УДК 519.217; 519.718

©2013 р. Т.О. Лукашів, В.К. Ясинський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АСИМПТОТИЧНА СТОХАСТИЧНА СТІЙКІСТЬ В ЦІЛОМУ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО-СКОРОХОДА ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ

Використано апарат функцій Ляпунова для дослідження асимптотичної стохастичної стійкості в цілому сильного розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями з урахуванням внутрішніх марковських параметрів і зовнішніх перемикань типу ланцюга Маркова.

We use the technique of Lyapunov functions for investigation of the global asymptotic stochastic stability of a strong solution of stochastic differential equations with Poisson perturbations and given internal Markov parameters and external switchings of a Markov type chain.

Вступ

Дослідження стійкості стохастичних динамічних систем у різних постановках проводились в працях [3, 6, 9, 13, 16–20]. Однак використання другого методу Ляпунова до задач стійкості систем з випадковими параметрами вперше був запропонований у праці [7]. Цей підхід дозволив використати для стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) основні результати класичної теорії стійкості. В результаті вдалося встановити ряд характерних властивостей стохастичних систем. В цьому напрямку працювали видатні математики XX–XXI ст. Й.І. Гіхман, А.В. Скороход, В.С. Королюк, Р.З. Хасьмінський, Є.Ф. Царков, Г.Дж. Кушнер та інші. У всіх згаданих роботах розглядалася в основному стійкість випадкових процесів з неперервними фазовими траєкторіями, як розв'язок СДР Іто, або випадкових процесів, які мають скінченні стрибки і описуються узагальненими стохастичними рівняннями Іто-Скорохода. У монографії І.Я. Каца [7] розглянута модель стохастичних рівнянь з марковськими параметрами, так званих рівнянь випадкової структури, які дозволяють розглядати стійкість систем з розривними фазовими траєкторіями. Відмітимо, що така ситуація природно виникає при описанні багатьох фізико-технічних задач, стану фондового (B, S)-ринку цінних паперів тощо. У монографії Є.Ф. Царкова, М.Л. Свердана [14] розглянута стійкість детермінованих різницевих і динамічних систем з урахуванням марковських параметрів та імпульсних марковських перемикань. Праці [11,12] узагальнюють окремі результати монографій [7] і [14], а саме: розглянуто стохастичне дифузійне рівняння з урахуванням марковських параметрів, які зумовлюють внутрішню зміну структури системи із збереженням властивості стохастичної неперервності реалізацій за І.Я. Кацом, а також враховуються зовнішні марковські перемикання у випадкові моменти часу за Є.Ф. Царковим. У даній роботі узагальнено результати В.К. Ясинського, І.В. Юрченка, Т.О. Лукашіва [11, 12] на випадок систем випадкової структури з пуассоновими збуреннями з урахуванням зовнішніх марковських перемикань.

1. Постановка задачі

На ймовірнісному базисі [1, 5] $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ розглянемо стохастичне диференціальне рівняння Іто-Скорохода, яке будемо трактувати як динамічну систему випадкової структури [7]

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t))dt + b(t, \xi(t), x(t))dw(t) + \int_U c(t, \xi(t), u, x(t))\tilde{\nu}(du, dt) \qquad (1)$$

із зовнішніми марковськими перемикання-

ми

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \quad (2)$$

$$t_k \in S \equiv \{t_n\} \Uparrow, n = 0, 1, 2, ..., \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty,$$

і початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^m,$$

$$\eta_{k_0} = h \in \mathbf{H}, U \subset \mathbf{R}^m. \quad (3)$$

Тут $\xi(t)$ – марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, t)$; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ — ланцюг Маркова із значеннями в метричному просторі $\mathbf{H}$ з перехідною ймовірністю на k-ому кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $x(t) \equiv x(t, \omega)$: $[0, +\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^m$; $w(t) \equiv w(t, \omega)$ — m-вимірний стандартний вінерів процес; $\tilde{\nu}(du, dt)$ — одновимірна центрована пуассонова міра [3]; траєкторії процесу $x(t)$, $t \geq 0$ належать простору Скорохода $\mathbf{D}$ неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі [1, 15].

