УДК 519.21

©2013 р. Б.І. Копитко, Р.В. Шевчук

Львівський національний університет імені Івана Франка

ОДНОВИМІРНІ ПРОЦЕСИ ДИФУЗІЇ В ОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ТА УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ ТИПУ ФЕЛЛЕРА-ВЕНТЦЕЛЯ

Використовуючи аналітичний метод, знайдено інтегральне зображення двопараметричної напівгрупи операторів, яка описує неоднорідний процес Феллера на відрізку, поведінка якого в точках межі, а також в деякій внутрішній точці визначається крайовими умовами та умовою спряження типу Феллера-Вентцеля відповідно.

Using an analytic method we obtain an integral representation of the two-parameter operator semigroup associated with the inhomogeneous Feller process on a closed interval whose behavior at the points of boundary as well as at some interior point is determined by the boundary conditions and the conjugation condition of Feller-Wentzell's type, respectively.

Загальний вигляд крайових умов для одновимірних дифузійних процесів було встановлено у роботах В. Феллера [1] і А.Д. Вентцеля [2] (див. також [3], де розглядався багатовимірний випадок). Там доведені твердження, з яких випливає, що якщо $\{T_t,\ t \geq 0\}$ — феллерівська напівгрупа в $C[r_1, r_2]$, $-\infty < r_1 < r_2 < \infty)$ і її генератор A є звуженням $(L,\ C^2[r_1, r_2])$, де L — еліптичний диференціальний оператор другого порядку, то функції з $D(A) \subset C^2[r_1, r_2]$ мають задовольняти крайові умови, які, взагалі кажучи, мають нелокальний характер.

Дослідженню питання побудови марковських процесів з крайовими умовами Феллера-Вентцеля присвячено багато робіт (див., наприклад, різні підходи в [1],[2],[4]-[8], а також посилання в них).

Відомо (див., наприклад, [9]-[14]), що узагальненням описаної нами проблеми є так звана задача про склеювання двох дифузійних процесів, яка є об'єктом дослідження також і в даній статті. У розглянутому нами випадку ставиться питання про побудову напівгрупи Феллера, якій відповідає неоднорідний марковський процес (не обов'язково неперервний) на відрізку $[r_1, r_2]$ такий, що його частини у внутрішніх точках відповідних проміжків даного відрізка, розділених між собою деякою фіксованою точкою $r \in (r_1, r_2)$, збігаються із заданими там неоднорідними дифузійними процесами, а поведінка шуканого процесу в точках r_1, r_2 та r описується заданими в них крайовими умовами та умовою спряження типу Феллера-Вентцеля відповідно. Ще одна умова спряження, яка задається в точці r, є відображенням властивості феллеровості шуканого процесу. Для розв'язання даної задачі в роботі застосовано аналітичний метод. За такого підходу питання про існування потрібної напівгрупи практично зводиться до дослідження відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Класичну розв'язність останньої задачі встановлено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайних параболічних потенціалів простого шару. Мабуть, у запропонованій тут постановці задача про склеювання дифузійних процесів, а також відповідна їй параболічна задача спряження розглядаються вперше. Зауважимо, що у відзначених нами працях [9], [11]-[14] задача про склеювання двох одновимірних дифузійних процесів (як однорідних так і неоднорідних) з різними варіантами загальної умови спряження типу Феллера-Вентцеля розглядалася в припущенні, коли проміжки, в яких задаються склеювані дифузійні процеси, є півпрямими. Що стосується праці [10], в якій за аналогією з працями [1], [2] було встановлено загальний вигляд умови спряження в точці склеювання дифузійних процесів, то там деякі з досліджуваних нами питань вивчалися за допомогою методів теорії напівгруп і функціонального аналізу.

1. Постановка задачі. Нехай $C(\overline{D})$ — банахів простір неперервних функцій на відрізку $\overline{D}=[r_1,r_2]$. Позначимо через $D_i,\ i=1,2$, два інтервали (r_1,r) і (r,r_2) відповідно, де $-\infty<r_1<r<r_2<\infty$, а через φ_i — звуження будь-якої функції φ заданої на $\overline{D}$ на замикання $\overline{D}_i$.

Припустимо, що в D_i задано неоднорідний дифузійний процес, який визначається диференціальним оператором другого порядку $A_s^{(i)},\ s\in[0,T]$ ($T>0$ — фіксоване), що діє на множині $C^2(\overline{D}_i),\ i=1,2$:

$$A_s^{(i)}\varphi_i(x)=\frac{1}{2}b_i(s,x)\frac{d^2\varphi_i(x)}{dx^2}+a_i(s,x)\frac{d\varphi_i(x)}{dx},$$

де коефіцієнти дифузії $b_i(s,x)$ і коефіцієнти переносу $a_i(s,x)$ задовольняють такі умови:

1) існують сталі b і B такі що $0<b\le b_i(s,x)\le B$ для всіх $(s,x)\in[0,T]\times\overline{D}_i$;

2) для всіх $s,t\in[0,T],\ x,y\in\overline{D}_i$ виконуються нерівності
$|b_i(t,x)-b_i(s,y)|\le c(|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|x-y|^{\alpha})$,
$|a_i(t,x)-a_i(s,y)|\le c(|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|x-y|^{\alpha})$,
де c і α додатні сталі, $0<\alpha<1$.

