УДК 123.456

©2013 р. О.В. Карпенко

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ КОЛИВНІСТЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ВІДПОВІДНИХ ЇМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Встановлено умови коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, якщо розв'язки їх різницевих аналонів є коливними.

We establish conditions for oscillations of the solutions of linear second order differential equations provided that the solutions of the corresponding difference equations oscillate.

Вступ

Дана робота присвячена вивченню зв'язку між якісними властивостями розв'язків диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь, коли крок h різницевого рівняння прямує до нуля. А саме, встановлені умови збереження коливних властивостей розв'язків.

Добре відомо, (наприклад, [3, стр.114]), що на скінченних часових інтервалах поведінка розв'язків диференціальних рівнянь мало відрізняється від поведінки відповідних їм розв'язків різницевих рівнянь. Оцінка різниці між ними в вузлових точках пропорційна h – кроку різницевого рівняння. Однак, дана оцінка не гарантує збереження коливності у одного з рівнянь при умові, що таку властивість має інше.

Питанням зв'язку між коливністю розв'язків лінійних різницевих і відповідних їм диференціальних рівнянь другого порядку присвячені роботи [1,10]. Так, в [10] встановлено коливність розв'язків лінійних різницевих рівнянь з достатньо малим кроком h при умові, що таку властивість мають розв'язки відповідного диференціального рівняння. В [1] отримано обернений результат, коли з коливності розв'язків різницевих рівнянь при достатньо малому кроці h випливає коливність розв'язків відповідного диференціального рівняння.

Але в цих роботах вивчається коливність фіксованого розв'язку задачі Коші. При цьому крок h вибирається свій для кожних початкових даних, що не є зручним з точки зору застосувань.

Виникає питання про існування універсального кроку h, який гарантує збереження коливності для всіх розв'язків (для всіх початкових даних).

В роботі [11] встановлено існування універсального кроку h, що гарантує збереження коливності розв'язків різницевих рівнянь при умові, що таку властивість мають розв'язки диференціального рівняння. При цьому крок h можна вибрати єдиним чином для всіх початкових даних.

В даній роботі розв'язана обернена задача. А саме встановлено існування такого кроку h різницевого рівняння (єдиного для всіх розв'язків), що гарантує коливність розв'язку диференціального рівняння, якщо таку властивість має відповідний розв'язок різницевого рівняння.

Відзначимо, що коливні властивості розв'язків різницевих рівнянь вивчалися в роботах багатьох авторів (див, наприклад [4,7,8]).

Для більш загальних рівнянь на часових шкалах поняття узагальненого нуля розв'язку та коливність досліджувались в роботах [2,6].

Робота складається зі вступу та двох частин. В першій частині дана постановка та приведено кілька необхідних в подальшому допоміжних тверджень, які на думку автора мають і самостійний інтерес. Основний результат роботи отримано в другій частині.

1. Постановка задачі та допоміжні твердження

Розглянемо на відрізку $[0,a]$ лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{z}+f(t)\dot{z}+q(t)z=0, \qquad (1)$$

де $f,q\in C([0,a])$ і будемо вивчати коливність його розв'язків на $[0,a]$.

Добре відомо, (див. наприклад [9]), що у випадку гладкості на $[0,a]$ коефіцієнта $f(t)$, рівняння (1) лінійною заміною $z=\varphi(t)x$ приводяться до вигляду

$$\ddot{x}+p(t)x=0, \qquad (2)$$

при цьому нулі розв'язків $z(t)$ рівняння (1) і відповідних їм розв'язків $x(t)$ рівняння (2) співпадають. Тому в подальшому обмежимося вивченням коливності розв'язків рівняння (2). Оскільки при $p(t)\le 0$ всі нетривіальні розв'язки рівняння (2) неколивні на $[0,a]$ ([9, стр.207]), то в подальшому від функції $p(t)$ будемо вимагати виконання наступних умов:

$$p(t)\ge 0,\quad t\in[0,a]; \qquad (3)$$

$$p(t)\quad \text{ліпшицева на [0,a]}. \qquad (4)$$

Поряд з рівнянням (2) розглянемо відповідне йому різницеве рівняння

$$\triangle_k^2 x+h^2p(kh)x(kh)=0. \qquad (5)$$

Тут $h\ge 0$ – крок різницевого рівняння $[0,a]$, $\triangle_k x=x((k+1)h)-x(kh)$, $\triangle_k^2 x=\triangle_k(\triangle_k x)$, $k=0,1,2\ldots.$

В подальшому будемо використовувати позначення $x_k^h=x(kh)$ and $t_k=kh$.

