УДК 515.12, 517.51

©2013 р. В.К.Маслюченко, О.Д.Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОБУТОК СІДРА ТА ВИЧЕРПНІ ПРОСТОРИ

Для топологічних просторів X та Y і точки $b \in Y$ введено нове поняття добутку Сідра $X \times_b Y$, яке має своїм джерелом поняття площини Сідра $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times_0 [0, +\infty)$. Доведено, що для вичерпних (зокрема, метризовних) просторів X і Y і добуток Сідра $X \times_b Y$ буде вичерпний, якщо множина $\{b\}$ замкнена в Y.

We introduce a new notion of a Ceder product $X \times_b Y$ for any topological spaces X and Y and a point $b \in Y$. This notion generalizes the notion of the Ceder plane $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times_0 [0, +\infty)$. We prove that the Ceder product $X \times_b Y$ of stratifiable (in particular, metrizable) spaces X and Y is stratifiable if the set $\{b\}$ is closed in Y.

1. Вступ

У праці [1] Дж. Сідр увів три класи просторів M_i $(i = 1, 2, 3)$ з допомогою відповідно баз, квазібаз чи парабаз, які зберігають замикання, при цьому $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3$. Пізніше К. Борґес [2] запропонував інший підхід до означення просторів з класу M_3, ввівши для них нову назву: вичерпні простори (stratifiable spaces). Щодо еквівалентності цих двох означень у [2] зроблено лише скупі вказівки з посиланням на дисертацію Дж. Сідра (1959). Крім того, Дж. Сідр навів приклад [1, example 9.1] неметризовного простору класу M_1, який задовольняє першу аксіому зліченності. Як і відома площина Немицького [3, с. 47], цей простір – це півплощина $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ зі спеціальним чином введеною топологічною структурою. Його ми позначаємо символом $\mathbb{M}$ і називаємо *площиною Сідра*. Оскільки $M_1 \subseteq M_3$, то, як оголошено в [2], площина Сідра буде вичерпним простором. Але реконструювати доведення цього факту за статею [2] непросто. Тому постало питання про його безпосереднє доведення. В результаті пошуків такого доведення ми ввели загальніші простори і дослідили коли на цих просторах можна явно побудувати вичерпування.

Топологічний простір Z називається *вичерпним /напіввичерпним/*, якщо існує таке відображення $s : \mathcal{T}(Z) \times \mathbb{N} \to \mathcal{F}(Z)$, яке кожній відкритій в Z множині U і кожному номеру n ставить у відповідність замкнену в Z множину $F_n(U) = s(U, n)$ так, що для довільних U і V з $\mathcal{T}(Z)$ виконуються умови:

(i) $(\forall n)(F_n(U) \subseteq U)$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} F_n(U) = U$ $/\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n(U) = U/$;

(ii) $(U \subseteq V) \Rightarrow (\forall n)(F_n(U) \subseteq F_n(V))$.

При цьому відображення s називається *вичерпуванням* простору Z. Як правило, в означенні вичерпних і напіввичерпних просторів вимагається ще виконання аксіоми відокремності T_1 про те, що одноточкові множини замкнені, але ми опускаємо цю вимогу. Щоб побудувати вичерпування в метризовному просторі, досить розглянути метрику d, що породжує топологію простору, відстань $d(z, E)$ від точки z до непорожньої множини E у просторі (Z, d) і для відкритої множини U в Z покласти $F_n(U) = Z$, якщо $U = Z$ і $F_n(U) = \{z \in U : d(z, Z \setminus U) \geq \frac{1}{n}\}$, якщо $U \neq Z$.

2. Означення добутку Сідра і приклади

Нехай X і Y – топологічні простори і $b \in Y$. *Гребінцем* або *добутком Сідра* ми називаємо топологічний простір $P = X \times_b Y$, який складається з точок добутку $X \times Y$ і топологічна структура на ньому вводиться так: множина W в P буде околом точки $p = (x, y)$, $y \neq b$, якщо існує окіл V точки y в Y, такий, що $\{x\} \times V \subseteq W$, і околом точки $p = (x, b)$, якщо існують окіл U точки x

в X і окіл V точки b в Y, такі, що

$$U \overset{x}{\times} V = (U \times V) \setminus (\{x\} \times \dot{V}) =$$

$$= (\dot{U} \times V) \cup \{p\} \subseteq W,$$

де $\dot{U} = U \setminus \{x\}$ і $\dot{V} = V \setminus \{b\}$.

