible description of an exceptional set in asymptotic estimates for Laplace-Stiltjes integrals*// Mat. Stud. – 2011. – V. 35, №2. – P. 131–141.