Означення 1. [10] *Скажемо, що розв'язок x_k^h рівняння (5) має в точці t_k зміну знаку, якщо виконується однf з умов:*

1) $x_k^h x_{k+1}^h<0$;

2) $x_k^h=0,\quad x_{k-1}^h x_{k+1}^h<0$.

Означення 2.[10] *Якщо на деякому інтервалі розв'язок x_k^h рівняння (5) має не менше двох змін знаків, то його будемо називати коливним на цьому інтервалі.*

Будемо вивчати умови, при яких із коливності розв'язків різницевого рівняння (5) на $[0,a]$ випливає коливність розв'язків рівняння (2).

Приведемо тепер кілька необхідних в подальшому тверджень.

Розглянемо наступну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=X\left(t,x\right), \qquad (6)$$

$t\ge 0$, $x\in D$, де область $D\subset\mathbb{R}^d$ (можливо замкнута), та відповідну їй систему різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h=x_k^h+hX(t_0+kh,x_k^h), \qquad (7)$$

де $h>0$ – крок , $k=0,1,2,\ldots,$
$x_k^h=x^h(t_0+kh)$, t_0 – фіксоване число.

При цьому через $|.|$ – будемо позначати евклідову норму вектора в $\mathbb{R}^d$, а через $\|\ .\ \|$ – норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Означення 3. *Розв'язки $x(t)$ і x_k^h систем (6) і (7) назвемо відповідними, якщо $x(t_0)=x_0^h=x_0\in D$.*

Очевидно, що розв'язки системи (7) однозначно продовжуються вправо за допомогою початкових даних $x_0^h=x_0$ при $k>0$ до тих пір, поки $x_{k-1}^h\in D$.

Для відповідних розв'язків рівнянь (6) і (7) справедлива оцінка їх близькості у вузлових точках t_0+kh.

Лема 1. *Нехай функція $X(t,x)$ визначена та неперервна за сукупністю змінних у своїй області визначення $t\in[0,a]$, $x\in D$ та задовольняє умови:*

1) існує $M>0$, що $\mid X(t,x)\mid\le M$, $t\in[0,a]$,$x\in D$;

2) існує $L>0$, що для довільних $t_1,t_2\in[0,a]$,$x_1,x_2\in D$:

$$\mid X(t_1,x_1)-X(t_2,x_2)\mid\le L\left(\mid t_1-t_2\mid+\mid x_1-x_2\mid\right).$$

Тоді, якщо відповідні розв'язки систем (6) і (7) визначені на відрізку $[t_0,t_0+T]$, то справедлива оцінка

$$\mid x(t_0+kh)-x_k^h\mid\le C\cdot h, \qquad (8)$$

тут стала C залежить лише від M, L і T.

Доведення. Доведення даної леми отримується легкою модифікацією схеми доведення леми 5.1.2 ([3], стр.114), з урахуванням пропозиції 5.2.2.

Наступна лема стосується лінійних систем типу (6) і (7), а саме систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{9}$$

і

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hA(t_0 + kh)x_k^h. \tag{10}$$

Якщо матриця $A(t)$ неперервна при $t \geq 0$, то всі розв'язки систем (9) і (10) необмежено продовжувані вправо. Будемо розглядати їх розв'язки з початковими даними

$$t_0 \in [0, \bar{h}], \quad | x_0 |= 1, \tag{11}$$

тут $\bar{h}$ – фіксоване і таке, що $0 < \bar{h} < a$.

Позначимо $M(T) = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \| A(t) \|$, де $T > 0$ – фіксоване.

