УДК 517.98

©2013 р. А.В. Соломко, С.В. Шарин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

# УЗАГАЛЬНЕНІ ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ФУР'Є-ОБРАЗІВ ЗГОРТКОВОЇ АЛГЕБРИ РОЗПОДІЛІВ ШВАРЦА З НОСІЯМИ В КОНУСІ

Доведений аналог теореми Пелі-Вінера для класу Гарді-Лебеґа про зображення Фур'є-образу згорткової алгебри розподілів на конусі у вигляді мультиплікативної алгебри аналітичних функцій комплексної змінної.

We prove an analogue of the Paley-Wiener theorem for Hardy-Lebesgue's class on the representation of the Fourier-image of a convolution algebra of distributions on a cone in the form of a multiplicative algebra of analytic functions of complex variable.

**1. Вступ.** В роботі [1] з точністю до топологічного ізоморфізму описано Фур'є-образ $\widehat{D}'_\Gamma$ алгебри $D'_\Gamma$ розподілів Шварца з носіями в довільному конусі $\Gamma$ в термінах операторів. В цій статті розглянуто іншу інтерпретацію мультиплікативної алгебри $\widehat{D}'_\Gamma$, а саме, показано зображення елементів з $\widehat{D}'_\Gamma$ у вигляді узагальнених граничних значень перетворення Фур'є-Лапласа розподілів Шварца з носіями в $\Gamma$. З цією метою встановлено аналог теореми Пелі-Вінера для класу Гарді-Лебеґа, що характеризує елементи алгебри $\widehat{D}'_\Gamma$ як деякі аналітичні функції. Робота є продовженням низки досліджень (див. [1–4]), присвячених побудові та вивченню властивостей функціонального числення для генераторів сильно неперервних багатопараметричних напівгруп операторів у класах узагальнених функцій Шварца.

**2. Основні позначення і термінологія.** Для довільних $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $s=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}^n$, $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ будемо використовувати такі позначення: $t^k:=t_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot t_n^{k_n}$, $\partial^k:=\partial_1^{k_1}\cdots\partial_n^{k_n}$, де $\partial_j^{k_j}:=\frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$ $(j=\overline{1,n})$, $|k|:=k_1+\dots+k_n$ і $(t,s)=t_1s_1+\dots+t_ns_n$.

Для довільного локально опуклого простору $X$ символом $\mathscr{L}(X)$ будемо позначати простір всіх лінійних неперервних операторів над $X$ з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Нехай $D(\mathbb{R}^n)$ — лінійний простір нескінченно диференційовних в $\mathbb{R}^n$ функцій $\varphi$ з компактними носіями $\operatorname{supp}\varphi$. Через $D(K)$ позначимо підпростір тих функцій з $D(\mathbb{R}^n)$, носії яких містяться в компакті $K\subseteq\mathbb{R}^n$. Простір $D(K)$ топологізуємо за допомогою зліченного набору норм $\|\varphi\|_{m,K}:=\sup\limits_{|k|\le m}\sup\limits_{t\in K}\left|\partial^k\varphi(t)\right|$, $m\in\mathbb{Z}_+$. Відомо [5], що $D(K)$ є банаховим простором відносно кожної з норм $\|\cdot\|_{m,K}$. На просторі $D(\mathbb{R}^n)$ введемо топологію індуктивної границі $\liminf\limits_{r\to\infty} D(K_r)$ відносно тотожних вкладень $D(K_r)\hookrightarrow D(K_s)$, $r<s$, де $K_r$ — замкнена куля радіуса $r>0$ з центром в нулі. Топологічний простір $D(\mathbb{R}^n)$ називають простором основних функцій. Сильно спряжений з $D(\mathbb{R}^n)$ простір розподілів Шварца позначимо $D'(\mathbb{R}^n)$. Введені вище простори утворюють класичну двоїстість $\langle D'(\mathbb{R}^n),D(\mathbb{R}^n)\rangle$ з білінійною формою $\langle f,\varphi\rangle$.