Розглянемо диференціальний оператор $\widetilde{A}_s,\ s\in[0,T]$, який діє на множині $\vartheta(\widetilde{A}_s)=\{\varphi\in C(\overline{D}):\ \varphi_i\in\vartheta(A_s^{(i)}),\ i=1,2,\ A_s^{(1)}\varphi(r)=A_s^{(2)}\varphi(r)\}$ за таким правилом:

$$\widetilde{A}_s\varphi(x)=\begin{cases}A_s^{(1)}\varphi_1(x), & x\in\overline{D}_1,\\ A_s^{(2)}\varphi_2(x), & x\in\overline{D}_2.\end{cases}$$

Припустимо також, що в точках $r,\ r_i,\ i=1,2$, задано оператор спряження L_s та два крайові оператори $L_s^{(i)}$ типу Феллера-Вентцеля, які при дії на функцію $\varphi\in C(\overline{D})$ визначаються рівностями

$$L_s\varphi(r)=\widetilde{A}_s\varphi(r)+q_1(s)\varphi'(r-)-q_2(s)\times \times\varphi'(r+)+\int\limits_{D_1\cup D_2}[\varphi(r)-\varphi(y)]\mu(s,dy),\quad (1)$$

$$L_s^{(1)}\varphi(r_1)=-\varphi'(r_1)+ +\int\limits_{D_1}[\varphi(r_1)-\varphi(y)]\pi_1(s,dy),\quad (2)$$

$$L_s^{(2)}\varphi(r_2)=\int\limits_{D_2}[\varphi(r_2)-\varphi(y)]\pi_2(s,dy),\quad (3)$$

де функції $q_1,\ q_2$ та міри $\mu,\ \pi_1,\ \pi_2$ задовольняють наступні умови:

а) функції $q_1(s),\ q_2(s)$ невід'ємні та неперервні на відрізку $[0,T]$, до того ж $q_1(s)+q_2(s)>0$ для всіх $s\in[0,T]$;

б) $\mu(s,\cdot),\ \pi_i(s,\cdot)$ — невід'ємні міри на $D_1\cup D_2,\ D_i$ відповідно. При цьому для всіх обмежених вимірних на $\overline{D}$ функцій f інтеграли $\int_{D_1\cup D_2}|y-r|f(y)\mu(s,dy)$ та $\int_{D_2}f(y)\pi_2(s,dy)$ неперервні в розумінні Гельдера як функції змінної $s\in[0,T]$ з показниками $\frac{\alpha}{2}$ та $\frac{1+\alpha}{2}$ відповідно, а інтеграл $\int_{D_1}|y-r_1|f(y)\pi_1(s,dy)$ неперервний на відрізку $[0,T]$;

в) $\pi_2(s,D_2)=1$ для всіх $s\in[0,T]$.

Відомо, що крайові умови

$$L_s\varphi(r)=0,\quad L_s^{(i)}\varphi(r_i)=0,\quad i=1,2,\quad (4)$$

звужують диференціальний оператор $\widetilde{A}_s$ до інфінітезимального генератора деякої феллерівської напівгрупи на $\overline{D}$. З іншого боку умови в (4) визначають всеможливі типи поведінки дифундуючої частинки при її потраплянні в точки $r,\ r_i,\ i=1,2$, відповідно. В точці r такими типами поведінки є затримка, часткове відбиття і стрибок, в точці r_1 — часткове відбиття і стрибок, а в точці r_2 — лише стрибок.

Наша задача полягає в тому, щоб знайти інтегральне зображення двопараметричної феллерівської напівгрупи $T_{st},\ 0\le s<t\le T$, генератор A_s якої є звуженням оператора $\widetilde{A}_s$ на множину всіх функцій $\varphi\in\vartheta(\widetilde{A}_s)$, для яких виконуються співвідношення (4).

Дану задачу називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів на відрізку ([9-14]). При її дослідженні ми використовуємо аналітичний метод. За такого підходу шукана напівгрупа операторів визначається за допомогою розв'язку наступної параболічної задачі спряження:

$$\frac{\partial u(s,x,t)}{\partial s} + A_s^{(i)} u(s,x,t) = 0, \qquad 0 \le s < t \le T,\ x \in D_i, \quad (5)$$

$$\lim_{s\uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x), \quad x \in \overline{D}, \quad (6)$$

$$u(s,r-,t) = u(s,r+,t), \quad 0 \le s < t \le T, \quad (7)$$

$$L_s u(s,r,t) = 0, \quad 0 \le s < t \le T, \quad (8)$$

$$L_s^{(i)} u(s,r_i,t) = 0, \quad 0 \le s < t \le T, \quad (9)$$

де $i = 1,2$, $\varphi \in C(\overline{D})$ — задана функція.