Приклад 1. Нехай $X = \mathbb{R}$ – числова пряма, $Y = [0, +\infty) = \mathbb{R}^+$ – додатна піввісь і $b = 0$. Добуток Сідра $\mathbb{R} \times_0 \mathbb{R}^+$ називається площиною Сідра і позначається символом $\mathbb{M}$. Базу околів точки $p = (x, 0)$ у просторі $\mathbb{M}$ будуть утворювати множини

$$W_\varepsilon(p) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \overset{x}{\times} [0, \varepsilon) =$$

$$= ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times [0, \varepsilon)) \setminus (\{x\} \times (0, \varepsilon)),$$

де $\varepsilon > 0$, а точки $p = (x, y)$ з $y > 0$ – множини

$$W_\varepsilon(p) = \{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon),$$

де $0 < \varepsilon < y$. Топологічний простір $\mathbb{M}$ був уведений у праці [1].

Приклад 2. Нехай $X = \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – одиничне коло на комплексній площині $\mathbb{C}$, $Y = \{0, 1\}_0$ – зв'язна двоточка з неізольованою точкою 0, тобто топологічний простір, що складається з двох точок 0 і 1, причому його топологія складається з множин $\varnothing, Y, \{1\}$. Виявляється, що добуток Сідра $\mathbb{A} = \mathbb{S} \times_0 \{0, 1\}_0$ гомеоморфний подвійному колу Александрова $\mathbb{W} = C_1 \sqcup C_2$, яке є диз'юнктним об'єднанням двох кіл $C_1 = \mathbb{S}$ і $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$, що топологізоване відповідним чином [3, с.204]. Цей гомеоморфізм $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{W}$ можна задати таким чином: $\varphi(z, 0) = z$, якщо $z \in \mathbb{S}$, і $\varphi(z, 1) = \pi(z)$, де $\pi(z) = 2z$. Це легко перевірити, зазначивши, що базу околів точки $p = (z, 0)$ в $\mathbb{A}$ утворюють множини $U \overset{z}{\times} V$, де U – окіл точки z на колі $\mathbb{S}$, а $V = \{0, 1\}_0$, а для них

$$U \overset{z}{\times} V = (U \times V) \setminus (\{z\} \times \dot{V}) =$$

$$= (U \times \{0\}) \cup ((U \times \{1\}) \setminus \{(z, 1)\}),$$

а у точок $p = (z, 1)$ одноточкова множина $\{p\}$ буде околом точки p, бо $\{p\} = \{z\} \times \{1\}$, а $\{1\}$ – це окіл точки 1 в $\{0, 1\}_0$.

3. Вичерпність добутку Сідра для метризовних співмножників

Надалі для множини $E \subseteq X \times Y$ і точок $x \in X$ і $y \in Y$ ми будемо розглядати множини

$$E^x = \{v \in Y : (x, v) \in E\}$$

і

$$E_y = \{u \in X : (u, y) \in E\},$$

які називаються відповідно *вертикальним x-перерізом* і *горизонтальним y-перерізом* множини E.

Нехай X і Y – метризовні простори, топологічні структури яких породжені відповідно метриками ρ і d. Для відкритих множин G і H відповідно в просторах X і Y і номера n покладемо

$$A_n(G) = \left\{ x \in G : \rho(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

і

$$B_n(H) = \left\{ y \in H : d(y, Y \setminus H) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

(ми вважаємо, що $\rho(x, \varnothing) = d(y, \varnothing) = +\infty$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$). Для $0 \leq \delta \leq +\infty$ розглянемо замкнені кулі $V_\delta[y] = \{v \in Y : d(v, y) \leq \delta\}$ і відкриті кулі $V_\delta(y) = \{v \in Y : d(v, y) < \delta\}$ у просторі Y.