Нехай $\Gamma$ — замкнений опуклий гострий тілесний конус в $\mathbb{R}^n$ з вершиною в нулі. Розглянемо в $D'(\mathbb{R}^n)$ підпростір $D'_\Gamma$ тих розподілів $f$, носії $\operatorname{supp} f$ яких містяться в $\Gamma$. Відомо [6, ст. 75], що простір $D'_\Gamma$ є алгеброю відносно операції згортки $D'_\Gamma\times D'_\Gamma\ni(f,h)\longmapsto f*h\in D'_\Gamma$.

Нехай $(D'_\Gamma)^o$ позначає поляру підпростору $D'_\Gamma$ відносно двоїстості $\langle D'(\mathbb{R}^n),D(\mathbb{R}^n)\rangle$, тобто

$$(D'_\Gamma)^o=\{\varphi\in D(\mathbb{R}^n):\operatorname{supp}\varphi\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\Gamma\}.$$

Фактор-простір

$$D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o=\{\varphi_\Gamma=\varphi+(D'_\Gamma)^o:\varphi\in D(\mathbb{R}^n)\}$$

збігається зі спряженим з $D'_\Gamma$ [7, с. 169].

Зауважимо, що ядро відображення

$$\varrho : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi(t) \longmapsto \lambda_\Gamma(t)\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

де $\lambda_\Gamma$ — характеристична функція конуса $\Gamma$, збігається з полярою $(D'_\Gamma)^o$, яка є замкненим ідеалом у $D(\mathbb{R}^n)$. Образ простору $D(\mathbb{R}^n)$ при відображенні $\varrho$ позначимо

$$D_\Gamma := \varrho[D(\mathbb{R}^n)] = \{\lambda_\Gamma(t)\varphi(t) : \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

З результатів праці [8] випливає існування лінійного та неперервного оператора

$$\lambda : D_\Gamma \ni \psi \longmapsto \widetilde{\psi} \in D(\mathbb{R}^n)$$

такого, що в конусі $\Gamma$ (включно з його межею) похідні довільного порядку $k \in \mathbb{Z}_+$ узгоджуються між собою, тобто $\partial^k\psi(t) = \partial^k\widetilde{\psi}(t)$ для всіх $t \in \Gamma$. Зрозуміло, що на межі конуса похідні $\partial^k\psi(t)$ слід розуміти як односторонні. Тому надалі для довільного $\psi \in D_\Gamma$ символ $\partial^k\psi(t)$ будемо розуміти саме в цьому сенсі.

Використовуючи відображення $\varrho$ і оператор $\lambda$, можна побудувати топологічний ізоморфізм $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o \simeq D_\Gamma$. Звідси випливає, що дуальна пара $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$ генерує нову двоїстість $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$. На просторі $D_\Gamma$ задамо топологію індуктивної границі $D_\Gamma = \liminf\limits_{r\to\infty} D(\Gamma_r)$ відносно тотожних вкладень $D(\Gamma_r) \hookrightarrow D(\Gamma_s)$, $r < s$, де $\Gamma_r$ є перетином конуса $\Gamma$ із замкненою кулею $K_r$ радіуса $r > 0$.

Елементи простору $D_\Gamma$ — інтегровні в $\Gamma$ функції, тому перетворення Фур'є можна визначити співвідношенням

$$\mathcal{F} : D_\Gamma \ni \psi(t) \longmapsto \widehat{\psi}(\xi) = \int\limits_\Gamma e^{-i(t,\xi)}\psi(t)dt,$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$. Нехай $\widehat{D}_\Gamma = \{\widehat{\psi} : \psi \in D_\Gamma\}$ позначає Фур'є-образ простору $D_\Gamma$. Використовуючи ін'єктивність відображення $\mathcal{F}$, на Фур'є-образах $\widehat{D}(\Gamma_r) = \{\widehat{\psi} : \psi \in D(\Gamma_r)\}$ кожного із підпросторів $D(\Gamma_r)$ вводимо топологію за допомогою зліченного набору норм

$$\|\widehat{\psi}\|_{m,\Gamma_r} := \|\psi\|_{m,\Gamma_r}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,\ \psi \in D(\Gamma_r).$$

Тоді $\widehat{D}_\Gamma = \liminf\limits_{r\to\infty} \widehat{D}(\Gamma_r)$. Сильно спряжений з $\widehat{D}_\Gamma$ простір позначимо $\widehat{D}'_\Gamma$.

