УДК 517.956

©2013 р. Т.С. Тодоріко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПСЕВДО-БЕССЕЛЕВИМИ ОПЕРАТОРАМИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

У класі узагальнених функцій типу розподілів встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі у випадку, коли гранична умова містить псевдо-Бесселеві оператори, побудовані за різними однорідними і негладкими у точці 0 символами.

We prove the well solvability of a nonlocal multipoint, with respect to time, problem in the case where the boundary condition involves pseudo-Bessel operators constructed by different homogeneous and non-smooth at the origin characters, in the class of generalized functions of a distribution type.

Багато прикладних задач моделюються крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (теорія фізики плазми, ядерних реакцій, вологопереносу, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль, демографічні дослідження тощо). Такі задачі виникають також при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач. В [1-3] вивчалися нелокальні багатоточкові задачі для рівнянь з псевдодиференціальними операторами та багатоточкові сингулярні параболічні задачі.

У праці [4] досліджено властивості оператора $A = F^{-1}_{B_\nu}[aF_{B_\nu}]$, де F_{B_ν}, $F^{-1}_{B_\nu}$ – пряме та обернене перетворення Бесселя, a – однорідний, негладкий у точці 0 символ (A в [4] названо псевдо-Бесселевим оператором), встановлено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$ з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца. В [5] аналогічні результати отримані у випадку задачі Коші для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(A)u = 0, \quad f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k, \qquad (1)$$

де $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ – функція, що задовольняє певні умови.

В.В. Городецьким та В.І. Мироником в [6, 7] обґрунтовано зображення оператора $f(A)$ у вигляді $F^{-1}_{B_\nu}[f(a)F_{B_\nu}]$, досліджено структуру та властивості фундаментального розв'язку двоточкової задачі для рівняння (1), доведено коректну розв'язність задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією скінченного порядку. В [8] аналогічні результати встановлені у випадку m-точкової за t задачі ($m \geq 2$) для рівняння (1). В даній роботі встановлено розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (1) у випадку, коли гранична умова містить псевдо-Бесселеві оператори, побудовані за різними однорідними і негладкими у точці 0 символами.

1. Попередні відомості та позначення. Нехай γ – фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, ν – фіксоване число з множини $\{3/2, 5/2, 7/2, \dots\}$, $\tilde{p}_0 := 2\nu + 1$, $\gamma_0 := 1 + [\gamma] + \tilde{p}_0$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi = \Big\{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) : |D^k_x \varphi(x)| \leq$$

$$\leq c_k (1 + |x|)^{-(\gamma_0 + k)}, \ k \in \mathbb{Z}_+\Big\},$$

$\Phi = \lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{pr} \Phi_p$, де Φ_p, $p \in \mathbb{Z}_+$, – банахів простір відносно норми

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0+k-\varepsilon_0} |D_x^k \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $0 < \varepsilon_0 < 1$ – фіксований параметр.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору Φ з відповідною топологією. Цей простір називатимемо основним, а його елементи – основними функціями.

У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, яка відповідає оператору Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu + +1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}) \times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Ця операція є нескінченно диференційовною у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ [9]. На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначене перетворення Бесселя

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) \equiv F_B[\varphi](\xi) := \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де j_ν – нормована функція Бесселя. При цьому $F_B[\varphi]$ – парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Наведемо ще деякі властивості функції $F_B[\varphi]$, встановлені в праці [9]: 1) якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, то $F_B[\varphi]$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція; 2) у функції $D_\xi^k F_B[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi\to\pm 0} D_\xi^k F_B[\varphi](\xi)$, функції $D_\xi^{2k} F_B[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, у точці $\xi = 0$ мають усувний розрив; 3) функції з простору $\overset{\circ}{\Psi} := F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$ задовольняють умову: $\forall s \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c_s > 0 : \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} |\xi^s D_\xi^s \psi(\xi)| \leq c_s, \psi \in \overset{\circ}{\Psi}$; 4) $\xi^s D_\xi^s F_B[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{Z}_+$, для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$; 5) якщо $|\xi| \geq 1$, то

$$\forall \{m, s\} \subset \mathbb{Z}_+,\, m \geq s,\, \exists c_m > 0\, \exists c_s > 0 :$$

$$\sup_{\xi:|\xi|\geq 1} |\xi^m D_\xi^s F_B[\varphi](\xi)| \leq c_m c_s, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $c_m \leq c_0 B^m m^m$ (сталі c_0, B залежать лише від функції $F_B[\varphi]$); 6) перетворення Бесселя взаємно однозначно і неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}$ на $\overset{\circ}{\Psi}$, при цьому F_B^{-1} визначається формулою

$$F_B^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int_0^\infty \psi(\xi) j_\nu(x\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi,$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi}, c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}.$$

У просторі $\overset{\circ}{\Psi}$ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм [9]

$$\|\psi\|_p := \sup_{\xi\in(0,\infty)} \Big\{ \sum_{k=0}^{p} \xi^{2k} |D_\xi^{2k} \psi(\xi)| \Big\},$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi}, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $\overset{\circ}{\Phi}$, зі слабкою збіжністю. Елементи з $(\overset{\circ}{\Phi})'$ називатимемо узагальненими функціями. Оскільки в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) \rangle,$$

при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією [10].

