УДК 517.944 + 512.625.5

©2013 р. В.М. Лучко, В.С. Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДВОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НАД ПОЛЕМ p – АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

Над полем p–адичних чисел побудовано та вивчено властивості розв'язку двоточкової крайової задачі для параболічного рівняння.

We construct a solution of a two-point boundary value problem for a parabolic equation over the field of p-adic numbers and study its properties.

1. Вступ. У 90–х роках минулого століття у математичній фізиці зріс інтерес до p – адичних чисел. У теорії суперструн (М. Гріна, Дж. Шварца і Е. Віттена [2] та І.В. Воловіча, І.Я. Ареф'євої [3]), яка апелює до фантастично малих відстаней, порядку 10^{-33} см, немає причин рахувати, що звичайні представлення про простір-час там можуть бути застосовані.

Однією з альтернативних можливостей для описання структури простору-часу є використання поля $\mathbb{Q}_p$ p – адичних чисел замість множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел. На можливість використання p – адичних чисел у математичній фізиці було вперше вказано у 1984 р. у роботі [4] Владімірова В.С. і Воловіча І.В.

У праці [1] побудована теорія узагальнених функцій над простором функцій з $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{C}$, яка застосовується до тих задач, що виникають у математичній фізиці. Теорія у багато чому аналогічна відповідній теорії над множиною $\mathbb{R}$, але є певні суттєві відмінності. Основну увагу приділяється теорії згортки, перетворенню Фур'є, аналогу оператора Рімана-Ліувіля, обчисленню інтегралів.

Параболічні рівняння над полем p – адичних чисел вивчалися у праці А.Н. Кочубея [5]. В ній при певних припущеннях відносно коефіцієнтів побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші, доведені існування та єдиність розв'язку у класах зростаючих функцій, знайдені умови невід'ємності фундаментального розв'язку.

2. Основні поняття p – адичного аналізу. Наведемо деякі твердження p – адичного аналізу, які будуть використовуватися в подальшому. Детальне їх викладення міститься у [1, 6, 8].

Нехай p – просте число ($p = 2, 3, 5, ..., 137, ...$), яке буде фіксованим. Введемо на множині $\mathbb{Q}$ норму $|x|_p$ за правилом $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\gamma}$, якщо раціональне число x подане у вигляді

$$x = p^{\gamma}\frac{m}{n},$$

де $\{m, n, \gamma\} \subset \mathbb{Z}$, m, n не діляться на p. Доповнення $\mathbb{Q}$ за p – адичною нормою утворює поле $\mathbb{Q}_p$ p – адичних чисел.

Норма $|\cdot|_p$ володіє наступними властивостями: $|x|_p = 0$ у тому випадку, коли $x = 0$; $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$; $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$, причому якщо $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x + y|_p = \max(|x|_p, |y|_p)$. Таким чином p – адична норма неархімедова.

Метрика $\rho(x, y) = |x - y|_p$ перетворює поле $\mathbb{Q}_p$ у сепарабельний цілком незв'язний локально компактний метричний простір. На $\mathbb{Q}_p$ існує (єдина, з точністю до множника) міра dx, інваріантна відносно додавання. При цьому якщо $a \in \mathbb{Q}_p$, $a \neq 0$, то $d(xa) = |a|_p dx$. Будемо нормувати міру так, що

$$\int\limits_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Простір $\mathbb{Q}_p$ є об'єднанням зліченної сім'ї попарно неперетинних множин

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} \{x : |x|_p = p^\nu\},$$

при цьому

$$\int\limits_{|x|_p=p^\nu} dx = p^\nu \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Введемо у розгляд клас $\mathfrak{M}_\gamma (\gamma \geq 0)$ комплекснозначних функцій $\varphi(x)$ на $\mathbb{Q}_p$, які задовольняють умови:

1) $|\varphi(x)| \leq c\,(1 + |x|_p)^\gamma$;

2) існує натуральне число $N = N(\varphi)$ таке, що для довільного $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), \quad |x'| \leq p^{-N}.$$

Функція φ, що задовольняє умови 1), 2) називається локальною сталою, а число N показником локальної сталості функції φ. Якщо функція φ залежить також від параметра t, будемо говорити, що $\varphi \in \mathfrak{M}_\gamma$ рівномірно по t, якщо константа c і показник N не залежить від t.

Множину фінітних функцій з $\mathfrak{M}_0$ будемо позначати $\mathfrak{D}$. Нехай χ – нормований адитивний характер поля $\mathbb{Q}_p$, тоді $\chi \in \mathfrak{M}_0$. Перетворення Фур'є функцій $\varphi \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$ визначається формулою

$$F(\varphi) \equiv \widetilde{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(\xi x)\varphi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Обернене перетворення

$$F^{-1}(\varphi) \equiv \varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(-\xi x)\widetilde{\varphi(x)}dx, \ x \in \mathbb{Q}_p$$

існує, якщо $\widetilde{\varphi} \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$.