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних відображення a: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, b: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$, c: $\mathbf{R} \times \mathbf{Y} \times U \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ та g: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ задовольняють за останнім аргументом умову Ліпшиця

$$|a(t, y, x^{(1)}) - a(t, y, x^{(2)})| + |b(t, y, x^{(1)}) -$$

$$-b(t, y, x^{(2)})| + \int_U |c(t, y, u, x^{(1)}) -$$

$$-c(t, y, u, x^{(2)})|\Pi(du) + |g(t, y, h, x^{(1)}) -$$

$$-g(t, y, h, x^{(2)})| \leq L|x^{(1)} - x^{(2)}|, L > 0, \quad (4)$$

при $\forall t \geq 0, \quad y \in \mathbf{Y}, \quad h \in \mathbf{H}$ і умову

$$|a(t, y, 0)| + |b(t, y, 0)| + \int_U |c(t, y, u, 0)|\Pi(du) +$$

$$+|g(t, y, h, 0)| = L_1 < \infty. \quad (5)$$

Вказані умови щодо a, b, c і g гарантують існування сильного розв'язку задачі (1)—(3) з точністю до стохастичної еквівалентності при будь-яких $t_0 \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^m$ і заданих реалізаціях y марковського процесу $\{\xi(t), t \geq t_0\} \in \mathbf{Y}$ і реалізаціях h ланцюга Маркова $\{\eta_k, k \geq k_0\}$ [2,4].

2. Основні означення

Випадкові зміни структури параметра $\xi(t) \in \mathbf{Y}$ в дифузійному СДР (1), як правило, будемо враховувати одним із таких способів [7, 14–16].

I. Нехай $\xi(t) \in \mathbf{Y}$ – суто розривний скалярний марковський процес, умовна ймовірність якого допускає розклад [4]

$$\mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) \in [\beta, \beta + \Delta\beta]/\xi(t) = \alpha \neq \beta\} =$$

$$= p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau < t + \Delta t/\xi(t) = \alpha\} =$$

$$= 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t),$$

де $P\{\cdot/\cdot\}$ — умовна ймовірність; $o(\Delta t)$ — нескінченно мала величина вищого порядку малості відносно Δt. Зазначимо, що за умови регулярності майже всі реалізації є кусково-сталими неперервними справа функціями.

II. Скалярний процес $\xi(t)$ — однорідний марковський ланцюг зі скінченним числом станів $\mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ і відомими параметрами q_{ij} за умови $q_i = \sum\limits_{j\neq i} q_{ij}, \quad i, j = \overline{1, k}$. При цьому умовні ймовірності допускають розклад

$$\mathbf{P}\{\xi(t + \Delta t) = y_i/\xi(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = y_i, t < \tau < t + \Delta t/\xi(t) = y_i\} =$$

$$= 1 - q_i\Delta t + o(\Delta t).$$

III. У момент τ зміни структури системи $y_i \to y_j$ відбувається випадкова стрибкоподібна зміна фазового вектора $x(\tau - 0) = x$, $x(\tau) = z$, для якого задана умовна щільність $p_{ij}(\tau, z)$, а саме:

$$\mathbf{P}\{x(\tau) \in [z, z + dz]/\xi(t - 0) = x\} =$$

$$= p_{ij}(\tau, z/x)dz + o(dz).$$

Позначимо через $\mathbf{P}_k((y, h), \Gamma\times G)$ перехідну ймовірність ланцюга Маркова $(\xi(t_k), \eta_k)$ на k-ому кроці. Відповідно до прийнятих в теорії ймовірностей позначень [4, 5, 17] (пов'язаних із цим ланцюгом) введемо індекси так, щоб виконувались рівності

$$\mathbf{P}^{t_k}_{y,h}(\xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G) \equiv \mathbf{P}_k((y, h), \Gamma\times G)$$

при всіх $t_k \geq t_0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ і борелевих $\Gamma \in \mathbf{Y}$ та $G \in \mathbf{H}$.

Тепер введемо функцію

$$\mathbf{P}_k((y,h,\varphi),\Gamma \times G \times C) \equiv$$
$$\equiv \mathbf{P}^{t_k}_{y,h}(x(t_{k+1},t_k,y,h) \in C,$$
$$\xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G)$$

при всіх $t_k \in S \cup \{t_0\}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ і борелевих $C \subset \mathbf{R}^m$, $\Gamma \subset \mathbf{Y}$, $G \subset \mathbf{H}$.