Нагадаємо, що $F_B^{-1}[\varphi] \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi \in F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$. Отже, перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо так:

$$\langle F_B[f], \varphi \rangle = \langle f, F_B^{-1}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Із властивостей лінійності та неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$, визначеного на просторі основних функцій $F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$.

Якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$, $f * \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, $\forall \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, та із співвідношення $\varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає співвідношення $f * \varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Надалі клас усіх згортувачів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. В [10] доведено, що якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ правильною є формула $F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi]$, при цьому $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$.

Нехай a: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ – неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку $\gamma > 1$, тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$, яка:
1) нескінченно диференційовна при $x \neq 0$;
2) її похідні задовольняють умову

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \exists c_k > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$
$$|D_x^k a(x)| \leq c_k |x|^{\gamma - k};$$

3) існують сталі c_0', $\tilde{c}_0 > 0$, $\delta \geq \gamma$ такі, що

$$c'|x|^\gamma \leq a(x) \leq \tilde{c}_0(1 + |x|^\delta), \quad x \in \mathbb{R}$$

(прикладом такої функції може служити функція $a(x) = |x|^\gamma$).

Виділимо тут клас нескінченно диференційовних функцій $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, за допомогою яких можна будувати псевдо-Бесселеві оператори нескінченного порядку вигляду

$$f(A) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k,$$

де $A = F_B^{-1}[aF_b]$ – псевдо-Бесселевий оператор, побудований за функцією-символом a. Вважатимемо, що оператор $f(A)$ визначений коректно в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо для кожної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^k \varphi)(x)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Слідуючи [6] припустимо, що функція f допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умови:

а) $\exists \beta_0 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq \beta_0 |x|$;

б) $\forall k \in \mathbb{Z}_+\ \exists p_k > 0\ \exists b_k > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $|D_x^k f(x)| \leq b_k(1 + |x|)^{p_k}$, $p_0 < [\gamma] \cdot \gamma^{-1}(\nu + +3/2 + [\gamma])^{-1}$ (p_0 – стала з умови б));

в) $\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$: $|f(z)| \leq c_\varepsilon (1 + |x|)^{p_0} \exp\{\varepsilon |y|^{1/[\delta]}\}$
(δ – стала з умови 3), $[\delta]$ – ціла частина числа δ).

У праці [6] встановлено, що при виконанні вказаних умов оператор $f(A)$ визначений коректно, є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, при цьому $f(A) = F_{B_\nu}^{-1}[f(a) F_{B_\nu}]$.

2. Основні результати. Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(A)u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+, \tag{2}$$

де $f(A)$ – оператор, побудований у п. 1, розглянемо нелокальну багатоточкову за часом задачу

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = \varphi, \ \ \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}, \tag{3}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані параметри, $t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq T$, $B_1, \ldots, B_m$-псевдо-Бесселеві оператори, побудовані за функціями $b_1, \ldots, b_m$ відповідно, які задовольняють наступні умови: $b_k : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, – неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, нескінченно диференційовні при $x \neq 0$, однорідні порядку $\beta_k > 1$ відповідно, $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_m < \gamma$ ($\gamma > 1$ –порядок однорідності функції a) такі, що:

1$'$) $\forall k \in \{1, \ldots, m\}\ \forall s \in \mathbb{N}\ \exists d_{ks} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$: $|D_x^s b_k(x)| \leq d_{ks} |x|^{\beta_k - s}$;

2$'$) $\forall k \in \{1, \ldots, m\}\ \exists \alpha_k, \tilde{\alpha}_k > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $\alpha_k |x|^{\beta_k} \leq b_k(x) \leq \tilde{\alpha}_k |x|^{\beta_k}$.

Із наведених обмежень випливає, що функції $b_1, \ldots, b_m$ є мультиплікаторами в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, а $B_1, \ldots, B_m$ – лінійні неперервні оператори в цьому просторі. Вважаємо також, що

$$\mu > \Lambda \sum_{k=1}^{m} \mu_k,$$

$$\Lambda = \max\{1,\, L_1, \ldots, L_m,\, \tilde\alpha_1, \ldots, \tilde\alpha_m\},$$

$$L_k = \frac{\tilde\alpha_k}{\beta_0 c_o' t_k},\ \ k \in \{1, \ldots, m\},$$

де c_o' – стала з умови 3) п.1, а β_0 – стала з умови а) п.1.