Має місце формула [1]

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p)\chi(\xi x)dx =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\xi|_p^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(p^{-\nu}|\xi|_p^{-1}\right) p^{-\nu} -$$

$$-|\xi|_p^{-1} f\left(p|\xi|_p^{-1}\right), \tag{1}$$

де $\xi \neq 0$ і припускається збіжність ряду $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu})p^{-\nu}$.

Оператор D^γ диференціювання порядку $\gamma > 0$ визначений на функціях $\varphi \in \mathfrak{D}$ формулою [1]

$$(D^\gamma\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \left\{ \int\limits_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{-\gamma-1}[\varphi(x-y) - \right.$$

$$-\varphi(x)]dy + \int\limits_{|y|_p>1} |y|_p^{-\gamma-1}\varphi(x-y)dy +$$

$$\left. + \frac{1-p^{-1}}{1-p^\gamma}\varphi(x) \right\}, \tag{2}$$

де $\Gamma_p(s) = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}}$ – p – адичний аналог гама-функції.

У другому інтегралі правої частини (2) додамо і віднімемо $|y|_p^{-\gamma-1}\varphi(x)$. Та скористаємося тим, що

$$\int\limits_{|y|_p>1} |y|_p^{-\gamma-1}dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{|y|_p=p^\nu} |y|_p^{-\gamma-1}dy =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu\gamma} = \frac{p-1}{p(p^\gamma - 1)}.$$

Тому

$$(D^\gamma\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\gamma-1}[\varphi(x-y) - \varphi(x)]dy.$$

Таким чином оператор D^γ визначений на всіх функціях $\varphi \in \mathfrak{M}_\beta$, $0 \leq \beta < \gamma$. Якщо $\varphi \in \mathfrak{D}$, то перетворення Фур'є, у сенсі узагальнених функцій, функції $D^\gamma\varphi$ дорівнює $|\xi|^\gamma\widetilde{\varphi}(\xi)$.

3. Основний результат. Розглянемо двоточкову крайову задачу для параболічного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a\,(D^\alpha u)(t,x) = 0, \tag{3}$$

$x \in \mathbb{Q}_p, t \in (0,T)$,

$$u(t,x)|_{t=0} - \mu u(t,x)|_{t=T} = \varphi(x), \tag{4}$$

де $\varphi \in \mathfrak{M}_0$, $a > 0$, $\alpha \geq 1$.

Як і в евклідовому випадку, перший крок полягає у побудові фундаментального розв'язку рівняння (3). Розв'язок задачі (3), (4) будемо шукати у вигляді

$$u(t,x) = F^{-1}(V(t,\sigma)),$$

де $V(t,\sigma)$ є розв'язком двоточкової крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dV(t,\sigma)}{dt} + a|\sigma|_p^\alpha V(t,\sigma) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{Q}_p, \quad (5)$$

$$V(t,\sigma)|_{t=0} - \mu V(t,\sigma)|_{t=T} = \widetilde{\varphi}(\sigma). \quad (6)$$

Розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$V(t,\sigma) = ce^{-a|\sigma|_p^\alpha t}.$$

Враховуючи крайові умови (6) маємо

$$c - \mu c e^{-a|\sigma|_p^\alpha T} = \widetilde{\varphi}(\sigma)$$

або

$$c = \frac{\widetilde{\varphi}(\sigma)}{1 - \mu e^{-a|\sigma|_p^\alpha T}}.$$

Тоді розв'язок задачі (5), (6) набуде вигляду

$$V(t,\sigma) = \frac{\widetilde{\varphi}(\sigma) e^{-a|\sigma|_p^\alpha t}}{1 - \mu e^{-a|\sigma|_p^\alpha T}}. \quad (7)$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до (7) отримуємо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} G(t, x-\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

де

$$G(t,x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) \frac{e^{-a|\sigma|_p^\alpha t}}{1 - \mu e^{-a|\sigma|_p^\alpha T}} d\sigma.$$

Лема 1. *Якщо $|\mu|_p < 1$, то має місце нерівність*

$$|G(t,x)| \leq c \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|_p (t+Tj) \times$$

$$\times \left((t+Tj)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}. \quad (8)$$

Доведення. З припущення, що $|\mu|_p < 1$, функцію $G(t,x)$ можна подати у вигляді

$$G(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|_p \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) e^{-a|\sigma|_p^\alpha t} \times$$

$$\times e^{-a|\sigma|_p^\alpha Tj} d\sigma \equiv \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|_p G_j(t,x). \quad (9)$$

З (9) видно, що функції G_j неперервні по $x \in \mathbb{Q}_p$. Оцінимо їх. Враховуючи зображення функції $G_j(t,x)$ отримаємо

$$|G_j(t,x)| \leq \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\sigma|_p^\alpha (t+Tj)\} d\sigma.$$

