УДК 517.51

©2013р. О. В. Маслюченко, Д. П. Онипа

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МНОЖИНА ТОЧОК РОЗРИВУ КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА КОМПАКТАХ ЕБЕРЛЕЙНА

В даній роботі встановлюється, що кожна сепарабельна F_σ-підмножина першої категорії компакту Еберлейна є множиною точок розриву деякої квазінеперервної функції.

We prove that every separable F_σ-subset of first category of an Eberlein's compact is the discontinuity point set of some quasi-continuous function.

Вступ. В роботах багатьох авторів, таких як Р. Кешнер [1], Дж. Брекенрідж, Т. Нішіура [2], В. Михайлюк, В. Маслюченко [3] і О. Маслюченко [4], розв'язувалася задача про опис множин точок розриву функцій з тих чи інших функціональних класів. В статті [5] охарактеризовано множину точок розриву $\mathrm{D}(f)$ квазінеперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ для спадково нормального простору X. Там доведено, що підмножина E спадково нормального простору X буде множиною точок розриву деякої квазінеперервної функції $f : X \to Y$ тоді і тільки тоді, коли множина E подається у вигляді об'єднання послідовності множин $E_n = \overline{A_n} \cap \overline{B_n}$, де $\overline{A_n} \cap B_n = A_n \cap \overline{B_n} = \emptyset$. Зокрема для метризовного X ця характеристика множини рівносильна тому, що E є F_σ-множиною першої категорії.

В роботі [6] було встановлено, що сепарабельна F_σ-множина, яка є проективно першої категорії (тобто проекції цієї множини паралельно до кожного зі співмножників є множинами першої категорії) в добутку компактів Еберлейна є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції. Але, як відомо, властивість квазінеперервності тісно пов'язана з нарізною неперервністю. Тому природно сподіватися, що подібний результат мав би бути і для квазінеперервних функцій. Зауважимо, що компакти Еберлейна не зобов'язані бути спадково нормальними. Відповідний приклад наведений в п.7. цієї роботи.

В даній роботі ми встановимо, що кожна сепарабельна F_σ-підмножина першої категорії в еберлейновому просторі є множиною точок розриву деякої квазінеперервної функції.

1. Збіжність послідовності підмножин в еберлейнових просторах. Нагадаємо, що компакт називається *компактом Еберлейна*, якщо він гомеоморфний до деякого слабко компактного підпростору банахового простору. Топологічний простір ми будемо називати *еберлейновим*, якщо він гомеоморфний до деякої підмножини компакту Еберлейна. Зауважимо, що метризовні простори є еберлейновими.

Нехай T – довільна множина і $c_0(T)$ – це множина всіх збіжних до нуля функцій тобто таких, що множина $\{t \in T : |x(t)| > \varepsilon\}$ скінченна для всіх $\varepsilon > 0$. Символом $c_0^p(T)$ надалі позначатимемо множину $c_0(T)$ із топологією поточкової збіжності на ній. З теореми Аміра-Лінденштрауса [7] випливає, що довільний еберлейновий простір гомеоморфний до деякої відносно компактної підмножини $c_0(T)$.

Ми казатимемо, що послідовність множин A_n топологічного простору X *збігається до точки* x ($A_n \to x$), якщо в будьякому околі цієї точки містяться всі A_n, починаючи з деякого номера. Якщо $A_n \subseteq c_0(T)$ і $S \subseteq T$, то казатимемо, що A_n *рівномірно збігається до* x_0 *на* S ($A_n \rightrightarrows x_0$ на S), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0, що для довільних $n > n_0$, $x \in A_n$ і $t \in S$ виконується нерівність $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$.

Для довільної не більш ніж зліченної множини $S \subseteq T$ зафіксуємо деяку її нумерацію $S = \{s_k : k \in \mathbb{N}\}$

і покладемо $\|x\|_S^\infty = \sup_{t\in T\setminus S}|x(t)|$, $\|x\|_S^0 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}|x(s_n)|$. Тоді формулою $\|x\|_S = \|x\|_S^0 + \|x\|_S^\infty$ визначається деяка норма на $c_0(T)$. Зауважимо, що для довільного $y \in c_0^p(T)$ куля $V = B_{\|\cdot\|_S^0}(y,\varepsilon)$ відносно норми $\|\cdot\|_S^0$ є відкритою множиною.

Лема 1.1. *Нехай T – деяка множина, S – не більш ніж зліченна підмножина T, $(A_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність непорожніх підмножин $c_0(T)$ і $a \in c_0(T)$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) $A_n \to a$ в $(c_0(T), \|\cdot\|_S)$;

(ii) $A_n \to a$ в $c_0^p(T)$ і $A_n \rightrightarrows a$ на $T\setminus S$.