Для відкритої множини U в просторі $P = X \times_b Y$ розглянемо відкриту множину $G = G(U) = U_b$ у просторі X і визначимо функцію $h = h_U : G \to [0, +\infty]$, поклавши

$$h(x) = \sup\{\delta \geq 0 : V_\delta[b] \subseteq U^x\}.$$

Нехай $h_n = h_{U,n} = \frac{n-1}{n} h$, $\dot{U}^x = U^x \setminus \{b\}$, $X(U) = \mathrm{pr}_X(U)$ і $A_n(U) = A_n(G(U))$. Введемо множини

$$C_n(U) = \bigcup_{x \in X(U)} \{x\} \times B_n(\dot{U}^x),$$

$$D_n(U) = \bigcup_{x \in A_n(U)} \{x\} \times V_{h_n(x)}[b]$$

і

$$F_n(U) = C_n(U) \cup D_n(U).$$

Теорема 1. *Для метризовних просторів X і Y, топології яких породжуються відповідно метриками ρ і d, відображення*

$(U, n) \mapsto F_n(U)$ *є вичерпуванням добутку Сідра* $P = X \times_b Y$.

Доведення.

Для доведення замкненості множини $F_n(U)$ покажемо, що замкненими є множини $C_n(U)$ та $D_n(U)$.

Доведемо, що множина $C_n(U)$ є замкненою, для цього розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0)$ з множини $P \setminus C_n(U)$ і покажемо, що вона входить в цю множину разом з деяким околом.

Нехай $y_0 = b$. Оскільки, $b \notin \dot{U}^x$ для довільного $x \in X(U)$, то $b \in Y \setminus \dot{U}^x$ для таких x. Для точки $y \in B_n(\dot{U}^x)$ відстань $d(y, b) \geq d(y, Y \setminus \dot{U}^x) \geq \frac{1}{n}$. Отже, для $x \in X(U)$

$$(\{x\} \times V_{1/n}(b)) \cap B_n(\dot{U}^x) = \varnothing.$$

Таким чином, ми знайшли відкритий окіл $W = X \times V_{1/n}(b)$ точки p_0 в P, такий, що $W \cap C_n(U) = \varnothing$.

Нехай $y_0 \neq b$. Тоді для $p_0 = (x_0, y_0)$ можливі два випадки: $x_0 \notin X(U)$ і $x_0 \in X(U)$.

Якщо $x_0 \notin X(U)$, то множина $W = \{x_0\} \times \dot{Y}$ – відкритий окіл точки p_0, який не перетинається з $C_n(U)$.

Якщо ж $x_0 \in X(U)$, то $y_0 \notin B_n(\dot{U}^{x_0})$. Множина $B_n(\dot{U}^{x_0})$ замкнена в Y, значить, множина $V = Y \setminus B_n(\dot{U}^{x_0})$ відкрита в Y. Тоді $W = \{x_0\} \times V$ – це відкритий окіл точки p_0, такий, що $W \cap C_n(U) = \varnothing$.

Отже, $C_n(U)$ замкнені для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Перевіримо тепер, що множина $D_n(U)$ замкнена. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in P \setminus D_n(U)$. Припустимо спочатку, що $x_0 \notin A_n(U)$. Множина $A_n(U)$ замкнена в X, отже, доповнення до неї $X \setminus A_n(U)$ – відкрита множина в X. Множина $W = (X \setminus A_n(U)) \times Y$ – це окіл точки p_0 в P, який не перетинається з $D_n(U)$.

Нехай тепер $x_0 \in A_n(U)$. Тоді $y_0 \notin V_{h_n(x_0)}[b]$. Множина $V_{h_n(x_0)}[b]$ замкнена, а її доповнення $V = Y \setminus V_{h_n(x_0)}[b]$ є відкритою множиною в Y. Тоді $W = \{x_0\} \times V$ – це окіл точки p_0 в P, такий, що $W \cap D_n(U) = \varnothing$.

