УДК 517.9

©2013 р. **Ю.І. Самойленко**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У ПРОСТОРІ ШВИДКО СПАДНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено достатні умови існування у просторі швидко спадних функцій розв'язку лінійного неоднорідного рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами та задачі Коші для такого рівняння.

We find sufficient conditions for the existence of a solution of a linear non-homogeneous partial differential equation of the first order with variable coefficients, and the Cauchy problem for the equation.

1. Вступ. Диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними до сьогодні залишаються цікавим об'єктом дослідження, оскільки такі рівняння описують багато цікавих фізичних явищ. Так, Дж. Уізем та М. Лайтхілл показали, що рівняння першого порядку можуть використовуватися для моделювання процесів в диспергуючих середовищах [1, 2], паводкових явищ [3], хвиль в транспортних потоках [4, 5]. Проте слід зауважити, що подібні рівняння становлять значний інтерес і як допоміжні задачі, які з'являються, наприклад, при застосуванні асимптотичних методів для побудови наближених розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, таких як рівняння Кортевега-де Фріза, рівняння sin-Gordon, нелінійне рівняння Шредінгера, та інш. [6]. При цьому головні члени відповідних асимптотичних розв'язків визначаються з квазілінійних диференціальних рівнянь першого порядку, а вищі члени – з лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними вивчалися багатьма авторами. Так, в [7] досліджено умови існування розв'язку задачі Коші вигляду

$$u_t + (f(x,t,u))_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad (1)$$

для випадку, коли початкова функція $u_0(x)$ є кусково-неперервною і точки її розриву є точками розриву першого роду, а їх кількість – не більш ніж злічення. За певних умов на функцію $f(x,t,u)$ доведено [7] існування та єдиність розв'язку задачі Коші (1) і отримано співвідношення, якому задовольняє розв'язок цієї задачі Коші на кривій розриву.

Результати статті [7] отримали розвиток в [8], де вивчено питання про існування на множині $\Omega = \mathbf{R} \times [0;T]$ узагальнених ентропійних розв'язків квазілінійного рівняння вигляду

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (2)$$

тобто таких кусково-гладких функцій $u = u(x,t)$, які для всіх $\varphi(x,t) \in C_0^\infty(\Omega)$ задовольняють інтегральне співвідношення

$$\int\limits_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x)\,dt\,dx = 0. \quad (3)$$

За умови, що функція $f(u)$ в (2) на кривій розриву Γ функції $u(x,t)$ на множині Ω задовольняє умову Ранкіна-Гюгоніо [9]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[f(u)]_\Gamma}{[u]_\Gamma} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad (4)$$

де $x = x(t)$ – рівняння кривої Γ, $[u]_\Gamma = u_+ - u_-$ – стрибок функції $u(x,t)$ на кривій Γ, $[f(u)]_\Gamma = f(u_+) - f(u_-)$ – стрибок функції $f(u)$ на кривій Γ, в [8] показано: якщо кусково гладка функція $u = u(x,t)$, що визначена на множині Ω і яка має кілька компонент

гладкості $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ і, відповідно, кілька кривих розриву першого роду $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, для яких $\Omega = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Gamma_i\right)$, то функція $u = u(x,t)$ є узагальненим розв'язком (в сенсі інтегральної тотожності (3)) рівняння (2) на множині Ω тоді і лише тоді, коли функція $u(x,t)$ є класичним розв'язком цього рівняння в околі кожної точки гладкості, тобто на кожній множині Ω_i, $i = \overline{1,n}$, і при цьому задовольняє умову Ранкіна-Гюгоніо (4) на кожній кривій розриву Γ_i, $i = \overline{1,k}$, за виключенням скінченного числа точок перетину кривих Γ_i, $i = \overline{1,2}$.

Рівняння (2) відоме в літературі як рівняння Хопфа. Властивості його розв'язків досліджувалися в [10] за допомогою методу зникаючої в'язкості, тобто вивчення властивостей розв'язків рівняння (2) зводилося до аналізу розв'язків сингулярно збуреного рівняння Бюргерса вигляду

$$u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx}, \tag{5}$$

та подальшого граничного ($\varepsilon \to 0$) переходу.