Доведення. По-перше зауважимо, що розглядаючи замість множин A_n множини $A_n - a$, ми зведемо нашу лему до випадку $a = 0$.

Доведемо імплікацію $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай $A_n \to 0$ в $(c_0(T),\|\cdot\|_S)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер n_0, що для довільного $n \geq n_0$ виконується, що $\|x\|_S < \varepsilon$ при $x \in A_n$. Тоді, для $t \in T\setminus S$ і $x \in A_n$ виконується нерівність $|x(t)| \leq \|x\|_S < \varepsilon$. Якщо ж $s = s_k \in S$ і $x \in A_n$, то $\frac{1}{2^k}|x(s)| \leq \|x\|_S < \varepsilon$. Отже, $A_n \rightrightarrows 0$ на $T\setminus S$ і $A_n \to 0$ в $c_0^p(t)$.

Тепер покажемо, що $(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай $A_n \rightrightarrows 0$ на $T\setminus S$ і $A_n \to 0$ в $c_0^p(t)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Тоді існує номер n_0 такий, що для довільного $n > n_0$ і $x \in A_n$ виконується, що $|x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $t \in T\setminus S$. Далі, існує таке $k_0 \in \mathbb{N}$, що $\sum\limits_{k>k_0}\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{3}$. Окрім того, оскільки $A_n \to 0$ в $c_0^p(t)$, то для довільного $k \leq k_0$ існує $n_k \in \mathbb{N}$ таке, що для довільного $n \geq n_k$ і $x \in A_n$ виконується, що $\frac{1}{2^k}|x(t_k)| < \frac{\varepsilon}{3k_0}$. Нехай $N = \max\{n_0, n_1, \ldots, n_{k_0}\}$. Тоді при $n \geq N$ матимемо, що для довільного $x \in A_n$ виконується, що

$$\|x\|_S = \sup_{t\in T\setminus S}|x(t)| + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}|x(s_n)| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in T\setminus S}|x(t)| + \sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}|x(s_k)| + \sum_{k>k_0}\frac{1}{2^k} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + k_0\frac{\varepsilon}{3k_0} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

2. Одне уточнення теореми Прейса-Симона. Наступна лема доведена в [4], але для повноти викладу ми помістили тут її доведення.

Лема 2.1. *Нехай X – відносно компактна в $c_0(T)$ і U – непорожня відкрита в X множина. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існують відкрита в X непорожня множина $V \subseteq U$ і скінченна множина $T_0 \subseteq T$, такі, що $|x(t)| \leq \varepsilon$ для всіх $x \in V$ і $t \in T\setminus T_0$.*

Доведення. Не буде обмеженням вважати, що X – компакт, адже, якщо це не так, то замість X слід розглянути його поточкове замикання. Нехай

$$F_E = \{x \in X : |x(t)| \geq \varepsilon \text{ для всіх } t \in T\}$$

для довільного $E \subseteq T$. Зрозуміло, що F_E замкнені в X, причому $F_E = \emptyset$, якщо E – нескінченна і $F_\emptyset = X$. Покладемо

$$G_E = \{x \in X : |x(t)| > \varepsilon\}.$$

Розглянемо систему $\mathcal{E}$ усіх множин $E \subseteq T$ для яких $G_E \neq \emptyset$. Зрозуміло, що всі $E \in \mathcal{E}$ скінчені і $\emptyset \in \mathcal{E}$. Покажемо, що існує максимальний елемент в $\mathcal{E}$ відносно включення $\subseteq$. Якщо це не так, то в $\mathcal{E}$ існує строго зростаюча послідовність множин E_n. Нехай F_n – це замикання $G_{E_n} \cap U$. Тоді (F_n) – спадна послідовність непорожніх компактів $F_n \subseteq F_{E_n}$. Отже, $\bigcap\limits_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. Але, з іншого боку, $\bigcap\limits_{n=1}^\infty F_n \subseteq F_{E_n} = F_E = \emptyset$, бо $E = E_n$ нескінченна. Нехай T_0 – максимальний елемент $\mathcal{E}$ і $V = G_{T_0} \cap U$. Тоді виконуватиметься, що $|x(t)| \leq \varepsilon$ для $x \in V$ і $t \in T\setminus T_0$.