Означення 1. *Послідовністю дискретних операторів Ляпунова $(lv_k)(y,h,x)$ на послідовності вимірних скалярних функцій $v_k(y,h,x)$: $\mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^m \to \to \mathbf{R}^1, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, для СДР (1) із зовнішніми марковськими перемиканнями (2) визначимо наступним чином [4]*

$$lv_k(y,h,x) \equiv \int\limits_{\mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbf{R^m}} \mathbf{P}_k(y,h,x)(du \times dz \times dl) \cdot$$
$$\cdot v_{k+1}(u,z,l) - v_k(y,h,x). \qquad (6)$$

Згідно з [14, 18] дискретний оператор Ляпунова lv_k на розв'язках системи (1)–(3) має вигляд

$$lv_k(y,h,x) = \mathcal{L}v_k(t,y,h,x) = \frac{\partial v_k(t,y,h,x)}{\partial t} +$$
$$+\Big(\frac{\partial v_k(t,y,h,x)}{\partial x}\Big)^T a(t,y,h,x) +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\Big(\nabla^2_{xx} v_k(t,y,h,x) b(t,y,h,x) \cdot$$
$$\cdot b^T(t,y,h,x)\Big) +$$
$$+\int\limits_U \Big[v_k(t,y,h,x+c(t,y,h,x)) - v_k(t,y,h,x) -$$
$$-((\nabla_x v_k(t,y,h,x)), c(t,y,h,x,u))\Big]\Pi(du) +$$
$$+\sum_{j\neq i}[v_k(t,y_j,h,x) - v_k(t,y_i,h,x)]q_{ij}.$$

Означення 2. *Послідовністю функцій Ляпунова для системи випадкової структури (1)–(3) назвемо послідовність невід'ємних функцій $\{v_k(y,h,x), k \geq 0\}$ таких, що виконуються умови:*

1) при всіх $k \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{R}^m$ визначено дискретний оператор Ляпунова $(lv_k)(y,h,x)$;

2) при $r \to +\infty$

$$\underline{v}(r) \equiv \inf_{\substack{k\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{Y} \\ h\in\mathbf{H}, |x|\geq r}} v_k(y,h,x) \to +\infty; \qquad (7)$$

3) при $r \to 0$

$$\overline{v}(r) \equiv \sup_{\substack{k\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{Y} \\ h\in\mathbf{H}, |x|\leq r}} v_k(y,h,x) \to 0, \qquad (8)$$

причому $\bar{v}(r)$ і $\underline{v}(r)$ неперервні і монотонні.

Розглянемо стійкість тривіального розв'язку $x \equiv 0$ системи (1)–(3) за умов (5) при $c = 0$.

Оскільки сильний розв'язок $x(t) \equiv x(t,\omega) \in \mathbf{R}^m$ СДР (1) однозначно визначається за допомогою початкових даних $x(t_0) = x_0$, $\xi(t_0) = y$, $\eta_{k_0} = h$, то надалі його позначатимемо $x(t,t_0,y,h,x_0)$.

Означення 3. *Систему випадкової структури (1)–(3) назвемо:*

– стійкою за ймовірністю в цілому, якщо для $\forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з нерівності $|x| < \delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq t_0} |x(t,t_0,y,h,x)| > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{R}^m$ і $t_0 \geq 0$;

– асимптотично стохастично стійкою в цілому, якщо вона стійка за ймовірністю в цілому і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_1 > 0$ таке, що

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq T} |x(t,t_0,y,h,x)| > \varepsilon\right\} = 0$$

при всіх $|x| < \delta_1$, $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{R}^m$ і $T \geq t_0 \geq 0$.

3. Стійкість систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями

Встановимо достатні умови стійкості тривіального розв'язку динамічної системи (1) – (3) випадкової структури з пуассоновими збуреннями у різних ймовірнісних розуміннях.

Одержимо оцінку розв'язку задачі (1)–(3) на інтервалах $[t_k, t_{k+1})$, яка наведена нижче у лемі 1.