Визначимо спряжене з оберненим перетворенням Фур'є $\mathcal{F}^{-1}$ відображення

$$\mathcal{F}^* := (2\pi)^n(\mathcal{F}^{-1})' : D'_\Gamma \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{D}'_\Gamma, \quad (1)$$

яке будемо називати узагальненим перетворенням Фур'є розподілів з простору $D'_\Gamma$. Асоційована з цим перетворенням білінійна форма

$$\langle \widehat{f}, \widehat{\psi}\rangle = (2\pi)^n\langle f, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\psi]\rangle = (2\pi)^n\langle f, \psi\rangle,$$

де $f \in D'_\Gamma$, $\psi \in D_\Gamma$, визначає нову двоїстість $\langle \widehat{D}'_\Gamma, \widehat{D}_\Gamma\rangle$.

Доведено [2], що простір $\widehat{D}_\Gamma$ є щільним в $\widehat{D}'_\Gamma$ в сильній топології простору $\widehat{D}'_\Gamma$ відносно дуальності $\langle \widehat{D}'_\Gamma, \widehat{D}_\Gamma\rangle$, і $\widehat{D}'_\Gamma$ є алгеброю відносно множення

$$\mathcal{F}^*[f] \cdot \mathcal{F}^*[h] = \widehat{f} \cdot \widehat{h} = \widehat{f * h} = \mathcal{F}^*[f * h],$$

$f, h \in D'_\Gamma$, яка топологічно ізоморфна згортковій алгебрі $D'_\Gamma$.

**3. Допоміжні твердження.** Нехай

$$\Gamma^* = \{\eta \in \mathbb{R}^n : (\eta, t) \le 0, \forall\, t \in \Gamma\}$$

— спряжений конус до $\Gamma$. Для кожного елемента $\eta \in \Gamma^*$ на просторі основних функцій Шварца $D(\mathbb{R}^n)$ визначимо оператор множення на експоненту

$$\mathcal{Q}_\eta : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi(t) \longmapsto e^{(\eta,t)}\varphi(t) \in D(\mathbb{R}^n).$$

**Лема 1.** *Відображення*

$$\mathcal{Q} : \Gamma^* \ni \eta \longmapsto \mathcal{Q}_\eta \in \mathscr{L}(D(\mathbb{R}^n))$$

*є одностайно неперервною $(C_0)$-напівгрупою операторів у просторі $D(\mathbb{R}^n)$.*

**Доведення.** Напівгрупові властивості перевірити легко. Очевидно, що $\mathcal{Q}_0$ — тотожний оператор. Для довільних $\eta, \mu \in \Gamma^*$ та функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ маємо

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\eta+\mu}\varphi(t) &= e^{(\eta+\mu,t)}\varphi(t)\\ &= e^{(\eta,t)}e^{(\mu,t)}\varphi(t) = (\mathcal{Q}_\eta \circ \mathcal{Q}_\mu)\varphi(t).\end{aligned}$$

Доведемо сильну неперервність напівгрупи. Для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ і кожної замкненої кулі $K_r$ маємо

$$\|\mathcal{Q}_\eta\varphi - \varphi\|_{m,K_r} = \sup_{|k|\le m}\sup_{t\in K_r}\left|\partial^k(\mathcal{Q}_\eta\varphi - \varphi)\right|$$

$$= \sup_{|k|\le m} \sup_{t\in K_r} \left|\partial^k e^{(\eta,t)}\varphi(t) - \partial^k\varphi(t)\right|$$

$$= \sup_{|k|\le m} \sup_{t\in K_r} \left|\sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \eta^l e^{(\eta,t)} \partial^{k-l}\varphi(t) - \partial^k\varphi(t)\right|$$

$$\le M_\eta \sup_{|k|\le m} \sup_{t\in K_r} \left|\partial^k\varphi(t)\right| \left|\sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \eta^l - 1\right|$$

$$= M_\eta \|\varphi\|_{m,K_r}((1+\eta)^k - 1),$$

де $M_\eta = \sup_{t\in K_r} e^{(\eta,t)}$, $\sum_{|l|=0}^{|k|} := \sum_{l_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{l_n=0}^{k_n}$, $C_k^l := C_{k_1}^{l_1} \cdot \ldots \cdot C_{k_n}^{l_n}$. Зауважимо, що $\lim_{\Gamma^*\ni\eta\to 0} M_\eta = 1$, тому з доведеної нерівності випливає сильна неперервність та поточкова обмеженість напівгрупи $\mathcal{Q}$. Одностайна неперервність цієї напівгрупи випливає з бочковості простору $D(\mathbb{R}^n)$ та принципу рівномірної обмеженості. Лема доведена.