Класичну розв'язність задачі (5)-(9) встановлено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайних потенціалів простого шару, побудованих за допомогою фундаментальних розв'язків рівномірно параболічних операторів $\frac{\partial}{\partial s} + A_s^{(i)}$.

Необхідно зауважити, що подібна задача розглядалася у роботі [13], в якій було побудовано процес Феллера на прямій, що є результатом склеювання двох неоднорідних дифузійних процесів заданих в областях $(-\infty, 0)$ і $(0,\infty)$ відповідно. Поведінка такого процесу в точці нуль описувалася загальною умовою спряження типу Феллера-Вентцеля.

2. Розв'язання задачі спряження. В цьому параграфі буде встановлено класичну розв'язність задачі (5)-(9). Під класичним розв'язком цієї задачі будемо розуміти той розв'язок, який при всіх $t \in (0,T]$ належить до класу

$$C^{1,2}([0,t) \times D_1 \cup D_2) \cap C([0,t] \times \overline{D}). \quad (10)$$

В першу чергу доведемо, що задача (5)-(9) не може мати більше одного класичного розв'язку. Нехай $u^{(1)}(s,x,t)$ та $u^{(2)}(s,x,t)$ — два розв'язки задачі (5)-(9) з класу (10). Тоді різниця $\omega(s,x,t) = u^{(1)}(s,x,t) - u^{(2)}(s,x,t)$ задовольняє рівняння (5), початкову умову

$$\lim_{s\uparrow t} \omega(s,x,t) = 0, \quad x \in \overline{D},$$

і крайові умови (7)-(9). Припустимо, що $\omega(s,x,t)$ набуває додатних значень в області $[0,t] \times \overline{D}$ і позначимо через ω_{max} її максимум в цій області. Тоді, згідно з принципом максимуму ([15, Гл. II]), значення ω_{max} досягається в деякій точці $(s_0,x_0) \in (0,t) \times \{r_1, r, r_2\}$. У випадку, коли $x_0 = r_1$ (тобто $\omega(s_0,r_1,t) = \omega_{max} > 0$) виконуються нерівності

$$\frac{\partial \omega(s_0,r_1,t)}{\partial x} \le 0,$$
$$\int_{D_1} [\omega(s_0,r_1,t) - \omega(s_0,y,t)]\pi_1(s,dy) \ge 0. \quad (11)$$

Більше того, з теореми 14 у [15, стор. 69] випливає, що

$$\frac{\partial \omega(s_0,r_1,t)}{\partial x} < 0. \quad (12)$$

Співвідношення (11), (12) означають, що $L_{s_0}^{(1)}\omega(s_0,r_1,t) > 0$. Отже, ми отримали суперечність з (9). Використовуючи аналогічні міркування, у випадках, коли $x_0 = r$ та $x_0 = r_2$, ми також отримуємо суперечність. Отримана суперечність вказує на те, що $\omega(s,x,t) \le 0$ при всіх $(s,x) \in [0,t] \times \overline{D}$. Аналогічно доводиться, що значення функції $\omega(s,x,t)$ в області $[0,t] \times \overline{D}$ не можуть бути від'ємними, і тому

$$\omega(s,x,t) \equiv 0.$$

Твердження про єдиність розв'язку задачі (5)-(9) дає нам змогу проводити всі наступні міркування у припущенні, що

- функції $a_i(s,x)$ та $b_i(s,x)$ визначені на $[0,T] \times \mathbb{R}$ і в цій області вони задовольняють властивості 1), 2);
- $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, де $C_b(\mathbb{R})$ — банахів простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій з нормою $\|\varphi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

Позначимо через $G_i(s,x,t,y)$, $i=1,2$, фундаментальний розв'язок рівняння (5) в області $[0,T]\times\mathbb{R}$. Нагадаємо, що функція $G_i(s,x,t,y)$ — невід'ємна, неперервно диференційовна по s, двічі неперервно диференційовна по x і для неї виконуються нерівності ([11, 15, 16])

$$|D_s^r D_x^p G_i(s,x,t,y)| \le c(t-s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \times \times \exp\left\{-h\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \qquad (13)$$

якими б не були $0\le s<t\le T,\ x,y\in\mathbb{R}$, де r і p цілі невід'ємні числа для яких $2r+p\le 2$; D_s^r — символ частинної похідної по s порядку r; D_x^p — символ частинної похідної по x порядку p; c, h — додатні сталі; α — стала з умови 2). До того ж, G_i зображається у вигляді

$$G_i(s,x,t,y) = = Z_i(s,x,t,y)+Z_i^{'}(s,x,t,y), \qquad (14)$$

де

$$Z_i(s,x,t,y)=[2\pi b_i(t,y)(t-s)]^{-\frac{1}{2}}\times \times \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2b_i(t,y)(t-s)}\right\},$$

а функція $Z_i^{'}$ задовольняє нерівності

$$|D_s^r D_x^p Z_i^{'}(s,x,t,y)| \le c(t-s)^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \times \times \exp\left\{-h\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \qquad (15)$$

при всіх $0\le s<t\le T,\ x,y\in\mathbb{R},\ 2r+p\le 2$.