Перевіримо виконання умов (i) та (ii) з означення вичерпного простору.

Покажемо, що $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} F_n(U)$. Візьмемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in U$ і покажемо, що $p_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} F_n(U)$.

Нехай $y_0 \neq b$. Тоді $x_0 \in X(U) = \mathrm{pr}_X(U)$ і $y_0 \in \dot{U}^{x_0}$. Оскільки $B_n(\dot{U}^{x_0})$ – вичерпування множини $\dot{U}^{x_0}$, то $\dot{U}^{x_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} B_n(\dot{U}^{x_0})$. Тому існує номер n, такий, що $y_0 \in V = \mathrm{int} B_n(\dot{U}^{x_0})$. Множина V відкрита в Y, отже $W = \{x_0\} \times V$ – це окіл точки p_0, причому $W \subseteq C_n(U) \subseteq F_n(U)$. Тому $p_0 \in \mathrm{int} F_n(U)$.

Нехай тепер $y_0 = b$. Тоді $p_0 = (x_0, b) \in U$, отже $x_0 \in G(U)$. Оскільки $A_n(U)$ – вичерпування множини $G(U)$, то існує номер n, такий що $x_0 \in \mathrm{int} A_n(U)$. Крім того, множина U відкрита в P. Тому існує таке $\delta > 0$, що

$$U_\delta(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \delta\} \subseteq A_n(U)$$

і

$$W_\delta(p_0) = U_\delta(x_0) \overset{x_0}{\times} V_\delta(b) \subseteq U.$$

Нехай $x \in \dot{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Оскільки $\{x\} \times V_\delta(b) \subseteq W_\delta(p_0) \subseteq U$, то $V_\delta(b) \subseteq U^x$. Але $V_{\delta'}[b] \subseteq V_\delta(b)$ для кожного $\delta' \in (0, \delta)$. Тому $h(x) \geq \delta$.

Виберемо δ_0 з інтервалу $(0, \delta)$. З того, що $\frac{m-1}{m}\delta \to \delta > \delta_0$ при $m \to \infty$, випливає, що існує номер m, такий, що $\frac{m-1}{m}\delta \geq \delta_0$ і $m \geq n$. Для нього $h_m(x) \geq \delta_0$.

Таким чином, $V_{\delta_0}(b) \subseteq V_{h_m(x)}[b]$ для всіх $x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$. Крім того,

$$\dot{U}_{\delta_0}(x_0) \subseteq U_\delta(x_0) \subseteq A_n(U) \subseteq A_m(U)$$

і

$$W_{\delta_0}(p_0) = (\dot{U}_{\delta_0}(x_0) \times V_{\delta_0}(b)) \cup \{p_0\} \subseteq$$
$$\subseteq (\dot{U}_{\delta_0}(x_0) \times V_{h_m(x)}[b]) \cup \{p_0\} =$$
$$= (\bigcup_{x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0)} \{x\} \times V_{h_m(x)}[b]) \cup \{p_0\} \subseteq$$
$$\subseteq (\bigcup_{x \in A_m(U)} \{x\} \times V_{h_m(x)}[b]) \cup \{p_0\} =$$
$$= D_m(U) \subseteq F_m(U).$$

Звідси випливає, що $p_0 \in \mathrm{int} F_m(U)$.

Нехай тепер U, V – відкриті множини в P, такі, що $U \subseteq V$. Покажемо, що $C_n(U) \subseteq C_n(V)$ і $D_n(U) \subseteq D_n(V)$.

Оскільки $U \subseteq V$, то $\mathrm{pr}_X(U) \subseteq \mathrm{pr}_X(V)$, тобто $X(U) \subseteq X(V)$. Крім того, $\dot{U}^x \subseteq \dot{V}^x$, звідки отримуємо, що $B_n(\dot{U}^x) \subseteq B_n(\dot{V}^x)$. Отже, $C_n(U) \subseteq C_n(V)$.