Визначимо оператор

$$Q_\eta : D_\Gamma \ni \psi(t) \longmapsto e^{(\eta,t)}\psi(t) \in D_\Gamma.$$

Використовуючи топологічний ізоморфізм $D(\mathbb{R}^n)/\,(D'_\Gamma)^o \simeq D_\Gamma$ легко довести

**Наслідок 1.** *Відображення*

$$Q : \Gamma^* \ni \eta \longmapsto Q_\eta \in \mathscr{L}(D_\Gamma),$$

*є одностайно неперервною $(C_0)$-напівгрупою операторів над простором $D_\Gamma$.*

На Фур'є-образі $\widehat{D}_\Gamma$ визначимо оператор

$$\widehat{Q}_\eta \,:\, \widehat{\psi}(\xi) \longmapsto \widehat{\psi}(\xi + i\eta),\ \eta \in \Gamma^*,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Лема 2.** *Сім'я операторів*

$$\widehat{Q} : \Gamma^* \ni \eta \longmapsto \widehat{Q}_\eta \in \mathscr{L}(\widehat{D}_\Gamma) \qquad (2)$$

*є одностайно неперервною $(C_0)$-напівгрупою операторів над простором $\widehat{D}_\Gamma$.*

**Доведення.** Напівгрупові властивості очевидні. Доведемо сильну неперервність напівгрупи (2). Для довільних $\psi \in D_\Gamma$ та $\eta \in \Gamma^*$ маємо

$$\widehat{Q_\eta\psi}(\xi) = \int_\Gamma e^{(\eta,t)}\psi(t)e^{-i(t,\xi)}dt$$

$$= \int_\Gamma \psi(t)e^{-i(t,\xi+i\eta)}dt = \widehat{\psi}(\xi + i\eta) = \widehat{Q_\eta}\widehat{\psi}(\xi).$$

Тому для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ і кожної множини $\Gamma_r := \Gamma \cap K_r$ маємо

$$\|\widehat{Q_\eta}\widehat{\psi} - \widehat{\psi}\|_{m,\Gamma_r} = \|\widehat{Q_\eta\psi} - \widehat{\psi}\|_{m,\Gamma_r}$$

$$= \|\widehat{Q_\eta\psi - \psi}\|_{m,\Gamma_r} = \|Q_\eta\psi - \psi\|_{m,\Gamma_r}$$

для всіх $\psi \in D_\Gamma$ та $\eta \in \Gamma^*$. З наслідку 1 випливає, що $\|\widehat{Q_\eta}\widehat{\psi} - \widehat{\psi}\|_{m,\Gamma_r} \to 0$ при $\eta \to 0$ для всіх $\widehat{\psi} \in \widehat{D}_\Gamma$, що еквівалентно сильній неперервності напівгрупи $\widehat{Q}$.

Аналогічно, поточкова обмеженість напівгрупи (2) випливає з відповідної властивості напівгрупи $Q$.

В [2] доведено, що простір $\widehat{D}_\Gamma$ є бочковим. Отже, за принципом рівномірної обмеженості $\widehat{Q}$ є одностайно неперервною напівгрупою операторів над простором $\widehat{D}_\Gamma$. Лема доведена.

