УДК 517.51

©2013 р. О.О. Карлова, В.В. Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ПРО ПРОДОВЖЕННЯ

З допомогою теорем про продовження берівських функцій досліджується берівська класифікація нарізно неперервних відображень.

Using extension theorems for Baire functions we investigate the Baire classification of separately continuous mappings.

Вступ

Для топологічних просторів X і Y через $C(X,Y)$ ми позначаємо сукупність всіх неперервних відображень між X і Y. Відображення $f : X \to Y$ називається *відображенням першого класу Бера*, якщо існує послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$, така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Сукупність всіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Бера ми позначатимемо через $B_1(X,Y)$. Припустимо, що класи $B_\xi(X,Y)$ вже визначені для всіх ординалів $\xi < \alpha$ для деякого $1 < \alpha < \omega_1$. Тоді відображення $f : X \to Y$ *належить до α-го класу Бера*, $f \in B_\alpha(X,Y)$, якщо існує така послідовність відображень $f_n \in \bigcup\limits_{\xi<\alpha} B_\xi(X,Y)$, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для всіх $x \in X$. Крім того, покладемо $B_0(X,Y) = C(X,Y)$.

Нехай X, Y і Z – топологічні простори і $0 \le \alpha < \omega_1$. Через $CB_\alpha(X\times Y,Z)$ ми позначаємо сукупність всіх відображень $f : X\times Y \to Z$, які неперервні відносно першої змінної і належать до берівського класу α відносно другої змінної.

Набір (X,Y,Z) топологічних просторів X, Y і Z називається *α-трійкою Лебеґа*, якщо має місце включення

$$CB_\alpha(X\times Y,Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X\times Y,Z).$$

Ще А. Лебеґ [1] у 1898 році довів включення $CC(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \subseteq B_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Впродовж наступних років α-трійки активно вивчалися багатьма математиками (див. [2] і вказану там літературу). Серед інших відмітимо результат В. Рудіна [3], який встановив, що набір (X,Y,Z) є α-трійкою Лебеґа для кожного ординала $0 \le \alpha < \omega_1$, якщо X – метризовний простір, Y – топологічний простір, а Z – локально опуклий простір.

Добре відомо, що топологічний простір, який є об'єднанням двох чи більшої кількості метризовних підпросторів, не обов'язково метризовний. Тому природно виникає наступне питання.

Питання 1. *Нехай $0 \le \alpha < \omega_1$. Чи буде утворювати α-трійку Лебеґа набір топологічних просторів (X,Y,Z), якщо $X = \bigcup\limits_{n=1}^{N} X_n$, де $2 \le N \le +\infty$, і (X_n,Y,Z) є α-трійкою для кожного n?*

Нагадаємо, що топологічний простір називається σ-метризовним, якщо його можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності замкнених метризовних підпросторів. В. Маслюченко і О. Собчук [4] довели, що набір $(X,Y,\mathbb{R})$ є α-трійкою Лебеґа, якщо X – σ-метризовний простір, Y – топологічний простір і добуток $X\times Y$ досконало нормальний. А. Каланча, В. Маслюченко і В. Михайлюк [5] встановили, що (X,Y,Z) є α-трійкою Лебеґа у випадку, коли X – ідеально σ-метризовний простір, Y – локально компактний метризовний простір і Z – локально опуклий простір. Слід зазначити, що у цих результатах істотно застосовуються класичні теорема Тітце-Урисона і теорема Дуґунджі про продовження неперервних відображень.

У цій статті ми даємо позитивну відповідь на питання 1 для інших класів просторів X, Y і Z, ніж у [4] і [5], використовуючи теореми про продовження берівських функцій класу $\alpha \geq 1$. Крім того, ми наводимо приклади просторів X, Y і Z, для яких відповідь на питання 1 негативна.