Нехай ціле число k таке, що $p^{k-1} \leq (t+Tj)^{\frac{1}{\alpha}} \leq p^k$. Виберемо $\tau \in \mathbb{Q}_p$, щоб $|\tau|_p = p^{k-1}$. Тоді

$$|G_j(t,x)| \leq \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-ap^{\alpha(k-1)}|\sigma|_p^\alpha\} d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\tau\sigma|_p^\alpha\} d\sigma =$$

$$= |\tau|_p^{-1} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\eta|_p^\alpha\} d\eta =$$

$$= p^{-k} p \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\eta|_p^\alpha\} d\eta \leq C(t+Tj)^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (10)$$

Використовуючи формулу (1) при $x \neq 0$, отримаємо

$$G_j(t,x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |x|_p^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu} \times$$

$$\times \exp\{-a(t+Tj)p^{-\alpha\nu}|x|_p^{-\alpha}\} -$$

$$- |x|_p^{-1} \exp\{-a(t+Tj)p^\alpha |x|_p^{-\alpha}\}.$$

Розкладаючи експоненти у ряд, міняючи порядок сумування і просумувавши геометричну прогресію, отримаємо, що для $x \neq 0$

$$G_j(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1 - p^{\alpha m}}{1 - p^{-\alpha m - 1}} \times$$

$$\times\left(a(t+Tj)\right)^m |x|_p^{-\alpha m-1}. \tag{11}$$

Із (11) отримуємо, що для $0<t<T$, $|x|_p \geq (t+Tj)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$|G_j(t,x)| \leq |x|_p^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c^m}{m!}\left((t+Tj)|x|_p^{-\alpha}\right)^m \leq$$

$$\leq |x|_p^{-1}\left[\frac{c}{1!}(t+Tj)|x|_p^{-\alpha}+...+\right.$$

$$\left.+\frac{c^m}{m!}(t+Tj)^m|x|_p^{-m\alpha}+...\right] = |x|_p^{-\alpha-1}(t+Tj)\times$$

$$\times\left[\frac{c}{1!}+...+\frac{c^m}{m!}(t+Tj)^{m-1}|x|_p^{-m\alpha-1}+...\right] \leq$$

$$\leq |x|_p^{-\alpha-1}(t+Tj)\left[\frac{c}{1!}+...+\frac{c^m}{m!}(t+Tj)^{m-1}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{(t+Tj)^{m-1}}+...\right] \leq c_1|x|_p^{-\alpha-1}(t+Tj). \tag{12}$$

Із нерівностей (10) та (12) отримуємо (8). Дійсно, якщо $|x|_p \geq (t+Tj)^{\frac{1}{\alpha}}$, то

$$|x|_p^{-\alpha-1} \leq c\left(|x|_p+(t+Tj)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha-1}.$$

Якщо ж $|x|_p < (t+Tj)^{\frac{1}{\alpha}}$, то

$$\left(|x|_p+(t+Tj)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha-1} \geq c(t+Tj)^{-1}(t+Tj)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Лема доведена.

Нерівність (8) показує, що по змінній x функція $G(t,x)$ належить $L_1(\mathbb{Q}_p,dx)$, то із (9) і формули перетворення Фур'є знаходимо, що

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} G(t,x)dx = 1. \tag{13}$$

Розглянемо похідну $\frac{\partial G}{\partial t}$. Очевидно, що (9) можна диференціювати під знаком інтегралу

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -a\sum_{j=0}^{\infty}|\mu|_p\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|\sigma|_p^{\alpha}e^{-a|\sigma|_p^{\alpha}t}e^{-a|\sigma|_p^{\alpha}Tj}d\sigma. \tag{14}$$

Лема 2. *Якщо $|\mu|_p<1$, то має місце нерівність*

$$\left|\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}\right| \leq c\sum_{j=0}^{\infty}|\mu|_p\left((t+Tj)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\alpha-1}. \tag{15}$$

Доведення аналогічне лемі 1.

Отже, правильним є таке твердження.

Теорема. *Нехай $|\mu|_p<1$, $\varphi\in\mathfrak{M}_\beta$, $\beta<\alpha$. Тоді розв'язок двоточкової задачі (1), (2) існує і подається у вигляді*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} G(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

де фундаментальний розв'язок $G(t,x)$ має вигляд (9) і для нього мають місце оцінки (8), (15).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции над полем p – адитических чисел // УМН. – 1988. – Т. 43, вып. 5. – С. 17-53.

2. *Green M.B., Schwarz J.H., Witten E.* Superstring Theory. – Cambridge. CUP, 1987.

3. *Арефьева И.Я., Волович И.В.* Суперсимметрия: теория Калуцы-Клейна, аномалии, суперструны // УФН. – 1985. – Т. 146, вып. 4. – С. 655-681.

4. *Владимиров В.С., Волович И.В.* Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление // ТМФ. – 1984. – Т. 59, № 1. – С. 3-27.

5. *Кочубей А. Н.* Параболические уравнения над полем р-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1991. – Т. 55, №6. – С. 1312-1330.

6. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1985. – 504 с.

7. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятецкий-Шапиро И.И.* Теория представлений и автоморфные функции. – М.: Наука, 1966. – 512 с.