У [11] отримано достатні умови існування в просторі швидко спадних функцій розв'язків рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$a(x,t)u_t + b(x,t)uu_x = 0$$

та задачі Коші для нього. Крім того, в [12, 13] досліджено умови існування розривного розв'язку для такого рівняння та отримано умови типу Гюгоніо.

У [14] отримано достатні умови існування у просторі швидко спадних функцій розв'язків неоднорідного лінійного звичайного диференціального рівняння з оператором Шредінгера, яке виникає при побудові старших членів сингулярної частини асимптотичних однофазових солітоноподібних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами.

У даній статті розглядається лінійне диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними і змінними коефіцієнтами та досліджуються умови існування його розв'язків у просторі швидко спадних функцій. Крім того, вивчається питання про існування у просторі швидко спадних функцій розв'язку задачі Коші для згаданого вище рівняння.

Такі задачі виникають, наприклад, при побудові асимптотичних солітоноподібних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами [15 – 18].

2. Існування розв'язку лінійного неоднорідного рівняння зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій. Позначимо через $S = S(\mathbf{R})$ простір таких нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R}$ функцій $u(x)$, що для довільного цілого числа $m \geq 0$ виконується умова [19]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (D_x^m u)^2\, dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + x^2\right)^m u^2 dx < \infty,$$

а через $C^\infty(0,T;S)$ — простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R} \times [0;T]$ функцій $u(x,t)$ зі значеннями в просторі $S = S(\mathbf{R})$, тобто таких функцій, що для довільних цілих чисел m, $k \geq 0$ виконується умова

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(D_x^m D_t^k u\right)^2 dx +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + x^2\right)^m \left(D_t^k u\right)^2 dx < \infty.$$

Розглянемо питання про існування в просторі $C^\infty(0,T;S)$ розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку вигляду

$$a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{6}$$

де $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ – нескінченно диференційовні за змінними x, t функції, для яких виконується умова

$$a(x,t)\, b(x,t) \neq 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]. \tag{7}$$

З системи рівнянь характеристик для рівняння (6) для визначення її перших інтегра-

лів знаходимо систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b(x,t)}{a(x,t)}, \tag{8}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{c(x,t)}{b(x,t)}u + \frac{f(x,t)}{b(x,t)}. \tag{9}$$

Рівняння (8) є нелінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, яке при досить загальних умовах в околі довільної точки $(x_0, t_0) \in \mathbf{R} \times [0;T]$ має розв'язок $x = h(t, c_1)$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $c_1 \in \mathbf{R}$, що задовольняє початкову умову $h(t_0, c_1) = x_0$.

Розглядаючи рівність $x = h(t, c_1)$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, як рівняння стосовно c_1, знаходимо перший інтеграл системи характеристик для (6), який позначимо $\varphi(x,t) = c_1$. Крім того, з рівності $x = h(t, c_1)$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, знаходимо співвідношення $t = g(x, c_1)$, $x \in \mathbf{R}$.

Рівняння (9) є лінійним неоднорідним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, з якого знаходимо ще один перший інтеграл системи характеристик для рівняння (6), який можна записати у вигляді $\psi(x,t,u) = c_2$, де

$$\psi(x,t,u) = [u - B(x,t)]\, e^{A(x,t)},$$

$$A = A(x,t) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{c(\tau, g(\tau, \varphi(x,t)))}{b(\tau, g(\tau, \varphi(x,t)))}\, d\tau, \tag{10}$$

$$B = B(x,t) = \tag{11}$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} e^{A(\tau,t) - A(x,t)} \frac{f(\tau, g(\tau, \varphi(x,t)))}{b(\tau, g(\tau, \varphi(x,t)))}\, d\tau.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (6) можна записати у неявному вигляді таким чином

$$\Phi\left(\varphi(x,t), \psi(x,t,u)\right) = 0. \tag{12}$$

Тут $\Phi(\varphi, \psi) \in C^\infty(\Xi; \mathbf{R})$ – така функція, що повна похідна за змінною u від функції в лівій частині (12) не дорівнює нулеві для всіх (x,t,u) з множини G значень змінних (x,t,u) відображення $(x,t,u) \to (\varphi, \psi)$, де позначено $\varphi = \varphi(x,t)$, $\psi = \psi(x,t,u)$ і припускається, що існує хоча б одна точка $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi$, для якої $\Phi(\varphi_0, \psi_0) = 0$.