1. Продовження берівських функцій

Через $\mathcal{G}_0^*$ і $\mathcal{F}_0^*$ позначимо сукупності всіх функціонально відкритих і функціонально замкнених підмножин топологічного простору X відповідно. Припустимо, що класи $\mathcal{G}_\xi^*$ і $\mathcal{F}_\xi^*$ визначені для всіх $\xi < \alpha$, де $0 < \alpha < \omega_1$. Тоді, якщо α непарне, то клас $\mathcal{G}_\alpha^*$ /$\mathcal{F}_\alpha^*$/ складається з усіх зліченних перетинів /об'єднань/ множин з нижчих класів, а якщо α парне, то клас $\mathcal{G}_\alpha^*$ /$\mathcal{F}_\alpha^*$/ складається з усіх зліченних об'єднань /перетинів/ множин з нижчих класів. Класи $\mathcal{F}_\alpha^*$ для непарних α і $\mathcal{G}_\alpha^*$ для парних α називаються *функціонально адитивними*, а класи $\mathcal{F}_\alpha^*$ для парних α і $\mathcal{G}_\alpha^*$ для непарних α називаються *функціонально мультиплікативними.* Якщо множина належить одночасно до функціонально адитивного і функціонально мультиплікативного класу α, то вона називається *функціонально двосторонньою множиною класу α*. Зауважимо також, що $A \in \mathcal{F}_\alpha^*$ тоді і тільки тоді, коли $X \setminus A \in \mathcal{G}_\alpha^*$.

Ми кажемо, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y належить до класу $K_\alpha(X,Y)$ при $0 < \alpha < \omega_1$, якщо прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої в Y множини V є множиною функціонально адитивного класу α в X.

Нехай $0 \leq \alpha < \omega_1$. Підмножина E топологічного простору X називається *α-вкладеною в X*, якщо для довільної множини A функціонально адитивного (мультиплікативного) класу α в E існує множина B функціонально адитивного (мультиплікативного) класу α в X, така, що $A = B \cap E$.

Якщо $0 < \alpha < \omega_1$, то підмножини A і B топологічного простору X називаються *α-відокремними*, якщо існує така функція $f \in K_\alpha(X)$, що $A \subseteq f^{-1}(0)$ і $B \subseteq f^{-1}(1)$.

Ми кажемо, що набір (X,E,Y), який складається з топологічного простору X, його підпростору E і топологічного простору Y, *має властивість B_α*-продовження, якщо кожне відображення $f \in B_\alpha(E,Y)$ можна продовжити до відображення $g \in B_\alpha(X,Y)$.

Теорема 1. *Нехай $\alpha > 0$ – скінченний ординал, X – топологічний простір, $E \subseteq X$ і Y – повнометризовний сепарабельний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

1. *E – α-вкладена в X і для довільної множини A функціонально мультиплікативного класу α в X, такої, що $E \cap A = \emptyset$, множини E і A є α-відокремними;*
2. *(X,E,Y) має властивість B_α-продовження.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що для скінченних ординалів α має місце рівність $B_\alpha(X,Y) = K_\alpha(X,Y)$ для довільного топологічного простору X і метризовного сепарабельного лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного простору Y (див. [8, Lemma 2.4] і [10, Теорема 1]). Тому умова (ii) еквівалентна тому, що набір (X,E,Y) має властивість K_α-продовження, а це рівносильне умові (i) теореми.

Наслідок 1. *Нехай $\alpha \geq 1$ – скінченний ординал, X – цілком регулярний простір, $E \subseteq X$ – множина функціонально мультиплікативного класу α і Y – повнометризовний сепарабельний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір. Якщо виконується одна з наступних умов*

1. *X – досконало нормальний;*
2. *E – ліндельофовий;*
3. *X – нормальний, E – функціонального типу F_σ,*

то (X,E,Y) має властивість B_α-продовження.

Доведення. Зауважимо спочатку, що якщо A – множина функціонально мультиплікативного класу α в X, така, що $E \cap A = \emptyset$, то існує функція $f \in K_\alpha(X)$, така, що $A = f^{-1}(0)$ і $B = f^{-1}(1)$ (див. [?, Proposition 3.2]), тобто множини E і A є α-відокремними.

Крім того, у кожному з випадків (i)–(iii) множина E є α-вкладеною в X.

Таким чином, за теоремою 1 набір (X, E, Y) має властивість B_α-продовження.

