УДК 517.983

©2013 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ОПИС УЗАГАЛЬНЕНИХ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ОПЕРАТОРА ІНТЕГРУВАННЯ В ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

У просторах аналітичних функцій одержано опис узагальнених власних значень та узагальнених власних елементів операторів інтегрування та узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва.

We obtain a description of extended eigenvalues and extended eigenvectors of the integration and Gel'fond–Leont'ev generalized integration operators acting in the spaces of analytic functions.

Нехай X – топологічний векторний простір над полем комплексних чисел, $\mathcal{L}(X)$ – множина всіх лінійних неперервних операторів на X і A – деякий оператор з класу $\mathcal{L}(X)$. Комплексне число λ називається узагальненим власним значенням оператора A, якщо існує ненульовий оператор $T \in \mathcal{L}(X)$, для якого виконується рівність $AT = \lambda TA$. При цьому оператор T називається узагальненим власним елементом оператора A, що відповідає власному значенню λ. Відзначимо, що в роботах [1]–[3] викладені основи узагальненої спектральної теорії операторів.

В цій статті описано узагальнені власні значення та відповідні узагальнені власні елементи оператора інтегрування та узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва в деяких просторах аналітичних функцій.

1. Нехай $0 < R < \infty$, $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ і n – деяке натуральне число. Через $C^{(n)}(\overline{D_R})$ позначимо банахів простір n-кратно неперервно диференційовних на $\overline{D_R}$ функцій з нормою

$$||f||_n = \max_{0\le i\le n}\left(\max_{z\in\overline{D_R}}|f^{(i)}(z)|\right).$$

Цей простір та його узагальнення описані в [4].

В [5] у просторі $C^{(n)}(\overline{D})$ для $D = D_1$ вивчалися різні властивості оператора інтегрування $\mathcal{J}$, який неперервно діє у цьому просторі за правилом $(\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$, де інтегрування здійснюється по відрізку, що з'єднує точки 0 та z. Зокрема, в [5] показано, що згортка Дюамеля

$$(f * g)(z) = \frac{d}{dz}\int\limits_0^z f(z-t)g(t)dt$$

є неперервною за сукупністю змінних у $C^{(n)}(\overline{D})$ і відносно цієї згортки простір $C^{(n)}(\overline{D})$ є банаховою алгеброю. Зауважимо, що в [5] даний простір позначається через $C^{(n)}(D)$.

За допомогою згортки Дюамеля в [5] описані узагальнені власні значення оператора інтегрування в $C^{(n)}(\overline{D})$. Зокрема, в теоремі 2 [5] стверджується і доводиться, що множина узагальнених власних значень оператора інтегрування в просторі $C^{(n)}(\overline{D})$ збігається з множиною $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Насправді, це твердження є помилковим і множина узагальнених власних значень оператора $\mathcal{J}$ в $C^{(n)}(\overline{D})$ збігається з множиною $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \ge 1\}$ Доведенню цього факту і присвячена перша частина даної статті. Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $0 < R_1, R_2 < \infty$. Якщо операторне рівняння*

$$T\mathcal{J} = \mathcal{J}T \tag{1}$$

в класі $\mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{R_1}}), C^{(n)}(\overline{D_{R_2}}))$ має ненульовий розв'язок, то $R_2 \le R_1$.

Доведення леми проведемо методом від супротивного. Припустимо, що операторне рівняння (1) в класі операторів

$T \in \mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{R_1}}), C^{(n)}(\overline{D_{R_2}}))$ має ненульовий розв'язок T і $R_2 > R_1$. З (1) випливає, що

$$T\mathcal{J}^n = \mathcal{J}^n T \tag{2}$$

для $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $T1 = \varphi(z)$, $\varphi(z) \in C^{(n)}(\overline{D_{R_2}})$. Подіявши рівністю (2) на функцію $f(z) \equiv 1$, одержимо, що $Tz^n = n!\mathcal{J}^n\varphi(z)$. Звідси випливає, що

$$Tz^n = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \varphi(z-t)t^n dt\right), \tag{3}$$

$n = 0, 1, \ldots$. Оскільки система $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ є повною в $C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$, то з (3) випливає, що для довільної функції f з $C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$ при $|z| \le R_1$ виконується рівність

$$(Tf)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \varphi(z-t)f(t)dt\right). \tag{4}$$