Далі, маємо, що $A_n(U) \subseteq A_n(V)$, бо $G(U) \subseteq G(V)$. Оскільки $U^x \subseteq V^x$, то $\{\delta \geq 0 : V_\delta[b] \subseteq U^x\} \subseteq \{\delta \geq 0 : V_\delta[b] \subseteq V^x\}$. Отже, $h_{U,n}(x) \leq h_{V,n}(x)$, а тоді і $V_{h_{U,n}(x)}[b] \subseteq V_{h_{V,n}(x)}[b]$. Звідси отримуємо, що

$$D_n(U) = \bigcup_{x\in A_n(U)} \{x\} \times V_{h_{U,n}(x)}[b] \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{x\in A_n(V)} \{x\} \times V_{h_{V,n}(x)}[b] = D_n(V).$$

Зауважимо, що $\{x\} \times B_n(\dot{U}^x) \subseteq \{x\} \times U^x \subseteq U$ для кожного $x \in X(U)$, а тому $C_n(U) \subseteq U$. З другого боку, візьмемо $x \in A_n(U)$. Тоді точка $(x, b) \in U$, адже $A_n(U) \subseteq G(U)$. Якщо $h(x) = 0$, то і $h_n(x) = 0$, бо $0 \leq h_n(x) \leq h(x)$ за побудовою. Тому $\{x\} \times V_{h_n(x)}(b) = \{x\} \times \{b\} = \{(x, b)\} \subseteq U$. Якщо ж $0 < h(x) < +\infty$, то $h_n(x) < h(x)$, отже, існує таке $\delta > 0$, що $V_\delta[b] \subseteq U^x$ і $\delta > h_n(x)$. Тоді $\{x\} \times V_{h_n(x)}[b] \subseteq \{x\} \times V_\delta[b] \subseteq \{x\} \times U^x \subseteq U$. Нарешті, при $h(x) = +\infty$ і $h_n(x) = +\infty$, а тому $U^x = Y = V_{h_n(x)}[b]$, отже, і тут $\{x\} \times V_{h_n(x)}[b] \subseteq U$. Це показує, що і $D_n(U) \subseteq U$. Тому і $F_n(U) = C_n(U) \cup D_n(U) \subseteq U$.

4. Неметризовність площини Сідра

Наступний результат поданий в [1] без доведення. Ми дамо його тут, спираючись на метризаційну теорему Бінґа [3, с. 418]: для того, щоб топологічний простір був метризовним, необхідно і досить, щоб він був регулярним і мав σ-дискретну базу.

Теорема 2. *Площина Сідра* $\mathbb{M}$ *– неметризовний простір.*

Доведення. Припустимо, що це не так і $\mathbb{M}$ – метризовний простір. Тоді за метризаційною теоремою Бінґа, матимемо, що в $\mathbb{M}$ існує σ-дискретна база $\mathcal{B}$. Виберемо такі дискретні системи $\mathcal{B}_n$, що $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Для кожного $x \in \mathbb{R}$ розглянемо відкриті околи $W_x = (x-1, x+1) \overset{x}{\times} [0, 1)$ точки $p_x = (x, 0)$ в $\mathbb{M}$ і виберемо такий елемент $B_x \in \mathcal{B}$, що $p_x \in B_x \subseteq W_x$. Розглянемо для кожного $n \in \mathbb{N}$ множину $A_n = \{x \in \mathbb{R} : B_x \in \mathcal{B}_n\}$. Оскільки $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$. Множина $\mathbb{R}$ незліченна, тому для деякого номера m множина A_m також незліченна. Покладемо $\mathcal{B}' = \{B_x : x \in A_m\}$ та покажемо, що і система $\mathcal{B}'$ незліченна. Для цього розглянемо деяку множину $B \in \mathcal{B}'$ і покажемо, що множина $A = A(B) = \{x \in A_m : B_x = B\}$ не більш, ніж зліченна. Для кожного $x \in A$ існує таке $\varepsilon_x > 0$, що множина

$$V_x = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \overset{x}{\times} [0, \varepsilon_x)$$