Теорема 2.2. *Нехай X – відносно компактна в $c_0(T)$ і $x_0 \in X$, $(G_n)_{n=1}^\infty$ – спадна послідовність відкритих в X множин таких, що $x_0 \in \overline{G_n}$. Тоді існують відкриті в X непорожні множини V_n, для яких $\overline{V_n} \subseteq G_n$, і зліченна множина $T_0 \subseteq T$, такі, що V_n збігається до x_0 і рівномірно збігається до нуля на $T\setminus T_0$.*

Доведення. Нехай $E_n = \{t \in T : |x_0(t)| > 1/n\}$. Побудуємо індуктивно зростаючу послідовність скінченних множин $T_n \supseteq E_n$ і послідовність відкритих в X множин $V_n \neq \emptyset$ таких, що для $\overline{V_n} \subseteq G_n$ і $x \in V_n$ нерівність $|x(t) - x_0(t)| \leq 1/n$ виконується для $t \in T_{n-1}$, а $|x(t)| \leq 1/n$ для $t \in T \setminus T_n$. Покладемо $U_0 = X$. Оскільки $x_0 \in \overline{G_1}$ і U_0 – окіл x_0, то $G_1 \cap U_0 \neq \emptyset$. Але X – регулярний, тому існує відкрита непорожня множина W_1 така, що $\overline{W_1} \subseteq G_1 \cap U_0$. За лемою 2.1 існують скінченна множина T_1 і відкрита непорожня множина $V_1 \subseteq W_1$ такі, що $|x(t)| \leq 1$ для $x \in V_1$, причому можна вважати, що $T_1 \supseteq E_1$. Нехай

$$U_1 = \{x \in X : |x(t) - x_0(t)| \leq 1/2 \text{ при } t \in T_1\}.$$

З того, що $x_0 \in \overline{G_2}$ матимемо, що існує множина W_2, така, що $\overline{W_2} \subseteq G_2 \bigcap U_1 \neq \emptyset$. За лемою 2.1 існує скінченна множина $T_2 \supseteq E_2 \cup T_1$ і відкрита непорожня множина $V_2 \subseteq W_2$ такі, що $|x(t)| \leq 1/2$ для $x \in V_2$ і $t \in T \setminus T_1$.

Продовжуючи аналогічним чином побудову, одержимо множини V_n і T_n, які задовольняють потрібні властивості. Покладемо $T_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. Зрозуміло, що $|x(t)| \leq 1/n$ для $n \in \mathbb{N}$, $t \in T \setminus T_0$ і $x \in V_n$. Тому V_n рівномірно прямують до нуля на $T \setminus T_0$. Покажемо, що V_n збігаються до x_0. Нехай U – окіл x_0. Можна вважати, що

$$U = \{x \in X : |x(t_0) - x_0(t_0)| \leq \varepsilon\}$$

для деяких $t_0 \in T$ і $\varepsilon > 0$. Якщо $t_0 \notin T_0$, то $x_0(t_0) = 0$ і тому для $n > 1/\varepsilon$ матимемо, що $V_n \subseteq U$. Нехай тепер $t_0 \in T_0$. Тоді $t_0 \in T_n$ для всіх n більших деякого n_0. Отже, $|x(t_0) - x_0(t_0)| \leq 1/n$ для $n > n_0$ і $x \in V_n$. Значить, знову $V_n \subseteq U$ при $n > n_0$. Теорему доведено!

3. Апроксимація сепарабельних підмножин еберлейнового простору. Нагадаємо, що сім'я $(A_s)_{s\in S}$ називається *дискретною в точці* x, якщо існує окіл U точки x, що $|\{s \in S : A_s \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1$. Казатимемо, що сім'я $(A_s)_{s\in S}$ *дискретна на множині* E, якщо вона є дискретною в кожні точці цієї множини.

Носієм функції $x : T \to \mathbb{R}$ називається множина, що позначається $\mathrm{supp}x$ і складається з усіх таких $t \in T$, що $x(t) \neq 0$.

Лема 3.1. *Нехай X – відносно компактна в $c_0(T)$ і E – не більш ніж зліченна ніде не щільна підмножина X, G_n – відкриті непорожні в X, причому $G_{n+1} \subseteq G_n$ і $E \subseteq \mathrm{fr}G_n$ для кожного n. Тоді для кожного $x \in E$ існує послідовність $(G_n(x))_{n=1}^{\infty}$ відкритих непорожніх підмножин X така, що:*

(3.1) $\overline{G_n(x)} \subseteq G_n$;

(3.2) $G_n(x) \to x$ *при* $n \to \infty$;

(3.3) $(G_n(x))_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ – *дискретна сім'я на* $X \setminus \overline{E}$.

Доведення. За умовою $|E| \leq \aleph_0$. Тоді $|\mathbb{N} \times E| = \aleph_0$. Отже, існує бієкція $\nu : \mathbb{N} \times E \to \mathbb{N}$. Оскільки $E \subseteq \mathrm{fr}G_n$, то $x \in \overline{G_n}$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in E$. Тоді за теоремою 2.2. для кожного $x \in E$ існують послідовність відкритих не порожніх множин $(V_k(x))_{k=1}^{\infty}$ з X і зліченна множина $S_x \subseteq T$ такі, що

(1) $V_k(x) \to x$ в $c_0^p(T)$;

(2) $V_k(x) \rightrightarrows 0$ на $T \setminus S_x$;

(3) $\overline{V_k(x)} \subseteq G_k$.