За допущенням $T \neq 0$. Тому $\varphi(z) \not\equiv 0$ в крузі $|z| \le R_2$. Нехай $m = \min\{k \ge 0 : \varphi^{(k)}(0) \neq 0\}$. Виберемо далі число R_3 таким, що $R_1 < R_3 < R_2$. Оскільки вкладення простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_2}})$ у простір $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$ є неперервним, то формулою (4) визначається оператор T, який лінійно та неперервно діє з $C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$ в $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$. Для довільної функції $f \in C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$ при $|z| \le R_3$ існує m–кратна похідна від рівності (4) і при $|z| \le R_3$ формулою

$$(T_1 f)(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\left(\int_0^z \varphi(z-t)f(t)dt\right) \tag{5}$$

визначається оператор T_1 з класу $\mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{R_1}}), C^{(n)}(\overline{D_{R_3}}))$. Формулу (5) запишемо у вигляді

$$(T_1 f)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \varphi_1(z-t)f(t)dt\right), \tag{6}$$

де $\varphi_1(z) = \varphi^{(m)}(z)$ належить до простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$, причому $\varphi_1(0) = \varphi^{(m)}(0) \neq 0$. Через T_2 та T_3 позначимо оператори, які визначаються правою частиною формули (6) і діють відповідно у просторах $C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$ та $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$. Оскільки $\varphi_1 \in C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$, $R_3 > R_1$ і $\varphi_1(0) \neq 0$, то за теоремою 1 з [2] оператори T_2 та T_3 є ізоморфізмами відповідно просторів $C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$ та $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$. При цьому $(T_3^{-1}g)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \psi(z-t)g(t)dt\right)$ та $(T_1^{-1}g)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \psi(z-t)g(t)dt\right)$ для функції $g(z)$ з відповідного простору, де $\psi(z)$ – деяка функція з простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$.

Візьмемо довільну функцію $f_1(z)$ з простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$, яка не продовжується аналітично в круг $|z| < R_3$ і, отже, $g \notin C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$. Оскільки оператор T_1, який визначається формулою (6), належить до класу $\mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{R_1}}), C^{(n)}(\overline{D_{R_3}}))$, то функція $g_1(z) = (T_1 f_1)(z)$ належить до простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$, а значить і до простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$. Оскільки оператор T_3 є ізоморфізмом простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$), то функція $(T_3^{-1}g_1)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \psi(z-t)g_1(t)dt\right)$ належить до простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_3}})$), а значить є аналітичною в крузі $|z| < R_3$. Аналогічно, функція $(T_2^{-1}g_1)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \psi(z-t)g_1(t)dt\right)$ належить до простору $C^{(n)}(\overline{D_{R_1}})$), причому $(T_2^{-1}g_1)(z) = f_1(z)$. Тому формулою $f_1(z) = (T_3^{-1}g_1)(z)$ функція $f_1(z)$ аналітично продовжується до функції, яка є аналітичною в крузі $|z| < R_3$. А це неможливо згідно вибору функції $f_1(z)$. Лему 1 доведено.

Нехай $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тоді для довільного $R > 0$ оператор L_λ, що визначається формулою $(L_\lambda f)(z) = f(\lambda z)$ належить до класу $\mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{|\lambda| R}}), C^{(n)}(\overline{D_R}))$ і виконується операторна рівність

$$L_\lambda \mathcal{J} = \lambda \mathcal{J} L_\lambda, \tag{7}$$

де в правій частині рівності (7) оператор $\mathcal{J}$ діє в просторі $C^{(n)}(\overline{D_R})$, а в лівій – в $C^{(n)}(\overline{D_{|\lambda| R}})$.

Крім того, оператор L_λ є ізоморфізмом, причому $L_\lambda^{-1} = L_{\lambda^{-1}}$ і $L_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_R}), C^{(n)}(\overline{D_{|\lambda| R}}))$. Таким чином, є правильними наступні твердження.

Лема 2. *Нехай $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Оператор $\lambda\mathcal{J}$ в просторі $C^{(n)}(\overline{D_R})$ є екві-*

валентним до оператора $\mathcal{J}$ у просторі $C^{(n)}(\overline{D_{|\lambda|R}})$, причому для ізоморфізма $L_\lambda \in \mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{|\lambda|R}}), C^{(n)}(\overline{D_R}))$, виконується рівність (7).