Нехай $\mathrm{Int}\Gamma^*$ позначає внутрішність конуса $\Gamma^*$. Визначимо в $\mathbb{C}^n$ трубчасту область

$$\mathbb{C}^n_\Gamma := \left\{z = \xi + i\eta : \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathrm{Int}\Gamma^*\right\}.$$

**Лема 3.** *Кожна із функцій $\widehat{\psi}(\xi) \in \widehat{D}_\Gamma$ припускає єдине аналітичне продовження $\widehat{\psi}(z)$ у трубчасту область $\mathbb{C}^n_\Gamma$, яке можна зобразити у вигляді інтеграла Лапласа*

$$\widehat{\psi}(z) = L[\psi](z) = \int_\Gamma e^{-i(t,z)}\psi(t)dt, \quad z \in \mathbb{C}^n_\Gamma.$$

*При цьому для довільного $\xi \in \mathbb{R}^n$ виконується граничне співвідношення*

$$\widehat{\psi}(\xi) = \lim_{\eta\to 0} \widehat{\psi}(z), \quad z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n_\Gamma.$$

**Доведення.** Твердження є безпосереднім наслідком класичної теореми Пелі-Вінера для класу Гарді-Лебеґа у випадку $n$ незалежних змінних (див. [9, ст. 226]).

**4. Граничні значення перетворення Фур'є-Лапласа елементів простору $D'_\Gamma$.**

Розширимо сім'ю операторів $\{Q_\eta : \eta \in \Gamma^*\}$ на простір $D'_\Gamma$ природним способом

$$\langle Q_\eta f, \psi\rangle := \langle f, Q_\eta\psi\rangle, \quad \psi \in D_\Gamma, \quad f \in D'_\Gamma.$$

Для кожного розподілу $f \in D'_\Gamma$ визначимо перетворення Фур'є-Лапласа

$$\mathcal{L}[f](z) := \mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi) = \widehat{Q_\eta f}(\xi),$$

$z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n_\Gamma$, де $\mathcal{F}^*$ — узагальнене перетворення Фур'є, визначене формулою (1).

Будемо казати, що аналітична в трубчастій області $\mathbb{C}^n_\Gamma$ функція $g(z)$ належить до алгебри $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$, якщо вона задовольняє дві умови:

1) для кожного фіксованого $\eta \in \mathrm{Int}\Gamma^*$ функція $\xi \longmapsto g(\xi + i\eta)$ належить до простору $\widehat{D}'_\Gamma$;

2) сукупність $\{g(\xi + i\eta) : \eta \in \Gamma^*_r\}$ обмежена в просторі $\widehat{D}'_\Gamma$ для кожного скінченного дійсного додатного числа $r$, де $\Gamma^*_r := \mathrm{Int}\Gamma^* \cap K_r$.

**Теорема 1.** *Перетворення Фур'є-Лапласа здійснює алгебраїчний ізоморфізм згорткової алгебри $D'_\Gamma$ в мультиплікативну алгебру $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$. Зокрема,*

$$\mathcal{L}[f * h] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[h], \quad f, h \in D'_\Gamma,$$

*і $\mathcal{L}[\delta]$ є одиничною функцією алгебри $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$.*

**Доведення.** Зауважимо, що для $\psi \in D_\Gamma$ і кожного фіксованого $\eta \in \Gamma^*$ формула

$$\begin{aligned}\langle \widehat{Q_\eta f}, \widehat{\psi} \rangle &= (2\pi)^n \langle Q_\eta f, \psi \rangle \\ &= (2\pi)^n \langle f, Q_\eta \psi \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{Q_\eta \psi} \rangle\end{aligned} \tag{3}$$

однозначно визначає $\widehat{Q_\eta f}$ як лінійний та неперервний функціонал на просторі $\widehat{D}_\Gamma$. Справді, однозначність є наслідком відокремлюваності двоїстості $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. Неперервність є наслідком неперервності функціонала $\widehat{f}$ на $\widehat{D}_\Gamma$.

З іншого боку, оскільки $\mathcal{F}^*$ здійснює топологічний ізоморфізм згорткової алгебри $D'_\Gamma$ на мультиплікативну алгебру $\widehat{D}'_\Gamma$ (див. [3]), то з означення відображення $\mathcal{L}$ випливає, що $\mathcal{L}[f]$ є узагальненим перетворенням Фур'є розподілу $Q_\eta f \in D'_\Gamma$, а тому є елементом простору $\widehat{D}'_\Gamma$ для кожного фіксованого $\eta \in \mathrm{Int}\Gamma^*$.