Слід зазначити, що в деяких випадках умови на простір Y можна послабити до стягуванності. Правда, при цьому доводиться накладати більш жорсткі умови на підмножину E простору X.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *стягуванним*, якщо існують неперервне відображення $\gamma : X \times [0,1] \to X$ і точка $x_0 \in X$, такі, що $\gamma(x, 0) = x$ і $\gamma(x, 1) = x_0$ для всіх $x \in X$.

Теорема 2. *Нехай $0 < \alpha < \omega_1$, X – топологічний простір, $G \subseteq X$ – функціонально відкрита множина, Y – стягуванний простір. Тоді (X, G, Y) має властивість B_α-продовження.*

Доведення. Нехай $y_0 \in Y$ і $\gamma : Y \times [0,1] \to Y$ – такі, що $\gamma(y, 0) = y$ і $\gamma(y, 1) = y_0$ для всіх $y \in Y$. Візьмемо відображення $f \in B_\alpha(G, Y)$, покладемо

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in G, \\ y_0, & \text{якщо } x \in X \setminus G, \end{cases}$$

і покажемо, що g є шуканим продовженням відображення f.

Нехай $\varphi : X \to [0,1]$ – така неперервна функція, що $G = \varphi^{-1}((0,1])$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$F_{n,1} = X \setminus G, \ \ F_{n,2} = \varphi^{-1}([\frac{1}{n+1}, 1]),$$

$$U_{n,1} = \varphi^{-1}([0, \frac{1}{n+3})) \ \ U_{n,2} = \varphi^{-1}((\frac{1}{n+2}, 1]).$$

Для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $i = 1, 2$ має місце включення $F_{n,i} \subseteq U_{n,i}$, тому існує така неперервна функція $\psi_{n,i} : X \to [0,1]$, що

$$U_{n,i} = \psi_{n,i}^{-1}((0,1])$$

і

$$F_{n,i} = \psi^{-1}(1).$$

Виберемо послідовність відображень $f_n \in B_{\alpha_n}(G, Y)$, де $\alpha_n < \alpha$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всіх $x \in G$. Для кожного номера n покладемо $f_{n,1}(x) = y_0$ для всіх $x \in X$ і $f_{n,2}(x) = f_n(x)$ для всіх $x \in G$. Визначимо відображення $g_n : X \to Y$ наступним чином: $g_n(x) = \gamma(f_{n,i}(x), 1 - \psi_{n,i}(x))$, якщо $x \in U_{n,i}$ для деякого $i = 1, 2$, і $g_n(x) = y_0$, інакше.

Розглянемо випадок $\alpha = 1$. Тоді $\alpha_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ $g_n(x) = \gamma(f_{n,i}(x), 1 - \psi_{n,i}(x))$ при $i = 1, 2$ і $x \in \overline{U}_{n,i}$. Отже, звуження функції g_n на замкнені множини $\overline{U}_{n,1}$ і $\overline{U}_{n,2}$ і $X \setminus (U_{n,1} \cup U_{n,2})$ є неперервними. Тому всі функції g_n неперервні.

Нехай $\alpha > 1$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\alpha_n \geq 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ множини $U_{n,1}$ і $U_{n,2}$ та $X \setminus (U_{n,1} \cup U_{n,2})$ є функціонально двосторонніми класу α_n і функція g_n є функцією класу α_n.

Зафіксуємо $x \in X$ і доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$.

Якщо $x \in X \setminus G$, то $x \in U_{n,1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$g_n(x) = \gamma(f_{n,1}(x), 0) = f_{n,1}(x) = y_0 = g(x)$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Якщо $x \in G$, то існує таке n_0, що $x \in F_{n,2} \subseteq U_{n,2}$ для всіх $n \geq n_0$. Тоді

$$g_n(x) = \gamma(f_{n,2}, 0) = f_{n,2}(x),$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = g(x).$$

Отже, $g \in B_\alpha(X, Y)$ і $g|_G = f$.