Зрозуміло, що множина $S = \bigcup\limits_{x\in E} S_x$ – зліченна. Доведемо, що для кожного $x \in E$ виконується, що $x(t) = 0$ на $T \setminus S$. Візьмемо $x \in E$ і $t \in T \setminus S$. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ виберемо точку $x_k \in V_k(x)$. Зрозуміло, що тоді $x_k \to x$ в топології поточкової збіжності і тому $x_k(t) \to x(t)$. Але, з іншого боку, $x_k(t) \rightrightarrows 0$ на $T \setminus S$. Тому $x_k(t) \to 0$. Отже, $x(t) = 0$. Таким чином, $\mathrm{supp}x \subseteq S$ для довільного $x \in E$.

Зокрема, матимемо, що $V_k(x) \rightrightarrows 0$ на $T \setminus S$. Значить, за лемою 1.1 одержимо, що для кожного $x \in E$ виконується, що

(4) $V_k(x) \to x$ в $(c_0(T), \|\cdot\|_S)$.

Зараз ми індукцією по $\nu(n,x)$ побудуємо сім'ю $(G_n(x))_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ відкритих непорожніх множин, таку, що виконується умова (3.1) і умови

(5) для довільного $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in G_n(x) : \|x - y\|_S < \frac{1}{\nu(n,x)}$;

(6) сім'я $(\overline{G_n(x)})_{\nu(n,x)<l}$ диз'юнктна, для кожного $l \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що для деякого l уже побудовані множини $G_n(x)$ при $\nu(n,x) < l$ так, що виконуються потрібні умови. Візьмемо $m \in \mathbb{N}$ і $y \in E$ з $\nu(m,y) = l$ і побудуємо множину $G_n(y)$ зі збереженням потрібних умов. З (3.1) випливає, що множина

$U = X \setminus \bigcup\limits_{\nu(n,x)<l} \overline{G_n(x)}$ є відкритим околом точки y в $c_0^p(T)$. За рахунок властивостей (1) і (4) матимемо, що існує $k_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для довільного $k \geq k_0$ виконується, що

(7) $V_k(y) \subseteq U \cap B_{\|\cdot\|_S}\left(y, \frac{1}{\nu(m,y)}\right)$.

Виберемо $k^* = \max\{m, k_0\}$. Оскільки $k^* \geq m$, то для довільного $k \geq k^*$ матимемо, що $G_k \subseteq G_m$. Крім того, згідно з умовою (6) $\overline{V_k(y)} \subseteq G_k$, тому і $V_k(y) \subseteq G_k$. З того, що X регулярний і E ніде не щільна, випливає, що існує відкрита не порожня множина $G_m(y)$ таке, що $\overline{G_m(y)} \subseteq V_{k_0}(y) \setminus \overline{E}$. Перевіримо, що $G_m(y)$ задовольняє потрібні умови.

Згідно з умовою (3) маємо, що $\overline{V_k(y)} \subseteq G_k$. Оскільки $k \geq k^* \geq m$, то $G_k \subseteq G_m$. Звідси $\overline{G_m(y)} \subseteq V_k(y) \subseteq G_k \subseteq G_m$. Отже, умова (3.1) виконується.

Перевіримо умову (3.2). Візьмемо точку $x \in E$. За рахунок умови (5) матимемо, що $G_n(x) \to x$ в $(c_0(T), \|\cdot\|_S)$. Тому за лемою 1.1 матимемо, що $G_n(x) \to x$ в $c_0^p(T)$.

Приступимо до перевірки (3.3). Перш за все, зауважимо, що з умови (6) випливає диз'юнктність сім'ї $(\overline{G_n(x)})_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$. Тому досить перевірити, що сім'я $(G_n(x))_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ є локально скінченною на $X \setminus \overline{E}$. Зафіксуємо деяку точку $y \in X \setminus \overline{E}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\mathrm{supp} y \not\subseteq S$. Тоді існує таке $t_0 \in T \setminus S$, для якого $|y(t_0)| > 0$. Нехай $\varepsilon = \frac{1}{2}|y(t_0)|$ і $V = \{z \in X : |z(t_0)| > \varepsilon\}$. Візьмемо $x \in E$ і $n \in \mathbb{N}$ такі, що $\nu(n,x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді з (5) випливатиме, що для довільного $z \in G_n(x)$ виконується нерівність $\|x - z\|_S < \frac{1}{\nu(n,x)} \leq \varepsilon$. Але $\mathrm{supp} x \subseteq S$. Тому $|z(t_0)| = |x(t_0) - z(t_0)| \leq \|x - z\|_S^\infty \leq \|x - z\|_S < \varepsilon$. Отже, $z \notin V$ і тому $G_n(x) \cap V = \emptyset$. Таким чином V може перетинатись тільки з такими множинами, для яких $\nu(n,x) \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Нехай тепер $\mathrm{supp} y \in S$. Доведемо, що тоді