Розв'язок задачі (5)-(9) будемо шукати у вигляді

$$u(s,x,t)=\int_{\mathbb{R}} G_i(s,x,t,y)\varphi(y)dy+ + \int_s^t G_i(s,x,\tau,r)V_i(\tau,t)d\tau+ + \int_s^t G_i(s,x,\tau,r_i)V_{i+2}(\tau,t)d\tau,$$

$$0\le s<t\le T, \quad x\in\overline{D}_i, \quad i=1,2, \qquad (16)$$

з невідомими функціями V_k, $k=\overline{1,4}$, які знайдемо з умов (7)-(9). Потенціал Пуассона у правій частині виразу (16) надалі позначатимемо через $u_{i0}(s,x,t)$, а потенціали простого шару — через $u_{i1}(s,x,t)$ та $u_{i2}(s,x,t)$ відповідно.

Зауважимо, що коли взяти до уваги співвідношення (5)-(7), то умова спряження (8) зведеться до такої рівності

$$u(s,r,t)=\varphi(r)-\int_s^t g(\tau,t)d\tau, \qquad (17)$$

де

$$g(\tau,t)=q_1(\tau)\frac{\partial u(\tau,r-,t)}{\partial x}- - q_2(\tau)\frac{\partial u(\tau,r+,t)}{\partial x}+ + \int_{D_1\cup D_2}[u(\tau,0,t)-u(\tau,y,t)]\,\mu(\tau,dy).$$

Підставимо тепер всюди в рівностях (9) та (17) замість функції u її вираз (16) і спростимо похідні $\frac{\partial u_{i1}(s,r\mp,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_{i2}(s,r_i,t)}{\partial x}$, використовуючи формулу стрибка для потенціалів простого шару

$$\frac{\partial u_{i1}(s,r\mp,t)}{\partial x}=\pm\frac{V_i(s,t)}{b_i(s,r)}+ + \int_s^t \frac{\partial G_i(s,r,\tau,r)}{\partial x}V_i(\tau,t)d\tau,$$

$$\frac{\partial u_{i2}(s,r_i,t)}{\partial x}=(-1)^i\frac{V_{i+2}(s,t)}{b_i(s,r_i)}+ + \int_s^t \frac{\partial G_i(s,r_i,\tau,r_i)}{\partial x}V_{i+2}(\tau,t)d\tau.$$

Після нескладних перетворень ми отримуємо наступну систему інтегральних рівнянь відносно невідомих V_k, $k=\overline{1,4}$:

$$\sum_{j=1}^{4}\int_s^t N_{ij}(s,\tau)V_j(\tau,t)d\tau = = \Phi_i(s,t), \quad i=1,2, \quad (18)$$

$$V_3(s,t)=\sum_{j=1}^{4}\int\limits_s^t K_{3j}(s,\tau)V_j(\tau,t)d\tau+ \\ +\Psi_3(s,t), \qquad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{4}\int\limits_s^t R_j(s,\tau)V_j(\tau,t)d\tau=\Upsilon(s,t), \qquad (20)$$

де

$$N_{ii}(s,\tau)=G_i(s,r,\tau,r)+\frac{q_i(\tau)}{b_i(\tau,r)}+ \\ +P_{s\tau}^{(i)}G_i(s,x,\tau,r)\big|_{x=r}, \quad i=1,2,$$
$$N_{i,3-i}(s,\tau)=\frac{q_{3-i}(\tau)}{b_{3-i}(\tau,r)}+ \\ +P_{s\tau}^{(3-i)}G_{3-i}(s,x,\tau,r)\big|_{x=r},$$
$$N_{i,i+2}(s,\tau)=G_i(s,r,\tau,r_i)+ \\ +P_{s\tau}^{(i)}G_i(s,x,\tau,r_i)\big|_{x=r},$$
$$N_{i,5-i}(s,\tau)=P_{s\tau}^{(3-i)}G_{3-i}(s,x,\tau,r_{3-i})\big|_{x=r},$$
$$P_{st}^{(i)}f(s,x)=\int\limits_s^t\Bigg((-1)^{i+1}q_i(\rho)\frac{\partial f(\rho,x)}{\partial x}+ \\ +\int\limits_{D_i}[f(\rho,x)-f(\rho,y)]\mu(\rho,dy)\Bigg)d\rho,$$
$$K_{31}(s,\tau)=-b_1(s,r_1)L_s^{(1)}G_1(s,x,\tau,r)\big|_{x=r_1},$$
$$K_{33}(s,\tau)=-b_1(s,r_1)L_s^{(1)}G_1(s,x,\tau,r_1)\big|_{x=r_1},$$
$$K_{3j}(s,\tau)=0, \quad j=2,4,$$
$$R_2(s,\tau)=L_s^{(2)}G_2(s,x,\tau,r)\big|_{x=r_2},$$
$$R_4(s,\tau)=L_s^{(2)}G_2(s,x,\tau,r_2)\big|_{x=r_2},$$
$$R_j(s,\tau)=0, \quad j=1,3,$$
$$\Phi_i(s,t)=\varphi(r)-u_{i0}(s,r,t)- \\ -\sum_{j=1}^{2}P_{st}u_{j0}(s,r,t), \quad i=1,2,$$
$$\Psi_3(s,t)=-b_1(s,r_1)L_s^{(1)}u_{10}(s,r_1,t),$$
$$\Upsilon(s,t)=-L_s^{(2)}u_{20}(s,r_2,t).$$