Теорема 3. *Нехай $0 \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$, X – топологічний простір, Y – стягуванний простір, $E \subseteq X$ – множина функціонально мультиплікативного класу α і (X, E, Y) має властивість B_α-продовження.*

Тоді довільне відображення $f \in B_\beta(E, Y)$, яке є поточковою границею на E послідовності відображень $f_n \in B_{<\beta}(E, Y)$ можна продовжити до відображення $g \in B_\beta(X, Y)$, яке є поточковою границею на X послідовності відображень $g_n \in B_{<\beta}(X, Y)$ так, щоб $f_n = g_n|_E$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $y_0 \in Y$ і $\gamma : Y \times [0,1] \to Y$ – такі, що $\gamma(y, 0) = y$ і $\gamma(y, 1) = y_0$ для всіх $y \in Y$.

Оскільки множина $X \setminus E$ належить до функціонально адитивного класу α, то існує така зростаюча послідовність множин A_n функціонально мультиплікативних класів $\alpha_n < \alpha$, що $X \setminus E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. З [8, Lemma 2.1] випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує функція $\varphi_n \in B_\alpha(X, [0,1])$, така, що

$$A_n = \varphi_n^{-1}(1)$$

і

$$E = \varphi_n^{-1}(0).$$

Міркуватимемо індукцією по $\beta > \alpha$. При $\beta = \alpha$ твердження очевидне. Нехай $\beta = \alpha+1$ і $f_n \in B_{\beta_n}(E, Y)$, де $\beta_n < \beta$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\beta_n \leq \alpha$, то $f_n \in B_\alpha(E, Y)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Для кожного номера n виберемо відображення $h_n \in B_\alpha(X, Y)$, яке є продовженням f_n. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $x \in X$ покладемо

$$g_n(x) = \gamma(h_n(x), \varphi_n(x)). \tag{1}$$

Тоді $g_n \in B_\alpha(X, Y)$. Для всіх $x \in X$ розглянемо відображення

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ y_0, & x \in X \setminus E, \end{cases} \tag{2}$$

і покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$. Справді, зафіксуємо $x \in X$. Якщо $x \in E$, то $\varphi_n(x) = 0$ для кожного номера n. Тоді

$$g_n(x) = h_n(x) = f_n(x),$$

звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$. Якщо ж $x \notin E$, то існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що $x \in A_n$ для всіх $n \geq n_0$. Тоді $\varphi_n(x) = 1$ і $g_n(x) = y_0$ для всіх $n \geq n_0$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ для всіх $x \in X$. Отже, $g \in B_\beta(X, Y)$, причому $g|_E = f$ і $g_n|_E = f_n$.

Припустимо, що твердження теореми вірне для всіх ординалів $\alpha \leq \xi < \beta$ і доведемо його для β. Без обмеження загальності можна вважати, що $f_n \in B_{\beta_n}(E, Y)$, де $\alpha \leq \beta_n < \beta$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. З індуктивного припущення випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує відображення $h_n \in B_{\beta_n}(X, Y)$, яке є продовженням відображення f_n. Нескладно переконатися, що для кожного номера n відображення $g_n : X \to Y$, яке визначається формулою (1), належить до класу B_{β_n} і $g_n|_E = f_n$. Крім того, аналогічно, як вище, перевіряється, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ для кожного $x \in X$ і $g|_E = f$, де $g : X \to Y$ – відображення, яке визначається формулою (2). Отже, теорема вірна для всіх ординалів $\beta \geq \alpha$.

З теореми 3 негайно випливає наступний факт.

Наслідок 2. *Нехай $0 \leq \alpha < \beta < \omega_1$, X – топологічний простір, Y – стягуванний простір і $E \subseteq X$. Якщо (X, E, Y) має властивість B_α-продовження і E – множина функціонально мультиплікативного класу α в X, то (X, E, Y) має властивість B_β-продовження.*

2. Застосування теорем про продовження до берівської класифікації

Теорема 4. *Нехай $0 \leq \alpha < \omega_1$, X – топологічний простір, Y – стягуванний простір, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і $f : X \to Y$, причому*

a. *$X_n \subseteq X_{n+1}$;*

b. *X_n – функціонально мультиплікативного класу α в X_{n+1};*

c. *(X, X_n, Y) має властивість B_α-продовження;*

d. *$f|_{X_n} \in B_{\alpha+1}(X_n, Y)$*

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді $f \in B_{\alpha+1}(X, Y)$.