$$2\varepsilon = \inf\{\|y - x\|_S^0 : x \in E\} > 0.$$

Нехай це не так. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in E$ таке, що $\|y - x_n\|_S^0 < \frac{1}{n}$. Але $\mathrm{supp} x_n \subseteq S$ і $\mathrm{supp} y \subseteq S$. Тому $x_n|_{T\setminus S} = y|_{T\setminus S}$. Отже, $\|y - x_n\|_S^\infty = 0$. Таким чином $\|y - x_n\|_S = \|y - x_n\|_S^0 < \frac{1}{n}$. Значить, $x_n \to y$ в $(c_0(T), \|\cdot\|_S)$. Отже, за лемою 1.1 маємо, що $x_n \to y$ в $c_0^p(T)$, а це не можливо, бо $y \notin \overline{E}$.

Покладемо $V = B_{\|\cdot\|_S^0}(y, \varepsilon)$. Тоді V є відкритим околом точки y. З умови (5) матимемо, що якщо $\nu(n,x) > \frac{1}{\varepsilon}$, і $z \in G_n(x)$, то $\|y - z\|_S^0 \leq \|y - z\|_S < \frac{1}{\nu(n,x)} < \varepsilon$. А значить, $z \notin V$, бо якби $z \in V$, то $2\varepsilon \leq \|y - x\|_S^0 \leq \|y - z\|_S^0 + \|z - x\|_S^0 < 2\varepsilon$, а це неможливо. Отже, $V \cap G_n(x) = \emptyset$ при $\nu(n,x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Таким чином, ця сім'я є локально скінченною в довільній точці $y \in X \setminus \overline{E}$, а отже, і на всій множині.

4. Парна досяжність замкненої ніде не щільної множини. Позначатимемо $\mathrm{Lim}_n A_n = \bigcap\limits_n \overline{\bigcup\limits_{k\geq n} A_n}$, для довільної послідовності множин $(A_n)_{n=1}^\infty$. Замкнена ніде не щільна множина $F \subseteq X$ називається *парно досяжною* [6], якщо для довільної спадної послідовності відкритих множин $G_n \subseteq X$ таких, що $F \subseteq \mathrm{fr} G_n$, існують послідовності (U_n) і (V_n) відкритих множин в X таких, що

(8) $\overline{U_n}, \overline{V_n} \subseteq G_n$;

(9) $E = \mathrm{Lim}_n U_n = \mathrm{Lim}_n V_n$;

(10) $U_m \cap V_n = \emptyset$ для довільних m та n.

Теорема 4.1. *Нехай X – еберлейновий простір, F – замкнена ніде не щільна підмножина X. Тоді F парно досяжна в X.*

Доведення. Не буде обмеженням вважати, що X є деякою відносно компактною підмножиною простору $c_0(T)$, для деякої множини T. Нехай E – зліченна щільна підмножина F. Занумеруємо $E = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо деяку спадну послідовність (G_n) відкритих непорожніх множин в X таких, що $F \subseteq \mathrm{fr} G_n$. За лемою 3.1. побудуємо множини $G_n(x)$, такі, що виконуються властивості (3.1) – (3.3). Покладемо $U_k = \bigcup_{j=1}^k G_{2k}(x_j)$, $V_k = \bigcup_{j=1}^k G_{2k+1}(x_j)$. Перевіримо умови (8) – (10).

Умова (8) випливає з (3.1), а умова (10) випливає з властивості (3.3). Перевіримо умову (9). Доведемо лише, що $F = \mathrm{Lim}_n U_n$.

Позначимо $A = \mathrm{Lim}_n U_n$. Перевіримо спочатку, що $F \subseteq A = \bigcap_n \overline{\bigcup_{k\geq n} U_k}$. Нехай $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$ і U – окіл точки x. Виберемо номер j так, що $x = x_j$. З умови (2) випливає, що $G_{2k}(x) \to x$ при $k \to \infty$. Отже, існує k_0 такий, що для $k \geq k_0$ виконується включення $G_{2k}(x) \subseteq U$. Покладемо $k_1 = \max\{k_0, j, n\}$. Тоді оскільки $k_1 \geq k_0$, то $G_{2k_1}(x) \subseteq U$. З іншого боку, оскільки $k_1 \geq j$, то $G_{2k_1}(x) = G_{2k_1}(x_j) \subseteq U_{k_1}$. Таким чином, $\big(\bigcup_{k\geq n} U_k\big) \cap U \supseteq G_{2k_1}(x) \neq \emptyset$. Отже, $x \in \overline{\bigcup_{k\geq n} U_k}$. Значить, $E \subseteq \bigcap_n \overline{\bigcup_{k\geq n} U_k}$. Але $\bigcap_n \overline{\bigcup_{k\geq n} U_k}$ – замкнена множина, тому $F \subseteq \overline{E} \subseteq \overline{A} = A$.