Лема 2. *Для всіх розв'язків задач Коші систем (9) і (10) з початковими даними (11) існують додатні сталі R_1 і R_2, залежні лише від T і $M(T)$, що при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $t_0 + kh \in [t_0, t_0 + T]$ справедливі нерівності*

$$| x(t) |\leq R_1, \quad | x_k^h |\leq R_2, \tag{12}$$

причому число R_2 не залежить від h в другій нерівності.

Доведення. Перша з нерівностей (12) є простим наслідком властивостей лінійних систем диференціальних рівнянь. Друга є таким же наслідком аналогічних властивостей систем різницевих рівнянь (див, наприклад [5,стр.35]).

Розглянемо тепер рівняння (5) при $kh \in [0, a]$, яке перепишемо у вигляді системи

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h + hy_k^h, \\ y_{k+1}^h = y_k^h - hp(kh)x_k^h. \end{cases} \tag{13}$$

Будемо вивчати її розв'язки з початковими умовами

$$x_0^h = x_0, \quad y_0^h = y_0, \quad \text{where} \quad x_0^2 + y_0^2 = 1. \tag{14}$$

Тепер коливність розв'язку x_k^h рівняння (5) на $[0, a]$ рівносильна коливності першої компоненти системи (13) на цьому ж відрізку.

Нехай (x_k^h, y_k^h) коливний розв'язок системи (13) на $[0, a]$ з початковими даними (14). Оскільки він коливний, то в силу означення 2, він має на $[0, a]$ принаймі дві зміни знаку його першої компоненти.

Нехай точки t_p і t_m – дві послідовні точки змін знаку x_k^h ($t_p < t_m$). Введемо в розгляд наступну величину

$$M_p^x(h) = \max_{k \in [p+1, m]} | x_k^h | .$$

Дану числову послідовність (скінченну) назвемо послідовністю амплітуд коливань розв'язку x_k^h на $[0, a]$. Відносно цієї послідовності справедлива лема.

Лема 3. *Нехай функція $p(t)$ неперервна на $[0, a]$ і задовольняє умову (3).*

Тоді існує $\triangle(h) > 0$ таке, що для довільного коливного розв'язку системи (13) з початковими даними (14) має місце нерівність

$$M_p^x(h) \geq \triangle(h). \tag{15}$$

Доведення. Нехай (15) не виконується. Тоді існує нескінченна послідовність коливних на $[0, a]$ розв'язків $(x_k^h(n), y_k^h(n))$ системи (13) з початковими даними (x_{0n}, y_{0n}), що задовольняють умову (14) і таких, що для кожного n з послідовності амплітуд цих розв'язків можна вибрати таку амплітуду $M_{p(n)}^{x_n}(h)$, що утворена з цих чисел послідовність $\{M_{p(n)}^{x_n}(h)\}$ задовольняє умову

$$M_{p(n)}^{x_n}(h) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Тут $M_{p(n)}^{x_n}(h) = \max_{k \in [p(n)+1, m]} | x_k^h(n) |$.

Нехай t_n – точка із відрізка $[(p(n) + 1)h, mh]$, в якій даний максимум досягається. Оскільки множина початкових даних (14) компакт, то з послідовності початкових даних (x_{0n}, y_{0n}) можна виділити збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що сама послідовність (x_{0n}, y_{0n}) збіжна.

Отже

$$(x_{0n}, y_{0n}) \to (x_0, y_0), \quad n \to \infty \tag{17}$$

і $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Можна також вважати, що всі $M_{p(n)}^{x_n}(h) > 0$, інакше ми б розглянули розв'язки з протилежними знаками.

Очевидно, існує точка $k_0 h \in (0, a)$, в якій для нескінченної кількості розв'язків з послідовності $(x_k^h(n), y_k^h(n))$ виконується умова

$$x_{k_0}^h(n) = M_{p(n)}^{x_n}(h). \tag{18}$$

Надалі будемо розглядати саме цю підпослідовність розв'язків. Позначимо її $(x_k^h(m), y_k^h(m))$, при цьому їх початкові дані будуть (x_{0m}, y_{0m}).

Розглянемо тепер розв'язок системи (13) $(\bar{x}_k^h, \bar{y}_k^h)$ з початковими даними (x_0, y_0) з умови (17). Очевидно, що він нетривіальний.