Доведення. Позначимо $f_n = f|_{X_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $f_1 \in B_{\alpha+1}(X_1, Y)$, то існує послідовність відображень $g_{1,k} \in B_\alpha(X_1, Y)$, така, що $\lim\limits_{k\to\infty} g_{1,k}(x) = f_1(x)$ на X_1. Зрозуміло, що $f_2|_{X_1} = f_1$. Зауважимо, що з властивостей (a) і (c) випливає, що набір (X_2, X_1, Z) має властивість B_α-продовження. Застосувавши теорему 3, ми одержимо, що існує послідовність $(g_{2,k})_{k=1}^{\infty}$ відображень $g_{2,k} \in B_\alpha(X_2, Y)$, така, що $g_{2,k}|_{X_1} = g_{1,k}$ і $\lim\limits_{k\to\infty} g_{2,k}(x) = f_2(x)$ для всіх $x \in X_2$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо послідовність $(g_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ відображень $g_{n,k} \in B_\alpha(X_n, Y)$, таку, що

$$g_{n+1,k}|_{X_n} = g_{n,k}, \text{ і}$$

$$\lim_{k\to\infty} g_{n,k}(x) = f_n(x) \quad \text{на } X_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Згідно з властивістю (c), для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує відображення $g_n \in B_\alpha(X,Y)$, таке, що

$$g_n|_{X_n} = g_{n,n}.$$

Залишилось довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ на X. Справді, нехай $x \in X$. Візьмемо таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що $x \in X_n$ для всіх $n \geq n_0$. Тоді

$$g_n(x) = g_{n,n}(x) = g_{n_0,n}(x)$$

для всіх $n \geq n_0$, звідки

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_{n_0,n}(x) = f_{n_0}(x) = f(x).$$

Таким чином, $f \in B_{\alpha+1}(X,Y)$.

Теорема 5. *Нехай $0 \leq \alpha < \omega_1$, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і Y – топологічні простори, Z – стягуванний простір, причому для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконуються наступні умови:*

1. *(X_n, Y, Z) – α-трійка Лебеґа;*
2. *$X_n \subseteq X_{n+1}$;*
3. *X_n – множина функціонально мультиплікативного класу α в X_{n+1};*
4. *$(X\times Y, X_n\times Y, Z)$ має властивість B_α-продовження.*

Тоді (X,Y,Z) – α-трійка Лебеґа.

Доведення. Нехай $f \in CB_\alpha(X\times Y, Z)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $E_n = X_n \times Y$ і $f_n = f|_{E_n}$. З умови (i) теореми випливає, що $f_n \in B_{\alpha+1}(E_n, Z)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що E_n – множина функціонально мультиплікативного класу в E_{n+1} для кожного $n \in \mathbb{N}$. Застосувавши теорему 4, ми одержимо, що $f \in B_{\alpha+1}(X\times Y, Z)$.

Наслідок 3. *Нехай $1 \leq \alpha < \omega_0$, $\alpha \leq \beta < \omega_1$, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ – цілком регулярний простір, Y – топологічний простір і Z – повнометризовний сепарабельний стягуванний локально зв'язний простір, причому для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконуються наступні умови:*

1. *(X_n, Y, Z) – β-трійка Лебеґа;*
2. *X_n – множина функціонально мультиплікативного класу α в X_{n+1};*
3. *$X_n \times Y$ – ліндельофовий або $X\times Y$ – досконало нормальний.*

Тоді (X,Y,Z) є β-трійкою Лебеґа.

Доведення. Зауважимо спочатку, що з властивості (iii) випливає, що добуток $X\times Y$ цілком регулярний. Тоді $(X\times Y, X_n\times Y, Z)$ має властивість B_α-продовження згідно з наслідком 1 для кожного $n \in \mathbb{N}$, адже множина $X_n \times Y$ належить до функціонально мультиплікативного класу α в $X\times Y$, а простір Z є локально лінійно зв'язним згідно з [7, с. 259]. Застосувавши наслідок 2, ми одержимо, що $(X\times Y, X_n\times Y, Z)$ має властивість B_β-продовження для кожного $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, з теореми 5 випливає, що (X,Y,Z) є β-трійкою Лебеґа.

Як показує наступне твердження, з умови (iv) теореми 5 випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ набір (X, X_n, Z) має властивість B_α-продовження.