Покажемо, що формула (3) визначає продовження функціонала $\widehat{f} \in \widehat{D}'_\Gamma$ в простір $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$. Для цього достатньо довести виконання умови 2) з означення алгебри $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$. З наслідку 1 випливає, що для довільної функції $\psi \in D_\Gamma$ сукупність $\{Q_\eta \psi : \eta \in \Gamma^*_r\}$ є обмеженою в $D_\Gamma$ для кожного скінченного дійсного $r > 0$. Тоді із співвідношення (3) випливає, що сукупність $\{\widehat{Q_\eta f} : \eta \in \Gamma^*_r\}$, де $0 < r < \infty$, є обмеженою в слабкій топології простору $\widehat{D}'_\Gamma$. Оскільки $\widehat{D}'_\Gamma$ — монтелевий простір (див. [3]), то для кожного скінченного дійсного додатного $r$ ця сукупність є обмеженою в сильній топології.

Покажемо аналітичність функціонала $\mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi)$ при $\eta \in \mathrm{Int}\Gamma^*$. Враховуючи щільність підпростору $D_\Gamma$ в $D'_\Gamma$ в сильній топології простору $D'_\Gamma$ відносно дуальності $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$, стверджуємо, що існує така послідовність $\{f_p\} \in D_\Gamma$, що $\lim\limits_{p \to \infty} f_p = f$ в сильній топології простору $D'_\Gamma$.

Доведено [3], що алгебра $D'_\Gamma$ топологічно ізоморфна максимальній підалгебрі $M(D_\Gamma)$ тих операторів в алгебрі $\mathscr{L}(D_\Gamma)$, які комутують з оператором зсуву $T_s$ вздовж конуса $\Gamma$. Враховуючи бочковість простору $D_\Gamma$, з принципу рівномірної обмеженості випливає гіпонеперервність відносно змінної $\varphi \in D_\Gamma$ білінійної форми $D'_\Gamma \times D_\Gamma \ni (f, \varphi) \longrightarrow f * \varphi$. Отже, топології рівномірної збіжності на обмежених множинах і на скінченних множинах збігаються в алгебрі $M(D_\Gamma)$, тому $M(D_\Gamma)$ є повною підалгеброю в топології поточкової збіжності. В такому випадку $\lim\limits_{p \to \infty} (f_p * \varphi) = f * \varphi$ для кожної функції $\varphi \in D_\Gamma$.

Оскільки $f * \varphi \in D_\Gamma$, то Фур'є-образи функцій виду $Q_\eta(f_p * \varphi) := e^{(\eta, t)}(f_p * \varphi)(t)$ при $\eta \in \mathrm{Int}\Gamma^*$ є аналітичними. Тоді для $m = 0$ існує таке число $r > 0$, що при кожному $0 < \varepsilon < r$ отримаємо

$$\begin{aligned}&\sup_p \sup_{-\eta \in \Gamma_r \setminus K_\varepsilon} \|Q_\eta(f_p * \varphi)\|_{0, \Gamma_r} \\ &\leq \sup_p \|f_p * \varphi\|_{0, \Gamma_r} = C < +\infty.\end{aligned}$$

Це означає, що послідовність аналітичних функцій $\{Q_\eta(\widehat{f_p * \varphi})(\xi)\}$ є обмеженою в множині $\Gamma_r \setminus K_\varepsilon$. Тоді з неї можна виділити підпослідовність $\{Q_\eta(\widehat{f_{p_j} * \varphi})(\xi)\}$, що збігається до деякої аналітичної функції $\widehat{g_\varphi}(\xi)$ для довільного $-\eta \in \Gamma_r \setminus K_\varepsilon$. Враховуючи повноту алгебри $M(D_\Gamma)$, робимо висновок, що $\widehat{g_\varphi}$ належить Фур'є-образу $M(D_\Gamma)$.

Оскільки кожний оператор алгебри $M(D_\Gamma)$ має вигляд згортки $f_1*$ з деяким розподілом $f_1 \in D'_\Gamma$, то $\widehat{g_\varphi}(\xi) = (\widehat{f_1 * \varphi})(\xi)$. Тоді з єдиності границі при $j \to \infty$ отримуємо, що $f_1 = f$.