Лема 1. *При виконанні умов (4), (5) при всіх $k \ge 0$ для сильного розв'язку задачі Коші (1)–(3) має місце нерівність*

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} |x(t)|^2\right\} \le$$

$$\le 21(1+2L)e^{9L^2(t_{k+1}-t_k)^2}(\mathbf{E}\left\{x^2(t_k)\right\} +$$

$$+3L_1^2(t_{k+1}-t_k)). \qquad (9)$$

Доведення. При всіх $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k \ge 0$, використовуючи інтегральну форму запису процесу $x(t)$, можна одержати нерівність

$$|x(t)| \le |x(t_k)| + \int_{t_k}^{t} |a(\tau, y, x(\tau)) - a(\tau, y, 0)| d\tau +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} |a(\tau, y, 0)| d\tau + \int_{t_k}^{t} |b(\tau, y, x(\tau)) -$$

$$-b(\tau, y, 0)| dw(\tau) + \int_{t_k}^{t} |b(\tau, y, 0)| dw(\tau) +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} \int_{U} |c(\tau, y, u, x(\tau)) - c(\tau, y, u, 0)| \tilde{\nu}(du, d\tau) +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} |c(\tau, y, u, 0)| \tilde{\nu}(du, d\tau).$$

Піднесемо до квадрата ліву і праву частини одержаної нерівності, обчислимо sup від одержаного виразу, тоді використовуючи нерівність Коші-Буняковського [10] і нерівність для оцінки умовного математичного сподівання від квадрата супремума інтеграла Вінера-Іто та інтеграла Скорохода, враховуючи (4), (5), одержимо

$$\mathbf{E}\Big\{\sup_{t_k \le t < t_{k+1}} |x(t)|^2 / \mathfrak{F}_{t_k}\Big\} \le 7\Bigg[\mathbf{E}\{x^2(t_k)/\mathfrak{F}_{t_k}\} +$$

$$+2L_1^2(t_{k+1}-t_k) + 9L^2(t_{k+1}-t_k) \cdot$$

$$\cdot \mathbf{E}\Big\{\sup_{t_k \le t < t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |x(\tau)|^2 d\tau / \mathfrak{F}_{t_k}\Big\}\Bigg].$$

Далі, застосовуючи нерівність Гронулла [10], легко побачити, що

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k \le t < t_{k+1}} |x(t)|^2 / \mathfrak{F}_{t_k}\right\} \le 7(\mathbf{E}\{x^2(t_k)\} +$$

$$+3L_1^2(t_{k+1}-t_k))e^{9L^2(t_{k+1}-t_k)^2}.$$

Зрозуміло, що для $t = t_{k+1}$ сильний розв'язок системи (1)–(3), очевидно, повинен задовольняти нерівність

$$\mathbf{E}\{|x(t_{k+1})|^2/\mathfrak{F}_{t_k}\} \le 3[\mathbf{E}\{|x^2(t_{k+1}-|/\mathfrak{F}_{t_k}\} +$$

$$+2\mathbf{E}\{|g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, x_{k+1}) -$$

$$-g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, 0)|^2/\mathfrak{F}_{t_k}\} +$$

$$+2\mathbf{E}\{|g(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, 0)|^2/\mathfrak{F}_{t_k}\}] \le$$

$$\le 3[(1+2L)\mathbf{E}\Big\{\sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} |x(t)|^2/\mathfrak{F}_{t_k}\Big\} + 2L_1^2].$$

Об'єднуючи дві останні нерівності, одержимо потрібну нерівність (9) леми 1.

Зауваження 1. В подальшому, не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $L_1 = 0$ в (9), а також

$$k_0 = \begin{cases} \sup\{k \in \mathbb{N} \,|\, t_k \le t_0|\}, & t_0 \ge t_1, \\ 0, & t \in [0, t_1). \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай для системи СДР (1) – (3) мають місце:*

1) $0 < |t_{k+1} - t_k| \le \Delta, \quad k \ge 0, \quad \Delta > 0$*;*

2) виконується умова Ліпшиця (4);

3) існують послідовності невід'ємних функцій Ляпунова $v_k(y,h,x) \ge 0$ і $a_k(y,h,x) \ge 0$, $k \ge 0$, такі, що на підставі системи правильна нерівність

$$lv_k(y,h,x) \le -a_k(y,h,x) \qquad (10)$$

Тоді сильний розв'язок системи випадкової структури (1)–(3) із зовнішніми збуреннями типу ланцюга Маркова (2) асимптотично стохастично стійкий в цілому.