Лема 3. *Нехай $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Для того, щоб оператор T з класу $\mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_R}), C^{(n)}(\overline{D_R}))$ задовольняв рівність*

$$\mathcal{J}T = \lambda T\mathcal{J} \tag{8}$$

необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді

$$T = \tilde{T}L_{\lambda^{-1}}, \tag{9}$$

де $\tilde{T} \in \mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{|\lambda|R}}), C^{(n)}(\overline{D_R}))$ і виконується рівність

$$\mathcal{J}\tilde{T} = \tilde{T}\mathcal{J}. \tag{10}$$

За допомогою лем 1-3 одержуємо опис узагальнених власних значень оператора інтегрування у просторі $C^{(n)}(\overline{D_R})$.

Теорема 1. *Для того, щоб число $\lambda \in \mathbb{C}$ було узагальненим власним значенням оператора інтегрування у просторі $C^{(n)}(\overline{D_R})$, необхідно і достатньо, щоб $|\lambda| \geq 1$.*

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ є узагальненим власним значенням оператора $\mathcal{J}$ в $C^{(n)}(\overline{D_R})$. Тоді $\lambda \neq 0$ і операторне рівняння (8) в класі операторів $T \in L(C^{(n)}(\overline{D_R}), C^{(n)}(\overline{D_R}))$ має ненульовий розв'язок. Тоді за лемою 3 операторне рівняння (10) в класі операторів $\tilde{T} \in \mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{|\lambda|R}}), C^{(n)}(\overline{D_R}))$ також має ненульовий розв'язок. За лемою 1, якщо рівняння (10) у вказаному класі операторів має ненульовий розв'язок $\tilde{T}$, то $R \leq |\lambda|R$, тобто $|\lambda| \geq 1$. Залишилося перевірити, що кожне комплексне число λ, $|\lambda| \geq 1$, є узагальненим власним значенням оператора $\mathcal{J}$ в $C^{(n)}(\overline{D_R})$. Проводячи аналогічні міркування, як і при доведенні леми 1, переконуємося в тому, що у випадку $|\lambda| \geq 1$ загальний розв'язок операторного рівняння (10) в класі операторів $\tilde{T} \in \mathcal{L}(C^{(n)}(\overline{D_{|\lambda|R}}), C^{(n)}(\overline{D_R}))$ дається формулою

$$(\tilde{T}f)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int\limits_0^z \varphi(z-t)f(t)dt\right), \tag{11}$$

де $\varphi(z)$ – довільна функція з простору $C^{(n)}(\overline{D_R})$. Тоді за лемою 3 загальний розв'язок рівняння (8) дається формулою (9), в якій $\tilde{T}$ визначається за формулою (11). Теорема доведена.

Зауваження 1. *При помилковому доведенні в* [5] *того, що кожне комплексне число λ, яке задовольняє умову $0 < |\lambda| < 1$ є узагальним власним значенням оператора інтегрування в просторі $C^{(n)}(\overline{D})$ задача про знаходження ненульових розв'язків операторного рівняння* (8) *зведена до опису розв'язків деякого допоміжного операторного рівняння. В* [5] *стверджується без обгрунтування, що це рівняння має ненульові розв'язки. Як випливає з доведеної вище теореми це не так.*

2. Нехай G – довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [6].

Нехай G – зіркова відносно початку координат область в $\mathbb{C}$. Оператор узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва

$$(\mathcal{J}_{\rho,\mu}f)(z) = \frac{z}{\Gamma(\frac{1}{\rho})}\int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}t^{\mu-1}f(t^{\frac{1}{\rho}}z)dt,$$

$\rho > 0$, $Re\mu > 0$, лінійно та неперервно діє в просторі $\mathcal{H}(G)$. В працях [7] та [8] вивчалися різні властивості оператора узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$. Знайдемо узагальнені власні значення цього оператора. Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

Нехай $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, G – зіркова відносно початку координат область в $\mathbb{C}$, а $\tilde{G} = \lambda G = \{\lambda z : z \in G\}$. Тоді оператор L_λ, що визначається формулою $(L_\lambda f)(z) = f(\lambda z)$ належить до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\tilde{G}), \mathcal{H}(G))$ і виконується операторна рівність

$$L_\lambda \mathcal{J}_{\rho,\mu} = \lambda \mathcal{J}_{\rho,\mu} L_\lambda, \tag{12}$$

де в правій частині рівності (1) оператор $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ діє в просторі $\mathcal{H}(G)$, а в лівій – в $\mathcal{H}(\tilde{G})$.

Крім того, оператор L_λ є ізоморфізмом, причому $L_\lambda^{-1} = L_{\lambda^{-1}}$ і $L_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H(G), H(\tilde{G}))$. Таким чином, є правильними наступні твердження.