Доведемо, що $A \subseteq \overline{E} = F$. Припустимо, що $A \nsubseteq F$. Тоді існує $a \in A$ така, що $a \notin F$. Оскільки $(G_n(x))_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ дискретна на $X \setminus F \ni a$, то існує окіл V точки a, що перетинається не більш ніж з однією з множин $G_n(x)$. Отже, існує таке $x_j \in E$ і $m \in \mathbb{N}$ такий, що $G_n(x) \cap V = \emptyset$, якщо $(n, x) \neq (m, x_j)$. Візьмемо $n \in \mathbb{N}$ з $2n > m$. Тоді $a \in A \subseteq \overline{\bigcup_{k\geq n} U_k}$. Тому $V \cap \big(\bigcup_{k\geq n} U_k\big) \neq \emptyset$. Звідси матимемо, що існує $k \geq n$, для якого $U_k \cap V \neq \emptyset$. Але $U_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_{2k}(x_i)$. Тому існує $i \in \mathbb{N}$ таке, що $G_{2k}(x_i) \cap V \neq \emptyset$. Але $2k \geq 2n > m$, і тому $(2k,\ x_i) \neq (m, x_i)$. Тоді $G_{2k}(x) \cap U = \emptyset$, що неможливо. Таким чином, $F = A = \mathrm{Lim}_n U_n$. Аналогічно доводимо, що $F = \mathrm{Lim}_n V_n$.

5. Побудова функції з ніде не щільною множиною точок розриву.

Теорема 5.1. *Нехай X – еберлейновий простір, F – замкнена ніде не щільна сепарабельна підмножина X і G – відкрита підмножина X така, що $F \subseteq \mathrm{fr}G$. Тоді існує функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що $\mathrm{D}(f) = F$ і $\mathrm{supp}f \subseteq G$.*

Доведення. Оскільки X еберлейновий простір, то не буде обмеженням вважати, що X є деякою відносно компактною підмножиною в $c_0^p(T)$.

Користуючись сепарабельністю множини F, виберемо не більш ніж зліченну щільну підмножину E множини F. Виберемо сім'ю $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}, x\in E}$ за лемою 3.1, де в ролі G_n виступає множина G. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ і $x \in E$ візьмемо деяку точку $a_n(x) \in G_n(x)$. Оскільки простір X цілком регулярний, то для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in E$ існує неперервна функція $f_n^x : X \to [0; 1]$ така, що $f_n^x(a_n(x)) = 1$ і $f_n^x(y) = 0$ при $y \in X \setminus G_n(x)$. Покладемо

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x\in E} f_n^x(y), \quad y \in X$$

і перевіримо, що f є шуканою. Очевидно, що $\mathrm{supp}f \subseteq G$, бо $f_n^x(y) = 0$ на $X \setminus G_n(x)$. Оскільки сім'я $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}, x\in E}$ дискретна на множині $X \setminus \overline{E} = X \setminus F$ і функції f_n^x неперервні, то функція f буде неперервною в кожній точці множини $X \setminus F$, а значить $\mathrm{D}(f) \subseteq F$.

Покажемо, що $\mathrm{D}(f) = F$. Візьмемо деяку точку $a \in F$. Оскільки $G_n(x) \cap F = \emptyset$, то $f_n^x(a) = 0$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in E$, а значить, $f(a)$=0. Розглянемо деякий відкритий окіл U точки a. Оскільки $\overline{E} = F$, виберемо деяку точку $x \in U \cap E$. Але $G_n(x) \to x$. Тому $a_n(x) \to x$. Значить існує $n \in \mathbb{N}$ такий, що $a_{2n}(x) \in U$. І, крім того, $f(a_{2n}(x)) = f_{2n}^x(a_{2n}(x)) = 1$. Таким чином, f розривна в точці a.

6. Побудова квазінеперервної функції з даною множиною точок розриву. Функція $f : X \to Y$ називається *квазінеперервною*, якщо для довільної точки x, її околу U і околу V точки $f(x)$ існує відкрита не порожня множина $U_1 \subseteq U$ така, що $f(U_1) \subseteq V$. Як відомо, сума квазінеперервних функцій не зобов'язана бути квазінеперервною. Наступна теорема дозволяє будувати квазінеперервні функції у вигляді суми рівномірно збіжного ряду.