Крім того, для всіх $\varphi, \psi \in D_\Gamma$ маємо

$$\langle \mathcal{F}^*[Q_\eta(f*\varphi)](\xi), \mathcal{F}[\psi](\xi)\rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}^*[f*\varphi](\xi), \mathcal{F}[Q_\eta\psi](\xi)\rangle = (2\pi)^n \langle f*\varphi, Q_\eta\psi\rangle$$

$$= (2\pi)^n \langle Q_\eta(f*\varphi), \psi\rangle = (2\pi)^n \langle Q_\eta f * Q_\eta\varphi, \psi\rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi)\cdot \mathcal{F}^*[Q_\eta\varphi](\xi), \mathcal{F}[\psi](\xi)\rangle,$$

тобто $\mathcal{F}^*[Q_\eta(f*\varphi)] = \mathcal{F}^*[Q_\eta f]\cdot\mathcal{F}^*[Q_\eta\varphi]$ є аналітичною при $-\eta \in \Gamma_r \setminus K_\varepsilon$. Тоді $\mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi)$ є аналітичною у множині $\Gamma_r \setminus K_\varepsilon$. Отже, на підставі довільності вибору чисел $\varepsilon$ і $r$ робимо висновок, що $\mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi)$ є аналітичною в $\mathrm{Int}\Gamma^*$.

З рівності $Q_\eta(f*h) = Q_\eta f * Q_\eta h$ для довільних розподілів $f, h \in D'_\Gamma$ і функції $\psi \in D_\Gamma$ отримаємо

$$\mathcal{L}[f*h](z) = \mathcal{F}^*[Q_\eta(f*h)](\xi) = \mathcal{F}^*[Q_\eta f * Q_\eta h](\xi)$$

$$= \mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi)\cdot\mathcal{F}^*[Q_\eta h](\xi) = \mathcal{L}[f](z)\cdot\mathcal{L}[h](z).$$

Звідси випливає, що $\mathcal{L}[\delta]$ є одиничною функцією в $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$, оскільки $\delta$ — одиниця згорткової алгебри $D'_\Gamma$. Теорема доведена.

**Теорема 2.** *Для довільної функції $g$ з $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$ існує єдиний розподіл $\widehat{f} \in \widehat{D}'_\Gamma$, такий, що в сильній топології простору $\widehat{D}'_\Gamma$ справедлива рівність*

$$\lim_{\mathrm{Int}\,\Gamma^* \ni \eta \to 0} g(\xi + i\eta) = \widehat{f}(\xi),$$

*тобто, Фур'є-образи $\widehat{D}'_\Gamma$ можна трактувати як узагальнені граничні значення аналітичних функцій алгебри $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$.*

**Доведення.** Твердження є наслідком теореми 1 і сильної неперервності напівгрупи $Q_\eta$.

Зауважимо, що оскільки згорткова алгебра $D'_\Gamma$ в сильній топології є бочкова, то згортка є неперервною відносно секвенціальної збіжності. Отже, в просторі $\widehat{D}'_\Gamma$ виконується співвідношення

$$\lim_{\mathrm{Int}\,\Gamma^* \ni \eta \to 0} \widehat{Q_\eta f}\cdot\widehat{Q_\eta h} = \widehat{f}\cdot\widehat{h},$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $f, h \in D'_\Gamma$.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Lopushansky O.V., Solomko A.V., Sharyn S.V.* Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone // Matematychni Studii. — 2011. — **35**, N1. — P. 78-90.

2. *Соломко А.В.* Операторне зображення Фур'є-образу згорткової алгебри розподілів на конусі // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 266-272.

3. *Лопушанський О.В., Соломко А.В., Шарин С.В.* Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — **47**, N2. — С. 95-99.

4. *Соломко А.В.* Окремий випадок операторного числення для узагальнених функцій з носіями на конусі // Карпатські математичні публікації. — 2009. — **1**, N1. — С. 92-99.

5. *Komatsu H.* An introduction to the theory of generalized functions // Tokyo University Publ. — 2000.

6. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 318 с.

7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.

8. *Seeley R.T.* Extensions of $C^\infty$-functions defined in a half-space // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — **15**. — P. 625-626.

9. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. – 624 с.