міститься в $B = B_x$, адже B_x є околом точки p_x. Нехай $U_x = (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$. Оскільки $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} U_x$ і A – лінделефовий простір, як підпростір числової прямої $\mathbb{R}$, то існує послідовність точок $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ з A, така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_{x_n}$. Доведемо, що $A \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Нехай це не так, тобто існує таке $x \in A$, що $x \neq x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Виберемо такий номер k, що $x \in U_{x_k}$. Але $x \neq x_k$, тому $x \in (x_k - \varepsilon_{x_k}, x_k)$ або $x \in (x_k, x_k + \varepsilon_{x_k})$. Нехай, для певності, $x \in (x_k - \varepsilon_{x_k}, x_k)$. Тоді $(x_k - \varepsilon_{x_k}, x_k) \times [0, \varepsilon_{x_k}) \subseteq V_{x_k} \subseteq B = B_x \subseteq W_x$, що неможливо, бо точка $(x, \frac{\varepsilon_{x_k}}{2})$ попадає в $(x_k - \varepsilon_{x_k}, x_k) \times [0, \varepsilon_{x_k})$, але не міститься у W_x, бо $(x, y) \notin W_x$ при $y > 0$. Отже, $A \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, а тому $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна множина.

Звідси легко вивести, що множина $\mathcal{B}'$ незліченна. Будемо міркувати від супротивного. Нехай це не так і множина $\mathcal{B}'$ не більш, ніж зліченна. Тоді оскільки $A(B)$ не більш, ніж зліченна для кожного $B \in \mathcal{B}'$ і $A_m = \bigsqcup\limits_{B\in\mathcal{B}'} A(B)$, то A_m – не більш, ніж зліченна, що суперечить вибору m. Отже, $\mathcal{B}'$ – незліченна множина.

Але кожний елемент $B \in \mathcal{B}'$ є околом деякої точки p_x в $\mathbb{M}$. Тому $G_B = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^2} B \neq \varnothing$ для всіх B з $\mathcal{B}'$. Зрозуміло, що $G_B \subseteq B$ для кожного $B \in \mathcal{B}'$. Оскільки $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_m$ і система $\mathcal{B}_m$ дискретна, а значить, диз'юнктна, то і система $\mathcal{B}'$ диз'юнктна, а з нею диз'юнктними будуть і множини G_B при $B \in \mathcal{B}'$. Таким чином, $\{G_B : B \in \mathcal{B}'\}$ – диз'юнктна відкрита незліченна система в $\mathbb{R}^2$, що суперечить сепарабельності $\mathbb{R}^2$.

5. Вичерпність добутку Сідра для вичерпних співмножників

Тепер ми узагальнимо теорему 1.

Теорема 3. *Нехай X, Y – вичерпні простори, $b \in Y$, одноточкова множина $\{b\}$ замкнена в Y і $P = X \times_b Y$ – добуток Сідра. Тоді P – вичерпний простір.*

Доведення. Нехай $A_n(U)$ та $B_n(V)$ – зростаючі вичерпування відкритих множин U і V відповідно в просторах X та Y. Для довільної відкритої множини W в P покладемо $\tilde{W} = W \setminus (X \times \{b\})$. Далі покладемо

$$C_n(W) = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times B_n(\tilde{W}^x),$$

$$S_n(W) = \{x \in A_n(W_b) : W^x \text{ – окіл } b \text{ в } Y\},$$

$$D_n(W) = $$

$$= (A_n(W_b) \times \{b\}) \cup \bigcup_{x \in S_n(W)} \{x\} \times B_n(W^x),$$

і $F_n(W) = C_n(W) \cup D_n(W)$. Покажемо, що так побудовані множини $F_n(W)$ утворюють вичерпування в P.

Одразу зауважимо, що $F_n(W) \subseteq W$ за побудовою.

Перевіримо замкненість множини $C_n(W)$. Візьмемо деяку точку $p_0 = (x_0, y_0)$ з доповнення $P \setminus C_n(W)$ і покажемо, що $P \setminus C_n(W)$ є її околом.