Має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1. *функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ в (6) є нескінченно диференційовними і задовольняють умову (7);*
2. *функції $A(x,t)$, $B(x,t) \in C^\infty(0,T;S)$;*
3. *перший інтеграл $\varphi(x,t) = c_1$, $c_1 \in \mathbf{R}$, рівняння (6) визначений при всіх $x \in \mathbf{R}$ і задовольняє при всіх $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$ і деяких α, $\beta \in \mathbf{R}$, де $\alpha \neq 0$, нерівність*
$$|\varphi(x,t)| \geq |\alpha x + \beta|\,;$$
4. *похідні функції $\varphi = \varphi(x,t)$ задовольняють при всіх $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0,T]$ нерівності*
$$\left| \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial t^m} \varphi(x,t) \right| \leq \left(M_{nm}|x| + N_{nm}\right)^{l_{nm}},$$
де M_{nm}, N_{nm} – деякі дійсні додатні сталі, а l_{nm} – натуральні числа, $n, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$;
5. *функція $u = u(x,t)$, яка неявним чином визначається із співвідношення (12), є неперервно диференційовною і обмеженою для всіх $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$;*
6. *функція $\Phi(\varphi, \psi) \in C^\infty(\Xi; S)$ і для її частинної похідної першого порядку за змінною ψ існує така стала $C > 0$, що для всіх φ, $\psi \in \Xi$ виконується нерівність*
$$\left| \frac{\partial}{\partial \psi} \Phi(\varphi, \psi) \right| \geq C.$$

Тоді похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^\infty(0,T;S)$.

Доведення. Для доведення теореми 1 достатньо знайти похідні $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ із співвідношення (12). Маємо:

$$u_x = -e^{-A} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}(u - B) + \frac{\partial B}{\partial x},$$

$$u_t = -e^{-A} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t}(u - B) + \frac{\partial B}{\partial t},$$

де функції $A = A(x,t)$, $B = B(x,t)$ визначені формулами (10), (11).

З умови 6 теореми 1 випливає, що функція $A = A(x,t)$ набуває найбільшого і найменшого значення на множині $\mathbf{R} \times [0,T]$. Тоді, враховуючи умови 3, 4 теореми 1, отримуємо, що функції

$$e^{-A}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right)^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad e^{-A}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right)^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

належать простору $C^{\infty}(0,T;S)$.

Оскільки розв'язок рівняння (12) – функція $u(x,t)$, обмежений, то з умов 2, 5, 6 теореми 1 слідує, що функції $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ належать простору $C^{\infty}(0,T;S)$.

Теорему 1 доведено.

3. Задача Коші. Розглянемо рівняння (6) з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

де функція $u_0 \in S(\mathbf{R})$, та встановимо умови існування в просторі $C^{\infty}(0,T;S)$ розв'язку задачі Коші (6), (13).

Використовуючи метод характеристик, із співвідношення (12), враховуючи початкову умову (13), знаходимо розв'язок задачі Коші (6), (13) у явному вигляді. Маємо

$$u(x,t) = e^{-A(x,t)}\left[e^{C(x,t,x_0)}u_0(h(0,\varphi(x,t))- \right.$$
$$\left. -D(x,t,x_0) - B(x,t)\right], \tag{14}$$

де

$$C(x,t,x_0) =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{h(0,\varphi(x,t))} \frac{c(\tau,g(\tau,\varphi(h(0,\varphi(x,t)),0)))}{b(\tau,g(\tau,\varphi(h(0,\varphi(x,t)),0)))}d\tau,$$

$$D(x,t,x_0) = \int\limits_{x_0}^{h(0,\varphi(x,t))} e^{-C(x,t,\tau)}\times$$
$$\times\frac{f(\tau,g(\tau,\varphi(h(0,\varphi(x,t)),0)))}{b(\tau,g(\tau,\varphi(h(0,\varphi(x,t)),0)))}d\tau,$$

точка $x_0 \in \mathbf{R}$ є довільною.

Тоді враховуючи формулу (14) розв'язку задачі Коші (6), (13), отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1 – 4 теореми 1, функції $u_0(h(0,\varphi(x,t)))$, $C(x,t)$ та $D(x,t)$ належать простору $C^{\infty}(0,T;S)$.*

Тоді розв'язок задачі Коші (6), (13) належить простору $C^{\infty}(0,T;S)$.