Теорема 6.1. [6, Theorem 3.2] *Нехай $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність ніде не щільних підмножин топологічного простору X таких, що $\overline{E_m}$ парно досяжні і $\overline{E_m} \bigcap E_n = \emptyset$ при $m < n$. Тоді існує послідовність відкритих підмножин G_n, таких, що $\overline{G_m \cap G_n} \cap \overline{E_m} = \emptyset$ для всіх $m < n$, $E_n \subseteq \mathrm{fr}G_n$ для довільного n. Крім того, для будь яких функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ з $\mathrm{supp}f_n \subseteq G_n$ і $\mathrm{D}(f_n) \subseteq \overline{E_n}$ виконується, що $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ квазінеперервна* *на X, якщо цей ряд збігається рівномірно.*

Наступні два твердження є добре відомими, але для повноти викладу ми наведемо їх з доведеннями.

Лема 6.2. *Нехай X – топологічний простір і $f, g : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервні знизу функції. Тоді* $\mathrm{D}(f+g) = \mathrm{D}(f) \cup \mathrm{D}(g)$.

Доведення. Візьмемо $x_0 \in X$. Якщо $x_0 \notin \mathrm{D}(f) \cup \mathrm{D}(g)$, то функції f і g неперервні в точці x_0, а значить, і функція $f+g$ неперервна в точці x_0, а тому $x_0 \notin \mathrm{D}(f+g)$. Таким чином, $\mathrm{D}(f+g) \subseteq \mathrm{D}(f) \cup \mathrm{D}(g)$.

Розглянемо тепер точку $x_0 \in \mathrm{D}(f) \cup \mathrm{D}(g)$. Нехай, для певності, $x_0 \in \mathrm{D}(f)$. Покажемо, що $h = f+g$ – розривна в точці x_0. Оскільки $x_0 \in \mathrm{D}(f)$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного околу U точки x_0 існує $x_U \in U$, для якого виконується, що $|f(x_U) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Далі з означення напівнеперервності функції f матимемо, що існує окіл U_0 точки x_0, що для довільного $x \in U_0$ матимемо, що $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

Нехай $U \subseteq U_0$ і виберемо $x_U \in U \subseteq U_0$. Тоді виконується, що

$f(x_U) - f(x_0) \geq \varepsilon$ або $f(x_U) - f(x_0) \leq -\varepsilon$,

а також

$f(x_U) - f(x_0) > -\varepsilon$.

В такому разі, $f(x_U) - f(x_0) \geq \varepsilon$.

Оскільки g – напівнеперервна знизу, то існує $U_1 \subseteq U_0$, що для довільного $x \in U_1$ матимемо, що $g(x) > g(x_0) - \varepsilon/2$. Крім того, $U \subseteq U_1$, тому $f(x_U) + g(x_U) > f(x_0) + \varepsilon + g(x_0) - \varepsilon/2$. Тоді для кожного $U \subseteq U_1$ існує точка $x_U \in U$така, що $h(x_U) > h(x_0) + \varepsilon/2$. Отже, $x_0 \in \mathrm{D}(h)$.

Лема 6.3. *Нехай X – топологічний простір, $f_n : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервні знизу функції, такі, що ряд $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ рівномірно збіжний. Тоді* $\mathrm{D}(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}(f_n)$.

Доведення. Нехай $x_0 \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}(f_n)$. Тоді f_n буде неперервною в точці x_0 для довільного n, а тому і $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ неперервна в цій точці. Звідси матимемо, що $x_0 \notin \mathrm{D}(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n)$. Тому $\mathrm{D}(f) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}(f_n)$.

Якщо $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}(f_n)$, то існує такий номер n, що $x_0 \in \mathrm{D}(f_n)$. Нехай $g = \sum_{k \neq n} f_k$. Функції f_n і g - напівнеперервні знизу, тоді, користуючись лемою 7.1, матимемо, що $x_0 \in \mathrm{D}(f_n) \subseteq \mathrm{D}(f_n) \cup \mathrm{D}(g) = \mathrm{D}(f_n + g) = \mathrm{D}(f)$. Тому $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}(f_n) \subseteq \mathrm{D}(f)$.

Наступна теорема є основним результатом нашої роботи.

Теорема 6.4. *Нехай X – еберлейновий простір і E – сепарабельна F_σ-множина першої категорії в X. Тоді існує квазінеперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що* $\mathrm{D}(f) = E$.