Відзначимо, що рівняння (19) є рівнянням Вольтерра другого роду, а рівняння в (18) та (20) — рівняннями Вольтерра першого роду, які за допомогою прийому Гольмгрена зводяться до еквівалентних рівнянь Вольтерра другого роду. Визначимо оператор ($0\le s<t\le T$)

$$\mathcal{E}_{st}\Phi(s,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{ds}\int\limits_s^t(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\rho,t)d\rho,$$

і подіємо ним на обидві частини кожного з рівнянь в (18), (20). В отриманих виразах, змінивши порядки інтегрування по ρ і τ, спростимо похідні від інтегралів залежних від параметрів, використовуючи таке правило:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^t I(s,\tau)d\tau=\int\limits_s^t\frac{\partial}{\partial s}I(s,\tau)d\tau,$$

якщо $\lim\limits_{s\uparrow\tau}I(s,\tau)=0$. Після виконання вказаних дій система інтегральних рівнянь (18)-(20) набуде вигляду

$$V_i(s,t)=\sum_{j=1}^{4}\int\limits_s^t K_{ij}(s,\tau)V_j(\tau,t)d\tau+ \\ +\Psi_i(s,t), \quad i=\overline{1,4}, \qquad (21)$$

де

$$K_{ii}(s,\tau)=\sqrt{b_i(s,r)}[\mathcal{E}_{s\tau}Z_i'(s,r,\tau,r)+ \\ +\mathcal{E}_{s\tau}Q_i(s,\tau)], \quad i=1,2,$$
$$K_{ij}(s,\tau)= \\ =\sqrt{b_i(s,r)}\mathcal{E}_{s\tau}N_{ij}(s,\tau), \quad i=1,2, \quad j\ne i,$$
$$K_{4j}(s,\tau)= \\ =\sqrt{b_2(s,r_2)}\mathcal{E}_{s\tau}R_j(s,\tau), \quad j=\overline{1,3},$$
$$K_{44}(s,\tau)=\sqrt{b_2(s,r_2)}[\mathcal{E}_{s\tau}Z_2'(s,r_2,\tau,r_2)- \\ -\mathcal{E}_{s\tau}J(s,\tau)], \quad 0\le s<\tau<t\le T,$$
$$Q_i(s,\tau)=\frac{q_i(\tau)}{b_i(\tau,r)}+ \\ +P_{s\tau}^{(i)}G_i(s,x,\tau,r)\big|_{x=r}, \quad i=1,2,$$
$$J(s,\tau)=\int\limits_{\overline{D}_2\setminus\{r_2\}}G_2(\rho,y,\tau,r_2)\pi_2(s,dy),$$
$$\Psi_i(s,t)=-\sqrt{b_i(s,r)}\mathcal{E}_{st}\Phi_i(s,t), \quad i=1,2,$$
$$\Psi_4(s,t)=-\sqrt{b_2(s,r_2)}\mathcal{E}_{st}\Upsilon(s,t).$$

Використовуючи методи, запропоновані нами у роботах [13, 14] для дослідження подібних систем інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, встановлюємо, що для функцій Ψ_i в (21), при всіх $0 \le s < t \le T$, виконується нерівність

$$|\Psi_i(s,t)| \le c_0 \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (22)$$

і що ядра K_{ij} можна зобразити у вигляді

$$K_{ij}(s,\tau) = H_{ij}(s,\tau) + H'_{ij}(s,\tau), \qquad (23)$$

де

$$H_{33}(s,\tau) = -b_1(s,r_1) \int\limits_{D_1(\delta)} [Z_1(s,r_1,\tau,r_1) - $$
$$- Z_1(s,y,\tau,r_1)]\pi_1(s,dy),$$
$$H_{44}(s,\tau) = -\sqrt{b_2(s,r_2) b_2(\tau,r_2)} \times$$
$$\times \int\limits_{D_2(\delta)} \frac{\partial Z_2}{\partial y}(s,y,\tau,r_2)\pi_2(s,dy),$$
$$H_{ij}(s,\tau) = 0, \quad i = 1,2 \quad \text{або} \quad i \ne j,$$

а для функції H'_{ij} справджується нерівність

$$|H'_{ij}(s,t)| \le h(\delta)\|\varphi\|(t-s)^{-1+\frac{\alpha}{2}}. \qquad (24)$$

Тут $c_0,\ h(\delta)$ — деякі додатні сталі, до того ж стала h залежить від вибору δ (δ — довільне додатне число); $D_j(\delta) = \{y \in D_j : \ |y - r_j| < \delta\}$.