Доведення Позначимо через $\mathfrak{F}_{t_k}$ — мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні $\xi(t)$

при всіх $t \in [t_0, t_k]$ і η_n при $n \leq k$. Тоді умовне математичне сподівання можна обчислити за формулою [2, 17]

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\} =$$

$$= \int\limits_{Y \times H \times \mathbf{R}^m} \mathbf{P_k}(y, h, x)(du \times dz \times dl) \cdot$$

$$\cdot v_{k+1}(u, z, l)\Big|_{\substack{y = \xi(t_k) \\ h = \eta_k \\ x = x(t_k)}}. \tag{11}$$

У цьому випадку за означенням дискретного оператора Ляпунова $(lv_k)(y, h, x)$ з рівності (11) одержимо, враховуючи (10), нерівність

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\} =$$

$$= v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) + (lv_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \leq$$

$$\leq \overline{v}(|x(t_k)|). \tag{12}$$

З нерівності (9) (за нерівністю Ляпунова для моментів [4, 5] з існування другого моменту випливає існування першого моменту) і властивостей функції $\overline{v}$ випливає існування умовного математичного сподівання лівої частини нерівності (12).

Тепер, на основі (11), запишемо дискретний оператор Ляпунова $(lv_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$ вздовж розв'язків (1)–(3):

$$(lv_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) =$$

$$= \mathbf{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\} -$$

$$- v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \leq$$

$$\leq -a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \leq 0. \tag{13}$$

Тоді при $k \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\} \leq$$

$$\leq v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)).$$

Далі, за означенням супермартингала [5], послідовність випадкових величин $\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\}$ при $k \in \mathbf{N}$ утворює супермартингал відносно $\mathfrak{F}_{t_k}$ [14].

Залишилося взяти математичне сподівання від обох частин нерівності (13) і просумувати по k від $n \geq k_0$ до N. Тоді одержимо

$$\mathbf{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} -$$

$$- \mathbf{E}\{v_n(\xi(t_n), \eta_n, x(t_n))\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\{lv_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq$$

$$\leq -\sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq 0. \tag{14}$$

Накінець, за властивістю монотонності ймовірності, одержимо оцінки

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\Big\} =$$

$$= \mathbf{P}\Big\{\sup_{n \in \mathbf{N}} \sup_{t_{k_0+n-1} \leq t \leq t_{k_0+n}} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\Big\} \leq$$

$$\leq \Big\{\sup_{n \in \mathbf{N}} |x(t_{k_0+n-1}, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\Big\} \leq \tag{15}$$

$$\leq \Big\{\sup_{n \in \mathbf{N}} v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1},$$

$$x(t_{k_0+n-1})) \geq \overline{v}(\varepsilon_1)\Big\} \; \forall \varepsilon_1 > 0.$$

Дійсно, якщо $\sup |x(t_k)| \geq r$, то на основі (7) виконується нерівність

$$\sup_{k \geq k_0} v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \geq$$

$$\geq \inf_{\substack{k \geq k_0, y \in \mathbf{Y} \\ h \in \mathbf{H}, |x| \geq r}} v_k(y, h, x) = \overline{v}(r).$$

Тепер використаємо відому нерівність для невід'ємних супермартингалів [4] для оцінки правої частини (15) і в результаті остаточно одержимо:

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{n \in \mathbf{N}} v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x(t_{k_0+n-1})) \geq$$

$$\geq \overline{v}(\varepsilon_1)\Big\} \leq \frac{1}{\overline{v}(\varepsilon_1)} v_{k_0}(y, h, x) \leq \frac{\overline{v}(|x|)}{\overline{v}(\varepsilon_1)}. \tag{16}$$

Враховуючи нерівність (15), нерівність (16) дає можливість гарантувати виконання нерівності

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\Big\} < \varepsilon_2, \forall \varepsilon_1 > 0,$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0,$$

а це означає, що система (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому (за означенням 3).

Далі, з нерівності (14) випливає оцінка

$$\mathbf{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}),\eta_{N+1},x(t_{N+1}))\} \le v_{k_0}(y,h,x)-$$
$$-\sum_{k=k_0}^{N}\mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))\} \le v_{k_0}(y,h,x). \tag{17}$$

при всіх $N \ge k_0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{R}^m$.

На підставі того, що члени послідовності $\{a_k\}$, $k \ge 0$, є функціями Ляпунова, існують неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(r)$ і $\overline{a}(r)$ такі, що

$$\overline{a}(|x|) \le a_k(y,h,x) \le \underline{a}(|x|),$$

$\forall k \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{R}^m$, $\underline{a}(0) = \overline{a}(0) = 0$.