Твердження 1. *Нехай $0 \leq \alpha < \omega_1$, X, Y і Z – топологічні простори, $E \subseteq X$, причому набір $(X\times Y, E\times Y, Z)$ має властивість B_α-продовження. Тоді (X,E,Z) має властивість B_α-продовження.*

Доведення. Нехай $f \in B_\alpha(E,Z)$. Для всіх $x \in E$ і $y \in Y$ покладемо $g(x,y) = f(x)$. Зрозуміло, що $g \in B_\alpha(E\times Y, Z)$. Тоді існує відображення $\tilde{g} \in B_\alpha(X\times Y, Z)$, яке є продовженням відображення g. Виберемо довільне $y \in Y$ і для всіх $x \in X$ покладемо $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x,y)$. Тоді $\tilde{f} \in B_\alpha(X,Z)$, причому $\tilde{f}|_E = f$.

Але обернене твердження до твердження 1 не вірне.

Приклад 2. *Існують гаусдорфові компактні простори X та Y і множина $E \subseteq X$, такі, що кожну неперервну функцію $f: E \to [0,1]$ можна продовжити до неперервної функції $\tilde{f}: X \to [0,1]$, але для деякої неперервної функції $g: E\times Y \to [0,1]$ не існує функції першого класу Бера $\tilde{g}: X\times Y \to [0,1]$, такої, що $\tilde{g}(x,y) = g(x,y)$ для довільних $(x,y) \in E\times Y$.*

Доведення. Нехай E – довільний незліченний дискретний простір, $X = \beta E$ – компактифікація Стоуна-Чеха простору E і $Y = \alpha E = \{\infty\} \cup E$ – компактифікація Александрова простору E. Згідно з [9], кожну неперервну функцію $f : E \to [0,1]$ можна продовжити до неперервної функції $\tilde{f} : X \to [0,1]$.

Розглянемо функцію $g : E \times Y \to [0,1]$, $g(x,y) = 0$, якщо $x \neq y$, і $g(x,y) = 1$, якщо $x = y$. Легко бачити, що функція g неперервна. Припустимо, що існує функція першого класу Бера $\tilde{g} : X \times Y \to [0,1]$ така, що $\tilde{g}(x,y) = g(x,y)$ для довільних $(x,y) \in E \times Y$. Нехай $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність неперервних функцій $g_n : X \times Y \to [0,1]$, яка поточково на $X \times Y$ збігається до функції $\tilde{g}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$, використовуючи компактність простору X, виберемо окіл V_n точки ∞ в просторі Y такий, що

$$|g_n(x,\infty) - g_n(x,y)| < \frac{1}{n}$$

для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Оскільки всі множини $Y \setminus V_n$ скінченні, а множина E незліченна, то множина $B = E \cap \left(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n \right)$ непорожня.

Нехай $y_0 \in B$. Зауважимо, що

$$|g_n(y_0,\infty) - g_n(y_0,y_0)| < \frac{1}{n}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тепер маємо

$$1 = g(y_0,y_0) = \tilde{g}(y_0,y_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(y_0,y_0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} g_n(y_0,\infty) = \tilde{g}(y_0,\infty) = g(y_0,\infty) = 0,$$

що дає суперечність.

3. Приклади не лебеґівських трійок

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x,y) \in X \times Y$ ми використовуємо позначення

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x,y).$$

Для множини $A \subseteq X$ через χ_A ми позначаємо характеристичну функцію множини A.

Нагадаємо, що з теореми Рудіна випливає, що для довільного метризовного простору X набір $(X,Y,\mathbb{R})$ є трійкою Лебеґа для довільних топологічного простору Y і ординала $0 \leq \alpha < \omega_1$.

Приклад 3. *Існує компактний гаусдорфовий простір X, такий, що $X = X_1 \cup X_2$, де простори X_1 і X_2 метризовні, але*

$$CC(X^2,\mathbb{R}) \not\subseteq B_1(X^2,\mathbb{R}).$$

Доведення. Зафіксуємо $0 \leq \alpha < \omega_1$. Нехай $X = D \cup \{\infty\}$ – компактифікація Александрова незліченного дискретного простору D. Покладемо $X_1 = D$, $X_2 = \{\infty\}$. Тоді за теоремою Рудіна [3] набір $(X_i, Y, \mathbb{R})$ є α-трійкою Лебеґа для довільного топологічного простору Y при $i = 1,2$, адже простори X_1 і X_2 метризовні.