Зважаючи на неінтегровну особливість деяких ядер K_{ij}, яка виникає за рахунок функцій H_{ij}, ми поки що не можемо стверджувати, що система інтегральних рівнянь (21) має розв'язок. Доведемо, що розв'язок цієї системи все ж таки існує і його можна знайти за допомогою методу послідовних наближень, тобто подати у вигляді суми функціонального ряду

$$V_i(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_i^{(k)}(s,t), \quad i = \overline{1,4}, \qquad (25)$$

де

$$V_i^{(0)}(s,t) = \Psi_i(s,t),$$
$$V_i^{(k)}(s,t) = \sum_{j=1}^{4} \int\limits_s^t K_{ij}(s,\tau) V_j^{(k-1)}(\tau,t)d\tau,$$
$$k = 1,2,\ldots$$

Знайдемо оцінку для функції $V_i^{(1)}$. Для цього проведемо наступні перетворення:

$$V_i^{(1)}(s,t) = \sum_{j=1}^{4} \int\limits_s^t K_{ij}(s,\tau) V_j^{(0)}(\tau,t)d\tau =$$
$$= \int\limits_s^t H_{ii}(s,\tau)\Psi_i(\tau,t)d\tau +$$
$$+ \sum_{j=1}^{4} \int\limits_s^t H'_{ij}(s,\tau)\Psi_j(\tau,t)d\tau =$$
$$= \widetilde{V}_i^{(1)}(s,t) + \widehat{V}_i^{(1)}(s,t), \quad i = \overline{1,4}. \qquad (26)$$

З нерівностей (22) та (24) отримуємо оцінку для другого доданка у виразі (26):

$$|\widehat{V}_i^{(1)}(s,t)| \le 4c_0 h(\delta)\|\varphi\| \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \times$$
$$\times (t-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}, \quad i = \overline{1,4}, \qquad (27)$$

де $c_0,\ h(\delta)$ — сталі з (22) і (24) відповідно.

Оцінимо $\widetilde{V}_i^{(1)}(s,t)$ при $i = 3,4$ (згідно з нашими позначеннями $\widetilde{V}_1^{(1)} = \widetilde{V}_2^{(1)} = 0$). У випадку, коли $i = 3$, маємо

$$\left|\widetilde{V}_3^{(1)}(s,t)\right| \le \frac{c_0 B\|\varphi\|}{\sqrt{2\pi b}} \int\limits_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times (\tau - s)^{-\frac{1}{2}} d\tau \int\limits_{D_1(\delta)} (1 - e^{-\frac{(y-r_1)^2}{2b\cdot(\tau-s)}})\pi_1(s,dy) =$$
$$= \frac{c_0 B\|\varphi\|}{\sqrt{2\pi b}} \int\limits_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} d\tau \times$$
$$\times \int\limits_{D_1(\delta)} \pi_1(s,dy) \left| \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta} e^{-\frac{\theta(y-r_1)^2}{2b\cdot(\tau-s)}} d\theta \right| =$$
$$= \frac{c_0 B\|\varphi\|}{2b\sqrt{2\pi b}} \int\limits_{D_1(\delta)} (y-r_1)^2 \pi_1(s,dy) \times$$
$$\times \int\limits_0^1 e^{\frac{-\theta(y-r_1)^2}{2b\cdot(t-s)}} d\theta \int\limits_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times (\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\theta(y-r_1)^2}{2b\cdot(t-s)}\frac{t-\tau}{\tau-s}} d\tau,$$

де b, B — сталі з 1). У внутрішньому інтегралі останнього співвідношення зробимо заміну змінних $z = \frac{t-\tau}{\tau-s}$. Тоді

$$|\widetilde{V}_3^{(1)}(s,t)| \le \frac{c_0 B\|\varphi\|}{2b\sqrt{2\pi b}(t-s)}\times$$
$$\times \int\limits_{D_1(\delta)} (y-r_1)^2 \pi_1(s,dy) \int\limits_0^1 e^{-\frac{\theta(y-r_1)^2}{2b\cdot(t-s)}} d\theta \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta\frac{(y-r_1)^2}{2b\cdot(t-s)}\cdot z} dz \le$$
$$\le \frac{c_0 B\|\varphi\|}{2b}(t-s)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{D_1(\delta)} |y-r_1|\pi_1(s,dy)\times$$
$$\times \int\limits_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta \le c_0 p_1(\delta)\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (28)$$

де $p_1(\delta) = \frac{B}{b} \max\limits_{s\in[0,T]} \int\limits_{D_1(\delta)} |y-r_1|\pi_1(s,dy)$.