Отже, із збіжності ряду (17) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\mathbf{E}\{a_k(|x(t_k,t_0,y,h,x)|)\},$$

$$\forall t_0 \ge 0,\quad y \in \mathbf{Y},\quad h \in \mathbf{H},\quad x \in \mathbf{R}^m.$$

Тоді в силу неперервності $\underline{a}(r)$ і рівності $\underline{a}(0) = 0$ матимемо

$$\lim_{k\to\infty}|x(t_k,t_0,y,h,x)| = 0. \tag{18}$$

З (18) випливає прямування до нуля за ймовірністю послідовності $\overline{v}(|x(t_k,t_0,y,h,x)|)$ при $k \to \infty$ для всіх $\forall t_0 \ge 0$, $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{R}^m$.

Отже, з властивостей функцій Ляпунова [11,14] робимо висновок, що невід'ємний супермартингал $v_k(\xi(t_k),\eta_k,x(t_k))$ при $k \to \infty$ прямує до нуля за ймовірністю при всіх реалізаціях процесу $\xi(t) \equiv \xi(t,\omega)$ і послідовності $\{\eta_k\}, k \le 1$.

Враховуючи, що невід'ємний обмежений зверху супермартингал має границю з імовірністю одиниця [5], та використовуючи (9), одержимо

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\ge T}|x(t_k,t_0,y,h,x)| > \varepsilon\Big\} = 0,$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{R}^m$ і $T \ge t_0 \ge 0$. А це означає асимптотичну стохастичну стійкість в цілому сильного розв'язку системи (1)–(3). Теорема 1 доведена.

Як наслідок теореми 1 випливає

Теорема 2. *Нехай для СДР (1) з умовами (2), (3):*

1) виконуються умови 1), 2) теореми 1;

2) на підставі системи (1)–(3) для послідовності функцій Ляпунова $\{v_k,\ k \ge 0\}$ виконується нерівність $(lv_k)(y,h,x) < 0$ $\forall k \ge 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $x \in \mathbf{R}^m$.

Тоді динамічна система випадкової структури (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому.

Висновки. Встановлено достатні умови стійкості за ймовірністю в цілому, асимптотичної стохастичної стійкості в цілому розв'язків стохастичних динамічних систем випадкової структури з пуассоновими збуреннями і зовнішніми марковськими перемиканнями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М. : Наука, 1977. – 361 с.
2. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. – М. : Физматгиз, 2005. – 408 с.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. – К. : Наукова думка, 1982. – 612 с.
4. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М. : Физматгиз, 1969. – 859 с.
5. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. – М. : Физматгиз, 1963. – 605 с.
6. *Джалладова I.A.* Оптимізація стохастичних систем. – К. : КНЕУ, 2005. – 284 с.
7. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург : УГАПС, 1998. – 222 с.
8. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М. : Наука, 1984. – 448 с.
9. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – К. : Наукова думка, 1989. – 208 с.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1989. – 623 с.

11. *Лукашив Т.О., Юрченко И.В., Ясинский В.К.* Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. I. Общие теоремы об устойчивости импульсных стохастических систем // Кибернетика и системный анализ. – 2009.– № 2. – С. 135-145.
12. *Лукашив Т.О., Юрченко И.В., Ясинский В.К.* Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. II. Устойчивость по первому приближению импульсных стохастических систем с марковскими параметрами // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 146-158.
13. *Мильмар В.Д., Мышкис А.Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. – 1960. – Т.1, № 2. – С. 233-237.
14. *Свердан М.Л., Царьков Е.Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем. – Рига : РТУ, 1994. – 300 с.
15. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – К. : Наукова думка, 1987. – 328 с.
16. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
17. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига : Зинатне, 1989. – 421 с.
18. *Ясинський В.К., Ясинський Є.В.* Задачі стійкості і стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. – К. : ТВіМС, 2005. – 578 с.
19. *Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В.* Стабілазація у динамічних системах випадкової структури. – Чернівці: Золоті литаври, 2011. – 738 с.
20. *Ясинская Л.И., Ясинский В.К.* Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием при наличии пуассоновских возмущений // Стохастические системы и их приложения. – К. : Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 108-120.