Розглянемо функцію $f : X^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = y \in D, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тоді $f \in CC(X \times X, \mathbb{R})$. Справді, якщо $x \in D$, то $f^x = \chi_{\{x\}}$. Зауважимо, що функція $\chi_{\{x\}} : X \to \mathbb{R}$ неперервна, адже множина $\{x\}$ відкрито-замкнена в X. Якщо ж $x = \infty$, то $f^x \equiv 0$.

Припустимо, що $f \in B_1(X^2,\mathbb{R})$. Тоді прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини в $\mathbb{R}$ є типу F_σ в X^2. Таким чином, множина $f^{-1}(1) = \{(x,x) : x \in D\}$ є типу F_σ в X^2. Оскільки X^2 – компактний простір, то множина $f^{-1}(1)$ є σ-компактною. З іншого боку, підпростір $\{(x,x) : x \in D\}$ дискретний в X^2, звідки випливає суперечність, адже довільний дискретний σ-компактний простір є не більше, ніж зліченним.

Нагадаємо, що топологічний простір називається *σ-дискретним*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених дискретних підпросторів. Очевидно, кожний σ-дискретний простір є σ-метризовним.

Приклад 4. *Існують цілком регулярний σ-дискретний простір X і топологічний простір Y, такі, що*

$$CC(X \times Y,\mathbb{R}) \not\subseteq B_1(X \times Y,\mathbb{R}).$$

Доведення. Згідно з [11, Theorem 3.3] існує цілком регулярний несепарабельний простір $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$, де $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – зростаюча послідовність замкнених дискретних підпросторів X_n, з властивістю зліченності ланцюжків. Тоді для кожного $0 \le \alpha < \omega_1$ і для довільного топологічного простору Y набір $(X_n, Y, \mathbb{R})$ є α-трійкою Лебеґа, $n \in \mathbb{N}$. Але існує топологічний простір Y, такий, що $CC(X \times Y, \mathbb{R}) \not\subseteq B_1(X \times Y, \mathbb{R})$, оскільки будь-який цілком регулярний простір X з умовою зліченності ланцюжків, такий, що $(X, Y, \mathbb{R})$ є 0-трійкою Лебеґа для довільного топологічного простору Y, є сепарабельним, як було показано в [12].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. H. Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. Sci. Math. **22** (1898), 278–287.
2. Karlova O., Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V., *Equiconnected spaces and Baire classification of separately continuous functions and their analogs*, Cent. Eur. J. Math., 2012, 10(3), 1042-1053.
3. W. Rudin, *Lebesgue first theorem*, Math. Analysis and Applications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies **78**, Academic Press (1981), 741–747.
4. *Маслюченко В.К., Собчук О.В.* Берівська класифікація і σ-метризовні простори // Мат. студії. – 1994. – **3**. – С. 95 - 101.
5. *Каланча А.К., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Застосування теореми Дуґунджі до питань берівської класифікації векторнозначних відображень // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, №4. – С. 12 - 17.
6. *Карлова О.* Берівська та лебеґівська класифікації векторнозначних і многозначних відображень, Дис...канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Чернівці, 2006. – 137 с.
7. *Куратовский К.* Топология. – Т.2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
8. Karlova O. *Classification of separately continuous functions with values in σ-metrizable spaces*, Applied General Topology, 13(2), 2012, 167-178.
9. *Р. Энгелькинг.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 790 с.
10. *Карлова О.О., Михайлюк В.В.* Функції першого класу Бера зі значеннями в метризовних просторах // Укр. мат. журн. – 2006. – т. 58, №4. – С. 567–571.
11. Mykhaylyuk V. *Lebesgue measurability of separately continuous functions and separability*, International Journal of Mathematics and Math.Sciences, 2007, 4 p.
12. Burke M. *Borel measurability of separately continuos functions II*, Top. Appl. **134**(3) (2003), 159–188.