Розглянемо спочатку випадок, коли $y_0 = b$. Покладемо $V_0 = Y \setminus B_n(Y \setminus \{b\})$ і $W_0 = X \times V_0$. Оскільки $B_n(Y \setminus \{b\}) \subseteq Y \setminus \{b\}$ і множина $B_n(Y \setminus \{b\})$ замкнена, то V_0 є околом точки b в Y. Тому W_0 – окіл точки p_0 в P. Покажемо, що $W_0 \cap C_n(W) = \varnothing$. Візьмемо $x \in X$. Оскільки $\tilde{W}^x \subseteq Y \setminus \{b\}$, то $B_n(\tilde{W}^x) \subseteq B_n(Y \setminus \{b\})$. Отже, $B_n(\tilde{W}^x) \cap V_0 = \varnothing$. А тому

$$C_n(W) \cap W_0 = (\bigcup_{x \in X} \{x\} \times B_n(\tilde{W}^x)) \cap (X \times V_0) =$$

$$= \bigcup_{x \in X} \{x\} \times (B_n(\tilde{W}^x) \cap V_0) = \varnothing.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $y_0 \neq b$. Оскільки $p_0 \notin C_n(W)$, то $y_0 \notin B_n(\tilde{W}^{x_0})$. Отже, $V_0 = Y \setminus B_n(\tilde{W}^{x_0})$ – відкритий окіл точки y_0 в Y. Тому $W_0 = \{x_0\} \times V_0$ – відкритий окіл точки p_0 в P, такий, що $W_0 \cap C_n(W) = \varnothing$.

Доведемо тепер замкненість множини $D_n(W)$. Візьмемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in P \setminus D_n(W)$.

Нехай спочатку $x_0 \in S_n(W)$. Тоді $y_0 \neq b$, адже якщо $y_0 = b$, то

$$p_0 \in S_n(W) \times \{b\} \subseteq A_n(W_b) \times \{b\} \subseteq D_n(W).$$

Крім того, $y_0 \notin B_n(W^{x_0})$, адже $p_0 \notin D_n(W)$. Множина $B_n(W^{x_0}) \cup \{b\}$ буде замкненою в Y, як об'єднання двох замкнених множин, а тому її доповнення V_0 в Y – це відкрита множина у просторі Y. Оскільки $y_0 \neq b$ і $y_0 \notin B_n(W^{x_0})$, то V_0 – це відкритий окіл точки y_0 в Y. А значить, $W_0 = \{x_0\} \times V_0$ є околом p_0 в P, причому

$$W_0 \cap D_n(W) = (W_0 \cap (A_n(W_b) \times \{b\})) \cup$$

$$\cup \bigcup_{x \in S_n(W)} ((\{x\} \times B_n(W^x)) \cap W_0) =$$

$$= (\{x_0\} \times (V_0 \cap \{b\})) \cup (\{x_0\} \times$$

$$\times (B_n(W^{x_0}) \cap V_0)) = \varnothing.$$

Нехай тепер $x_0 \in A_n(W_b) \setminus S_n(W)$. Тоді знову $y_0 \neq b$ адже $p_0 \notin D_n(W)$. Крім того, $D_n(W) \cap (\{x_0\} \times Y) = \{(x_0, b)\}$. Отже, покладаючи $V_0 = Y \setminus \{b\}$ і $W_0 = \{x_0\} \times V_0$ матимемо, що $W_0 \cap D_n(W) = \varnothing$ і W_0 – відкритий окіл точки p_0.

Нарешті, розглянемо випадок, коли $x_0 \notin A_n(W_b)$. Покладемо $U_0 = X \setminus A_n(W_b)$ і $W_0 = U_0 \times Y$. Ясно, що W_0 – відкритий окіл p_0 в P. Крім того, $D_n(W) \subseteq A_n(W_b) \times Y$. Отже, $W_0 \cap D_n(W) = \varnothing$.

Покажемо тепер, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} F_n(W) = W$. Оскільки $F_n(W) \subseteq W$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} F_n(W) \subseteq W$. Покажемо, що виконується включення в інший бік. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in W$ і знайдемо такий номер n, що $p_0 \in \mathrm{int} F_n(W)$.