Якщо $i = 4$, то для функції $\widetilde{V}_4^{(1)}(s,t)$ справджується така нерівність:

$$|\widetilde{V}_4^{(1)}(s,t)| \le$$
$$\le c_0\sqrt{B}\|\varphi\| \int\limits_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{b_2(\tau,r_2)} d\tau \times$$
$$\times \int\limits_{D_2(\delta)} \left| \frac{\partial Z_2}{\partial y}(s,y,\tau,r_2) \right| \pi_2(s,dy) \le$$
$$= \frac{c_0\sqrt{B}\|\varphi\|}{b\sqrt{2\pi}} \int\limits_{D_2(\delta)} |y-r_2| e^{-\frac{y^2}{2B\cdot(t-s)}} \pi_2(s,dy)\times$$
$$\times \int\limits_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(y-r_2)^2}{2B\cdot(t-s)}\cdot\frac{t-\tau}{\tau-s}} d\tau \le$$
$$\le c_0 p_2(\delta)\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (29)$$

де $p_2(\delta) = \frac{B}{b} \max\limits_{s\in[0,T]} \int\limits_{D_2(\delta)} \pi_2(s,dy)$.

Об'єднуючи (27), (28) і (29), знаходимо оцінку для $V_i^{(1)}(s,t)$:

$$|V_i^{(1)}(s,t)| \le c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times \left[\frac{4h(\delta)T^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} + p(\delta) \right], \quad i = \overline{1,4},$$

де c_0, $h(\delta)$ — сталі з (22) і (24) відповідно, $p(\delta) = \max\{p_1(\delta),\ p_2(\delta)\}$.

Далі, методом математичної індукції доводимо, що члени $V_i^{(k)}$ ряду (25) задовольняють нерівність:

$$|V_i^{(k)}(s,t)| \le c\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{k} C_k^n a^{(k-n)} p(\delta)^n,$$
$$k = 0,1,2,\ldots, \quad i = \overline{1,4}, \qquad (30)$$

де

$$a^{(n)} = \frac{\left(4h(\delta)T^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n\alpha}{2}\right)}, \quad n = \overline{0,k}.$$

Виберемо $\delta = \delta_0$ у такий спосіб, щоб $p(\delta_0) < 1$ і позначимо $h = h(\delta_0)$, $p = p(\delta_0)$. Тоді, враховуючи (30), будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty} |V^{(k)}(s,t,\varphi)| \le c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{(k-m)} p^m =$$
$$= c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} C_{k+m}^m p^m =$$
$$= c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}}{(1-p)^{k+1}} =$$
$$= c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{4h}{1-p}T^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{1+k\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{1-p}. \qquad (31)$$

Оцінка (31) забезпечує абсолютну збіжність ряду (25) при $0 \le s < t \le T$. Це означає, що функція $V(s,t)$ існує, до того ж вона є неперервною для $s \in [0,t)$ і для неї справджується нерівність

$$|V(s,t)| \le c\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (32)$$

при всіх $0 \le s < t \le T$.

З допомогою оцінок (13) і (32) нескладно переконатися в тому, що побудована функція $u(s,x,t)$ є розв'язком задачі (5)-(9), який при виконанні умови узгодження

$$L_t^{(2)}\varphi(r_2) = 0 \qquad (33)$$

належить до класу (10).

Отже, нами доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай виконані умови 1), 2) і а)-в). Тоді для будь-якої функції* $\varphi \in C(\overline{D})$, *що задовольняє умову узгодження (33), існує єдиний розв'язок задачі (5)-(9) з класу (10). Якщо коефіцієнти операторів* $A_s^{(i)}$, $i = 1,2$, *продовжено на* $[0,T] \times \mathbb{R}$ *так, що властивості 1), 2) виконуються при всіх* $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, *а функцію* φ *продовжено на* $\mathbb{R}$ *так, що* $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, *то розв'язок задачі (5)-(9) можна зобразити у вигляді*

$$u(s,x,t) = \int_{\mathbb{R}} G_i(s,x,t,y)\varphi(y)dy+$$
$$+\int_s^t G_i(s,x,\tau,r)V_i(\tau,t)d\tau+$$
$$+\int_s^t G_i(s,x,\tau,r_i)V_{i+2}(\tau,t)d\tau,$$
$$0 \le s \le t \le T, \quad x \in \overline{D}_i, \quad i = 1,2,$$

де G_i *— фундаментальний розв'язок оператора* $\frac{\partial}{\partial s} + A_s^{(i)}$, *а набір функцій* $(V_i)_{i=\overline{1,4}}$ *є розв'язком системи інегральних рівнянь Вольтерра другого роду (21).*

3. Побудова процесу. Розглянемо двопараметричну сім'ю лінійних операторів T_{st}, $0 \le s < t \le T$, які діють на функцію $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ за таким правилом:

$$T_{st}\varphi(x) = u(s,x,t,\varphi), \quad x \in \overline{D}, \qquad (34)$$

де $u(s,x,t,\varphi)$ — розв'язок задачі (5)-(9) з функцією φ в умові (6).