Доведення. Оскільки функція $e^{-A(x,t)}$ обмежена на множині $\mathbf{R} \times [0;T]$, то із зображення (14) для розв'язку задачі Коші (6), (13) випливає, що функція $u(x,t)$ належить простору $C^{\infty}(0,T;S)$.

4. Приклад. Розглянемо задачу Коші вигляду

$$u_t + u_x = -4\,\mathrm{ch}^{-3}(x+t)\,\mathrm{sh}\,(x+t), \tag{15}$$
$$(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T],$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \mathrm{ch}^{-2}\,x, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{16}$$

Рівняння для визначення перших інтегралів системи характеристик для (15) мають вигляд

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{du}{dx} = -4\,\mathrm{ch}^{-3}(x+t)\,\mathrm{sh}\,(x+t),$$

звідки знаходимо перші інтеграли

$$x - t = c_1, \quad u - \mathrm{ch}^{-2}(x+t) = c_2.$$

Поклавши $\varphi(x,t) = x - t$, $\psi(x,t,u) = u - \mathrm{ch}^{-2}(x+t)$, знаходимо $g(x,c_1) = x - c_1$, $h(t,c_1) = t + c_1$ і переконуємося, що умови теореми 2 виконуються. Отже, задача Коші (15), (16) має розв'язок у просторі $C^{\infty}(0,T;S)$, де $T > 0$ – довільне, але фіксоване число.

Зауважимо, шо розв'язок цієї задачі Коші можна записати у явному вигляді наступним чином

$$u(x,t) = \mathrm{ch}^{-2}(x+t), \quad (x,t) \in \mathbf{R}^2.$$

5. Висновки. Встановлено достатні умови існування у просторі швидко спадних функцій розв'язку лінійного неоднорідного рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами та задачі Коші для такого рівняння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lighthill M.J., Whitham G.B.* On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers // Proc. Roy. Soc. (London). – 1965. – **229 A**. – P. 281-316.

2. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Советское радио, 1977. – 368 с.

3. *Lighthill M.J.* Group velocity // Journ. of the Institute of Mathematical Applications. – 1965. – **1**. – P. 1-28.

4. *Lighthill M.J., Whitham G.B.* On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. Roy. Soc. (London). – 1965. – **229 A**. – P. 317-345.

5. *Gazis D.C.* Mathematical theory of automobile traffic // Science. – 1967. – **157**. – P. 273-281.

6. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – **36 (219)**, N 2. – С. 63-124.

7. *Олейник О.А.* О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. – 1954. – **95**, N 3. – С. 451-454.

8. *Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения с частными производными первого порядка. – М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. ф-те МГУ, 1999. – 96 с.

9. *Ablowitz M.J.* Nonlinear dispersive waves. Asymptotic analysis and solitons. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 348 p.

10. *Hopf E.* On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order // Journ. of Mathematics and Mechanics. – 1969. – **19**, N 6. – P. 483-487.

11. *Самойленко Ю.І.* Існування розв'язку задачі Коші для рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Збірник наукових праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, N 1. – С. 7-15.

12. *Самойленко Ю.І.* Умови існування розривних розв'язків квазілінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Вісник Київського національного університету. Математика. Механіка. – 2009. – **22**. – С. 25–32.

13. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.И.* Метод погранслоя и условия типа Гюгонио для уравнения Кортевега-де Фриза // Вестник Брестского государственного университета. Серия 4. Физика. Математика. – 2010. – N 2. – С. 128–143.

14. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Існування розв'язку неоднорідного рівняння з одновимірним оператором Шредінгера в просторі швидко спадних функцій // Укр. мат. вісник. – 2012. – **9**, N 2. – С. 38-45.

15. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – **58**, N 1. – С. 111-124.

16. *Samoylenko Yul.* Asymptotical expansions for one-phase soliton type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – 3. – P. 1435-1441.

17. *Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром парного степеня при старшій похідній // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наукових праць. Математика. – 2009. – **485**. – С. 102-107.

18. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, N 1. – С. 122-132.

19. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1988. – **13**. – С. 56-105.