Доведення. Оскільки E є F_σ-множиною першої категорії, то $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F'_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E'_n$, де F'_n – деякі замкнені множини, а E'_n ніде не щільні. Для кожного n визначимо $F_n = \big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} F'_k\big) \bigcap \big(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{E'_k}\big)$. Множина $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F'_k$ є замкненою як скінченне об'єднання замкнених множин, і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{E'_k}$ – замкнена ніде не щільна множина для кожного n. Тоді матимемо, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. За побудовою послідовність множин F_n зростає. Тоді поклавши $E_1 = F_1$ і $E_n = F_n \setminus F_{n-1}$ для $n > 1$, матимемо, що $\overline{E_m} \cap E_n = \emptyset$ при $m < n$.

Оскільки в еберлейновому просторі підмножина сепарабельної множини знову буде сепарабельною, то множини $\overline{E_n}$ будуть сепарабельними. Отже, за теоремою 4.1 вони є парно досяжними. Тепер побудуємо множини G_n користуючись теоремою 6.1. Використавши теорему 5.1 для множин $F = \overline{E_n}$ і $G = G_n$ для довільного номера n побудуємо таку функцію $f_n : X \to [0,1]$, для якої $\mathrm{D}(f) = \overline{E_n}$ і $\mathrm{supp} f_n \subseteq G_n$. Оскільки $|\frac{1}{2^n} f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ рівномірно збіжний. Тому за вибором множин G_n матимемо, що функція $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ квазінеперервна. Крім того, оскільки $E_n = \overline{E_n} \subseteq F_n$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = E$. Тому, скориставшись лемою 6.3 одержимо, що

$D(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}(f_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = E.$

7. Приклад не спадково нормального компакту Еберлейна. Нехай T – незлічений дискретний простір і $X = \alpha T$ – його компактифікація Александрова. Тобто, околами точки $x \neq \infty$ є усі множини $U \subseteq X$, які містять x, а околом точки $x = \infty$ є будь-яка множина $U \subseteq X$, що містить ∞ і така, що $X \setminus U$ – скінченна. Легко перевірити, що X – компакт Еберлейна, адже відображення $\varphi : X \to c_0^p(T)$, визначене за правилом $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi(t) = \chi_{\{t\}}$, здійснює гомеоморфне вкладення простору X в $c_0(T)$. Нехай $Y = [0,1]$. Тоді простір $P = X \times Y$ також буде компактом Еберлейна.

Покажемо, що P не спадково нормальний простір. Досить показати, що простір $P' = P \setminus \{(0,\infty)\}$ не є нормальним. Для цього виберемо множини $A = T \times \{0\}$ і $B = \{\infty\} \times (0,1]$. Множини A і B замкнені в P' і, крім того, $A \cap B = \emptyset$. Припустимо, що існують відкриті в P' множини U та V такі, що $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ і $U \cap V = \emptyset$. Для довільного $t \in T$ матимемо, що $(t,0) \in A \subseteq U$, а значить, U є околом точки $(t,0)$. Тоді існує $\varepsilon_t > 0$ таке, що $\{t\} \times [0,\varepsilon_t) \subseteq U$. Нехай $T_n = \{t \in T : \varepsilon_t > 1/n\}$. Множина $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ незліченна. Тоді існує номер n такий, що множина T_n незліченна. Зрозуміло, що $E = \{(t,\frac{1}{n}) : t \in T_n\} \subseteq U$. Тоді точка $(\infty, 1/n) \in \overline{E} \subseteq \overline{U}$ і, крім того, $(\infty, 1/n) \in B \subseteq V$. Звідси отримуємо, що $\overline{U} \cap V \neq \emptyset$. Отже, $U \cap V \neq \emptyset$, а це суперечить вибору множин U та V. Тому простір P' не є нормальним, а, отже, P не є спадково нормальним простором.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kershner R.* The continuity of functions of many variables // Trans. Amer. Math. Soc. - 1943. - P.30-44.

2. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Acad. Sinica. - 1976. - 4, N2. - P.191-203.

3. *Маслюченко В. К., Михайлюк В.В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн. - 2000. - 52, N6. - с.740-747.

4. *Маслюченко О. В.* Коливання нарізно неперервних функцій на добутку компактів Еберлейна // Науковий вісник чернівецького університету. Вип. 76. Серія математика. - 2000. - С.67-70.

5. *Maslyuchenko O. V.* The discontinuity point sets of quasi-continuous functions // Bull. Australian Math. Soc. - 2007. -**75**. - P.373-379.

6. *Maslyuchenko O. V.* The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces // Houston Journal of Mathematics. 2009. - **35**, N1. - P.113-130.

7. *Amir D., Lindenstraus I.* The structure of weakly compact sets in Banach spaces // Ann. Math. - 1968. - **88**, N1. - P.35-46.