Позначимо через $C_L(\mathbb{R})$ підпростір $C_b(\mathbb{R})$, що складається з усіх функцій $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, для яких виконується умова (33). Нескладно переконатися, що $C_L(\mathbb{R})$ є замкнутим у $C_b(\mathbb{R})$ і тому він є банаховим простором. Більше того, оператори T_{st} залишають простір $C_L(\mathbb{R})$ інваріантним, тобто

$$\varphi \in C_L(\mathbb{R}) \Longrightarrow T_{st}\varphi \in C_L(\mathbb{R}).$$

Зауважимо, що сім'я операторів T_{st} в просторі $C_L(\mathbb{R})$ має такі властивості:

i) якщо $\varphi(x) \ge 0$ при всіх $x \in \overline{D}$, то $T_{st}\varphi(x) \ge 0$ при всіх $0 \le s < t \le T$, $x \in \overline{D}$;

ii) T_{st} — стискуючі оператори, тобто вони не збільшують норму елемента;

iii) $T_{st} = T_{s\tau}T_{\tau t}$, $\quad 0 \le s < \tau < t \le T$ (напівгрупова властивість);

iv) якщо послідовність функцій $\varphi_n \in C_L(\mathbb{R})$ така, що $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$ і $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, то $\lim_{n\to\infty} T_{st}\varphi_n(x) = T_{st}\varphi(x)$ при всіх $0 \le s < t \le T$, $x \in \mathbb{R}$.

Доведення властивості i) проводиться з використанням принципу максимуму подібно до доведення теореми 1. Властивість ii) випливає з i) і з того факту, що $T_{st}1 = 1$ при $0 \le s < t \le T$. Напівгрупова властивість операторів T_{st} є наслідком теореми 1. Справді, для того, щоб знайти $u(s,x,t) = T_{st}\varphi(x)$, коли дано, що $\lim_{s\uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x)$, можна спочатку розв'язати задачу у часовому проміжку $[\tau, t]$, а потім розв'язати її у часовому проміжку $[s,\tau]$ з тією "початковою"функцією $u(\tau,x,t) = T_{\tau t}\varphi(x)$, яку було отримано; інакше кажучи, $T_{st}\varphi(x) = T_{s\tau}(T_{\tau t}\varphi)(x)$, $\varphi \in C_L(\mathbb{R})$, або $T_{st} = T_{s\tau}T_{\tau t}$. Нарешті, властивість iv) є очевидним наслідком теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.

З властивостей i)-iv) операторів T_{st} випливає таке твердження (див. [17]).

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді двопараметрична сім'я лінійних операторів* T_{st}, $0 \le s \le t \le T$, *визначена рівністю (34), описує неоднорідний процес Феллера на* $\overline{D}$ *такий, що в областях* D_1 *і* D_2 *він збігається із дифузійними процесами керованими операторами* $A_s^{(1)}$ *і* $A_s^{(2)}$ *відповідно, а його поведінка в точках* r, r_1, r_2 *описується умовою спряження (1) та крайовими умовами (2), (3) відповідно.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Feller W.* The parabolic differential equations and associated semi-groups of transformations // Ann. of Math. Soc. – 1952. – **55**. – P. 468-519.

2. *Вентцель А.Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // ДАН СССР. – 1956. – **111**, N2. – С. 269-272.

3. *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. – 1959. – **4**, N2. – С. 172-185.

4. *Скороход А.В.* Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами // Теория вероятн. и ее примен. – 1961. – **6**, N3. – С. 287-298.

5. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – Москва: Наука, 1986. – 456 с.

6. *Кончук П.П., Копитко Б.І.* Про напівгрупу операторів Феллера, яка описує процес дифузії на півпрямій з нелокальною граничною умовою // Матем. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 129-138.

7. *Копитко Б.І., Шевчук Р.В.* Модель процесу неоднорідної дифузії на півпрямій із загальною крайовою умовою Феллера-Вентцеля // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, N2. – С. 88-99.

8. *Пилипенко А.Ю.* Об отображении Скорохода для уравнений с отражением с возможностью скачкообразного выхода из границы // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, N9. – С. 1241-1256.

9. *Копытко Б.И.* О склеювании двух диффузионных процессов на прямой // В кн.: Вероятностные методы бесконечномерного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 84-101.

10. *Langer H., Schenk W.* Knotting of one-dimentional Feller processes // Math. Nachr. – 1983. – **113**. – P. 151-161.

11. *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Інститут математики НАН України, 1995. – 199 с.

12. *Кончук П.П., Копитко Б.І.* Напівгрупи операторів, які описують феллерівський процес на прямій, склеєний з двох дифузійних процесів // Теорія ймовір. та матем. статист – 2011. – **84**. – С. 86-96.

13. *Kopytko B.I., Shevchuk R.V.* On pasting together two inhomogeneous diffusion processes on a line with the general Feller-Wentzell conjugation condition // Theory of Stochastic Processes – 2011. – **17 (33)**, N2. – P. 55-70.

14. *Shevchuk R.V.* Pasting of two one-dimensional diffusion processes // Annales Mathematicae et Informaticae – 2012. – **39**. – P. 225-239.

15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.

16. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

17. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. — Москва: Физматгиз, 1963. — 859 с.