З неперервної залежності розв'язків системи (13) від початкових даних та єдиності розв'язку

$$\bar{x}_{k_0}^h = 0, \quad \bar{x}_{k_0-1}^h < 0, \quad \bar{x}_{k_0+1}^h < 0. \tag{19}$$

Відзначимо, що в силу означення 1, точка $k_0 h$ є внутрішньою точкою відрізка $[0, a]$.

Із системи (13) випливають рівності

$$\begin{cases} \bar{x}_{k_0}^h - \bar{x}_{k_0-1}^h = h y_{k_0-1}^h, \\ \bar{y}_{k_0}^h - \bar{y}_{k_0-1}^h = -h p(k_0 h) \bar{x}_{k_0-1}. \end{cases} \tag{20}$$

Із (19) і (20) маємо, що $y_{k_0-1}^h > 0$. Аналогічно маємо $\bar{x}_{k_0+1}^h - \bar{x}_{k_0}^h = h y_{k_0}^h$. Звідки отримуємо $y_{k_0}^h < 0$. Це приводить до протиріччя з другою рівністю (20), оскільки ліва її частина від'ємна, а права невід'ємна.

Лема 3 стверджує, що число $\triangle(h)$ може залежати від h. Наступна лема стверджує, що таке число можна вибрати незалежним від h.

Лема 4. *Нехай функція $p(t)$ задовольняє умови (3) і (4). Тоді існують числа $h_0 > 0$ і $B_0 > 0$ такі, що при всіх $0 < h \leq h_0$ має місце нерівність*

$$\triangle_0(h) \geq B_0. \tag{21}$$

Доведення. Нехай твердження леми не виконане. Тоді існує послідовність кроків $\{h_n\}$, $h_n > 0$, $h_n \to 0$, $n \to \infty$ і при цьому

$$\triangle_0(h_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{22}$$

Тоді з (22) випливає існування для кожного h_n коливного на $[0, a]$ розв'язку $(x_k^{h_n}, y_k^{h_n})$ системи (13) (з даним h_n) із початковими даними (x_{0n}, y_{0n}), що задовольняють умову (14) і який має наступну властивість. Для кожного n з послідовності амплітуд розв'язку $(x_k^{h_n}, y_k^{h_n})$ можна вибрати таку амплітуду $M_{p(n)}^{x_n}(h_n)$, що утворена з чисел послідовність $\{M_{p(n)}^{x_n}(h_n)\}$ задовольняє умову

$$M_{p(n)}^{x_n}(h_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{23}$$

Знову послідовність (x_{0n}, y_{0n}) можна вважати збіжною. Отже

$$(x_{0n}, y_{0n}) \to (x_0, y_0), \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Позначимо через $t_n \in [0, a]$, $t_n = k_n h_n$ – аргумент, при якому амплітуда з властивістю (23) досягається. Маємо

$$x_{k_n}^{h_n} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{25}$$

З послідовності $\{t_n\}$ також можна виділити збіжнк підпослідовність. Знову будемо вважати, що сама $\{t_n\}$ збіжна. Отже, $t_n \to t_0$, $n \to \infty$, $t_0 \in [0, a]$.

Використовуючи лему 2, з послідовності $\{y_{k_n}^{h_n}\}$ також можна виділити збіжну підпослідовність. Знову будемо вважати, що сама $\{y_{k_n}^{h_n}\}$ збіжна. Отже

$$y_{k_n}^{h_n} \to y_0, \quad n \to \infty. \tag{26}$$

З побудови послідовності t_n маємо, що $t_{n-1} = t_n - h_n$, $t_{n+1} = t_n + h_n$. В силу означення 1 точки t_{n-1} і $t_n \in [0, a]$. Звідси випливає, що

$$\lim_{n \to \infty} t_{n-1} = \lim_{n \to \infty} t_n = t_0. \tag{27}$$

З побудови послідовності t_n випливають нерівності

$$x_{k_n-1}^{h_n} \leq x_{k_n}^{h_n}, \quad x_{k_n}^{h_n} \geq x_{k_n+1}^{h_n}. \tag{28}$$