Якщо $y_0 \neq b$, то $p_0 \in \tilde{W}$, а тому $y_0 \in \tilde{W}^{x_0}$. Оскільки множина $\tilde{W}^{x_0}$ – відкрита в Y, то $\tilde{W}^{x_0} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} B_n(\tilde{W}^{x_0})$. Тоді існує номер n, такий, що $y_0 \in V_0 = \mathrm{int} B_n(\tilde{W}^{x_0})$. Отже, $W_0 = \{x_0\} \times V_0$ – окіл точки p_0 в P, такий, що $W_0 \subseteq C_n(W) \subseteq F_n(W)$. Тому $p_0 \in \mathrm{int} F_n(W)$.

Нехай тепер $y_0 = b$. Відкрита множина W є околом точки $p_0 = (x_0, b)$ в P. Тому існують відкритий окіл U точки x_0 в X і відкритий окіл V точки b в Y, такі, що $U \overset{x_0}{\times} V \subseteq W$. Множини U та V відкриті, отже,

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} A_n(U) \text{ і } V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} B_n(V).$$

Тому оскільки послідовності $(A_n(U))_{n=1}^{\infty}$ і $(B_n(V))_{n=1}^{\infty}$ зростають, то існує номер n, такий, що $x_0 \in \mathrm{int} A_n(U)$, і $b \in \mathrm{int} B_n(V)$. Покладемо $U_0 = \mathrm{int} A_n(U)$ і $V_0 = \mathrm{int} B_n(V)$ і $W_0 = U_0 \overset{x_0}{\times} V_0)$.

Покажемо, що $W_0 \subseteq D_n(W)$. Розглянемо точку $p = (x, y) \in W_0$. Якщо $p = p_0$, то $x = x_0 \in \mathrm{int} A_n(U) \subseteq A_n(W_b)$, а тому $p = (x_0, b) \in D_n(W)$. Нехай тепер $p \neq p_0$. Тоді $p \in W_0 \setminus \{p_0\} = (U_0 \setminus \{x_0\}) \times V_0$. Отже, $x \neq x_0$. В такому разі $\{x\} \times V_0 \subseteq W_0 \subseteq W$. Тому W^x є околом точки b, адже $W^x \supseteq V_0 \ni b$. Отже, $x \in S_n(W)$. Крім того, $x \in U_0 \subseteq A_n(U) \subseteq A_n(W_b)$. Далі, оскільки $V \subseteq W^x$, то $y \in V_0 \subseteq B_n(V) \subseteq B_n(W^x)$. Отже, $p \in \{x\} \times B_n(W^x) \subseteq D_n(W)$. Таким чином, $W_0 \subseteq D_n(W)$, а значить $p_0 \in \mathrm{int} D_n(W) \subseteq \mathrm{int} F_n(W)$.

Нехай G і H – відкриті множини в P, такі, що $G \subseteq H$. Покажемо, що $C_n(G) \subseteq C_n(H)$ і $D_n(G) \subseteq D_n(H)$. По-перше, оскільки $\tilde{G}^x = G \setminus (X \times \{b\}) \subseteq H \setminus (X \times \{b\}) = \tilde{H}^x$, то $B_n(\tilde{G}^x) \subseteq B_n(\tilde{H}^x)$, а отже, $C_n(G) \subseteq C_n(H)$.

Далі, оскільки $G_b \subseteq H_b$, то $A_n(G_b) \subseteq A_n(H_b)$. Але якщо G^x є околом точки b, то і множина $H^x \supseteq G^x$ також є околом b. Отже, $S_n(G) \subseteq S_n(H)$. Крім того, $B_n(G^x) \subseteq B_n(H^x)$. Таким чином, $D_n(G) \subseteq D_n(H)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961.–**11**. – P. 105-126.

2. *Borges C.* On stratifiable spaces // Pacif. J. Math. – 1966.–**17**, N1. – P. 1-16.

3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.