Лема 4. *Нехай G – довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ і $\tilde{G} = \lambda G$. Тоді оператор $\lambda\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ в просторі $\mathcal{H}(G)$ є еквівалентним до оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ у просторі $\mathcal{H}(\tilde{G})$, причому для ізоморфізма $L_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\tilde{G}), \mathcal{H}(G))$ виконується рівність* (12).

Лема 5. *Нехай G – довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Для того, щоб оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G))$ задовольняв рівність*

$$\mathcal{J}_{\rho,\mu}T = \lambda T\mathcal{J}_{\rho,\mu} \tag{13}$$

необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді

$$T = \tilde{T}L_{\lambda^{-1}}, \tag{14}$$

де L_λ та $\tilde{G}$ такі ж, як і в лемі 4, *а $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\tilde{G}), \mathcal{H}(G))$ і задовольняє рівність*

$$\tilde{T}\mathcal{J}_{\rho,\mu} = \mathcal{J}_{\rho,\mu}\tilde{T}. \tag{15}$$

За теоремою з [9] для існування нетривіального розв'язку операторного рівняння (15) в класі операторів $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\tilde{G}), \mathcal{H}(G))$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $G \subset \tilde{G}$, тобто $G \subset \lambda G$. Таким чином, ненульове число $\lambda \in \mathbb{C}$ буде узагальненим власним значенням значенням оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ в $\mathcal{H}(G)$ тоді і тільки тоді, коли $G \subset \lambda G$. Якщо $\lambda = 0$, то відповідне рівняння (13) набуває вигляду $\mathcal{J}_{\rho,\mu}T = 0$. Оскільки у просторі $\mathcal{H}(G)$ існує лівий обернений оператор $D_{\rho,\mu}$ до оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ [7], то подіявши на рівність $\mathcal{J}_{\rho,\mu}T = 0$ оператором $D_{\rho,\mu}$, одержимо, що $T = 0$. Таким чином, число $\lambda = 0$ не є узагальненим власним значенням оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$. Резюмуючи вищезазначене, одержимо що є правильним твердження.

Теорема 2. *Нехай G – довільна зіркова відносно початку координат область в $\mathbb{C}$. Для того, щоб комплексне число λ було узагальненим власним значенням оператора $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ в $\mathcal{H}(G)$ необхідно і достатньо, щоб $G \subset \lambda G$. При виконанні цієї умови, множина усіх операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G))$, які задовольняють рівність* (13) *дається формулою* (14), *де $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\tilde{G}), \mathcal{H}(G))$ і задовольняє рівність* (15).

Зауваження 2. *Загальний розв'язок рівняння* (15) *в класі операторів $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(\tilde{G}))$ описано в теоремі з* [9].

Подібним чином описуються узагальнені власні значення оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва $D_{\rho,\mu}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *A. Biswas, A. Lambert, S. Petrovic* Extended eigenvalues and the Volterra operator // Glasg. Math. J. – 2002. – **44**, №3. – P. 521 - 534.

2. *Animikh Biswas and Srdjan Petrovic* On extended eigenvalues of operators // Integral Equations and Operator Theory. – 2006. – **55**, №2. – P. 233-248.

3. *Carl C. Cowen* Commutants and the operator equations $AX = \lambda XA$ // Pacific J. Math. – 1979. – **80**, №2. – P. 337-340.

4. *William J. Bland, Joel F. Feinstein* Completions of normed algebras of differentiable functions // Studia Math. 2005. – **170** . – P. 89-111.

5. *М. Т. Караев* О некоторых применениях обыкновенного и обобщенного произведений Дюамеля // Сиб. матем. журн. – 2005. – **46** , №3. – Р. 553–566.

6. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953.– **191**.– S.30–49.

7. *Линчук Н.Е.* Представление коммутантов оператора оператора обобщенного интегрирования Гельфонда-Леонтьева // Изв. ВУЗОВ. Матем. – 1985. – №5. – С. 72-74.

8. *Dimovski I.H., Kirjakova V.I.* Convolution and commutants of Gelfond-Leontiev operator of integration // Constuctive function theory'81. – Sofia, 1983. – P. 288–294.

9. *Звоздецький Т.І.* Опис розв'язків одного операторного рівняння, що містить узагальнене інтегрування Гельфонда-Леонтьєва // Математичні Студії. – 2003. – **20**, №2. – Р. 200–204.