Оскільки $(x_k^{h_n}, y_k^{h_n})$ для кожного h_n є розв'язками системи (13), то маємо рівності

$$\begin{cases} x_{k_n+1}^{h_n} - x_{k_n}^{h_n} = h_n y_{k_n}^{h_n}, \\ y_{k_n+1}^{h_n} - y_{k_n}^{h_n} = -h_n p(k_n h_n) x_{k_n}^{h_n} \end{cases} \tag{29}$$

та

$$\begin{cases} x_{k_n}^{h_n} - x_{k_n-1}^{h_n} = h_n y_{k_n-1}^{h_n}, \\ y_{k_n}^{h_n} - y_{k_n-1}^{h_n} = -h_n p((k_n-1)h_n) x_{k_n-1}^{h_n}. \end{cases} \qquad (30)$$

Внаслідок леми 2, їх праві частини прямують до нуля при $n \to \infty$.

Отже, згідно з (25) маємо

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n+1}^{h_n} = \lim_{n\to\infty} x_{k_n-1}^{h_n} = 0. \qquad (31)$$

А згідно з (26)

$$\lim_{n\to\infty} y_{k_n+1}^{h_n} = \lim_{n\to\infty} y_{k_n-1}^{h_n} = y^0. \qquad (32)$$

При цьому, внаслідок нерівностей (28), із першої рівності (30) маємо, що

$$y_{k_n-1}^{h_n} \geq 0, \qquad (33)$$

а з першої рівності (29) маємо, що

$$y_{k_n}^{h_n} \leq 0. \qquad (34)$$

Тоді з (26), (32), (33), (34) отримуємо, що

$$y^0 = 0. \qquad (35)$$

Розглянемо тепер розв'язок диференціального рівняння (2) з початковими даними (24). Очевидно, що він нетривіальний. Позначимо його $x(t, x_0, y_0)$. Через $x(t, x_{0n}, y_{0n})$ позначимо розв'язок рівняння (2) з початковими даними (x_{0n}, y_{0n}).

Очевидно, що

$$x(t_n, x_0, y_0) \to x(t_0, x_0, y_0), \quad n \to \infty. \qquad (36)$$

Із неперервної залежності розв'язків задачі Коші від початкових даних випливає також, що

$$|\, x(t_n, x_{0n}, y_{0n}) - x(t_n, x_0, y_0) \,| \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (37)$$

З леми 2 випливає, що всі розв'язки задач Коші для рівняння (2) та різницевої системи (13) з початковими даними (14) рівномірно обмежені на відрізку $[0, a]$. Тоді з леми 1 випливає для відповідних розв'язків цих рівнянь справедлива рівномірна оцінка (8) у вузлових точках. Рівномірність тут означає, що сталі C, R_1 і R_2 в лемах 1 і 2 можна вибрати залежними лише від a і максимуму функції $|\, p(t) \,|$ на $[0, a]$.

Отже

$$|\, x(t_n, x_{0n}, y_{0n}) - x_{k_n}^{h_n} \,| \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (38)$$

Тому з (25), (36) - (38) випливає, що

$$x(t_0, x_0, y_0) = 0. \qquad (39)$$

Аналогічно переконуємося в тому, що

$$\dot{x}(t_0, x_0, y_0) = 0. \qquad (40)$$

Співвідношення (39), (40) протирічать нетривіальності розв'язку $x(t, x_0, y_0)$.

2. Основний результат

Перейдемо тепер до основного результату роботи.

Теорема 1. *Нехай функція $p(t)$ задовольняє умови (3) і (4). Тоді існує h_0 таке, що при всіх $0 < h \leq h_0$ справедливе твердження:*

якщо розв'язок рівняння (5) x_k^h має на відрізку $[0, a]$ принаймні три зміни знаку, то відповідний йому розв'язок диференціального рівняння (2) коливний на $[0, a]$.

Доведення. Перепишемо рівняння (2) у вигляді системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -p(t)x. \end{cases} \qquad (41)$$

При доведенні леми 4 відзначалось, що для розв'язків задач Коші систем (13) і (41) з початковими даними (x_0, y_0), в нулі, що $x_0^2 + y_0^2 = 1$, справедлива рівномірна оцінка типу (8) у вузлових точках. При цьому сталу C можна вибрати залежною лише від a і максимуму функції $|\, p(t) \,|$ на $[0, a]$.

Виберемо тепер h_1 так, щоб

$$Ch_1 \leq \frac{B_0}{2}, \qquad (42)$$

де B_0 – стала, що фігурує в лемі 4.

Тоді для всіх

$$0 < h \leq \min\{h_0, h_1\} \qquad (43)$$

справедлива оцінка (42) і твердження леми 4. Тут h_0 – стала з леми 4.

Виберемо довільне h, що задовольняє (43) і зафіксуємо його.

Нехай (x_k^h, y_k^h) –довільний нетривіальний розв'язок системи (13) при даному h такий, що його перша компонента x_k^h має принаймі три зміни знаку на $[0,a]$. Нехай (x_0, y_0) його початкові дані, тобто $x_0^h = x_0$, $y_0^h = y_0$.

Покажемо, що розв'язок рівняння (2) з початковими даними $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$ коливний на $[0,a]$.

Введемо величину $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Очевидно, що $r_0 \neq 0$. Внаслідок лінійності систем (13) і (41), функції $\frac{1}{r_0}(x(t), \dot{x}(t)) = (z(t), \xi(t))$ і $\frac{1}{r_0}(x_k^h, y_k^h) = (z_k^h, \xi_k^h)$ також є їх розв'язками. При цьому компонета $z(t)$ має ті ж самі нулі, що і $x(t)$, а z_k^h має ті ж самі зміни знаку, що і x_k^h. Початкові ж дані розв'язків $(z(t), \xi(t))$ і (z_k^h, ξ_k^h) задовольняють умову (14).

Оточимо розв'язок (z_k^h, ξ_k^h) ρ–околом при $kh \in [0,a]$, де $\rho \le \frac{B_0}{2}$. Оскільки z_k^h має принаймні три зміни знаку, то z_k^h має принаймні дві амплітуди коливань. Нехай $k_0 h$ і $p_0 h$ – точки, в яких ці амплітуди досягаються. При цьому $z_{k_0}^h$ і $z_{p_0}^h$ мають різні знаки.

Тоді з нерівностей (8), (42) та леми 4 випливає, що функція $z(t)$ в точках $t = 0$, $t = k_0 h$, $t = p_0 h$ зберігає знак функції z_k^h, а, отже, має як мінімум два нулі на $[0,a]$. Значить і $x(t)$ має принаймні два нулі на $[0,a]$, а отже є коливним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атейві А.М.* Коливні властивості розв'язків диференціальниї рівнянь і їх стійкість.// Дис.канд.фіз-мат. наук: 01.01.02. –К. –1997, –С.76.

2. *Карпенко О.В., Кравець В.І., Станжицький О.М.* Коливність розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь другого порядку // Укр.мат.журн. –2013. –**65**,N2. –С.226-235.

3. *Мартинюк Д.І.* Лекции по качественной теории разностных уравнений.// К.:Наукова думка, –1972, –247с.

4. *Скалкина М.А.* О колебаниях решений уравнений в конечных разностях.// Изв. высших учебн.завед. Матем. –1959. –С.138-144.

5. *Bohner M., Peterson. A.* Dynamical equations on time scales.An introduction with applications. //Birkh*ä*user. Boston.Basel.Berlin. –2001.

6. *Grüne. L.* Asymptotic behavior of dynamical and control systems perturbation and discretization. // Springer-Verlag, Berlin. – 2002. –231 p.

7. *Ladas. G.* Explicit conditions for the oscillation of difference equations.// J.Math.Anal.Appl. –1990. **153**, –p. 276-287.

8. *Messer. K.* A second-order self adjoint dynamic equation on time scale.// Dynam.Systems Appl. –2002. –*8*,N5. –p.451-460.

9. *Öcalan. Ö.* Linearized oscillation of nonlinear difference equations with advanced arguments. // Archivum math. Brno. –2009. –**45**. –p.203-212.

10. *Öcalan. Ö.* Oscillation of nonlinear difference equations with several coefficients.// Commun. Math Anal.–2008. –**4**,N1. –p.35-44.

11. *Samoilenko A. M., Perestyuk M. O., Parasyuk I. O.* Differential equations.// Textbook. – 2012. Almaty. –464p.