Класичний розв'язок $u \in C^1((0, T], \overset{\circ}{\Phi})$ задачі (2), (3) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя. У образах цього перетворення вказана задача набуває вигляду

$$\frac{\partial v(t,\,\sigma)}{dt} + f(a(\sigma))v(t,\,\sigma) = 0,\ \ (t,\,\sigma) \in \Omega, \tag{4}$$

$$\mu v(t,\,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) v(t,\,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde\varphi(\sigma),$$
$$\sigma \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

де $v(t,\,\sigma) = F_B[u(t,\,x)](\sigma)$, $\tilde\varphi(\sigma) = F_B[\varphi](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$v(t,\,\sigma) = c\exp\{-tf(a(\sigma))\},\ \ (t,\,\sigma) \in \Omega,$$

де c знаходимо з умови (5):

$$c = \tilde\varphi(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\right)^{-1},$$
$$\sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$v(t,\,\sigma) = \tilde\varphi(\sigma)\exp\{-tf(a(\sigma))\}\times$$
$$\times\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\right)^{-1}.$$

Тоді розв'язок задачі (2), (3) має вигляд:

$$u(t,\,x) = c_\nu \int_0^\infty v(t,\,\sigma) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma,\ (t,\,x) \in \Omega.$$

Якщо ввести позначення $G(t,\,x) := F_B^{-1}[Q(t,\,\sigma)](x)$, де

$$Q(t,\,\sigma) = \exp\{-tf(a(\sigma))\}\times$$
$$\times\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\right)^{-1},$$

то, як і в [8], для розв'язку задачі (2), (3) дістаємо наступне зображення:

$$u(t,\,x) = \int_0^\infty T_x^\xi G(t,\,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi =$$
$$= G(t,\,x) * \varphi(x),\ \ (t,\,x) \in \Omega.$$

Зауважимо, що із обмежень на функції a, f, $b_1, \ldots, b_m$ випливають нерівності: якщо $\sigma \geq 1$, то

$$b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\} \leq \frac{b_k(\sigma)}{\beta_0 t_k a(\sigma)} \leq$$
$$\leq \frac{\alpha_k|\sigma|^\gamma}{\beta_0 t_k c_0' |\sigma|^\gamma} = \frac{\tilde\alpha_k}{\beta_0 t_k c_0'} \equiv L_k \leq \Lambda,$$
$$k \in \{1, \ldots, m\};$$

якщо $0 < \sigma < 1$, то

$$b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\} \leq b_k(\sigma) \leq$$
$$\leq \tilde\alpha_k|\sigma|^{\beta_k} \leq \tilde\alpha_k \leq \Lambda.$$

Отже,

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\} >$$
$$> \mu - \Lambda\sum_{k=1}^{m}\mu_k > 0,\ \ \sigma \in (0,\, \infty].$$

У точці $\sigma = 0$ маємо

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(0) e^{-t_k f(a(0))} = \mu > 0.$$

Тоді

$$\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\right)^{-1} > 0,$$
$$\sigma \in [0,\, +\infty),$$

при цьому

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))} =$$
$$= \mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))}\right),$$

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))} \leq \frac{\Lambda}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k < 1,\ \sigma \geq 0.$$

Скориставшись останньою нерівністю та поліноміальною формулою знайдемо, що

$$\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))}\right)^{r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} \times$$

$$\times \left(\mu_1 b_1(\sigma) e^{-t_1 f(a(\sigma))}\right)^{r_1} \times \ldots \times$$

$$\times \left(\mu_m b_m(\sigma) e^{-t_m f(a(\sigma))}\right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} \times$$

$$\times b_1^{r_1}(\sigma)\ldots b_m^{r_m}(\sigma) e^{-(t_1 r_1+\ldots+t_m r_m) f(\sigma)}.$$

Звідси дістаємо наступне зображення для функції G:

$$G(t,\, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \times$$

$$\times \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} \widetilde{G}(\lambda + t,\, x), \qquad (5_1)$$

де

$$\widetilde{G}(\lambda + t,\, x) = c_\nu \int_0^\infty b_1^{r_1}(\sigma)\ldots b_m^{r_m}(\sigma) \times$$

$$\times e^{-(\lambda+t) f(a(\sigma))} j_\nu(x\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \qquad (5_2)$$

$\lambda := t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m$, $\widetilde{G}(t,\, x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (2), для якого правильними є оцінки, отримані в [5]:

$$|D_x^s \widetilde{G}(t,\, x)| \le \alpha_s t^{-\omega_s/\gamma} (1 + |x|)^{-(s+\gamma_0)},$$

$$t \in (0,\, 1],\ x \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{N}.$$

Скориставшись властивостями функцій f, a, $b_1, \ldots, b_m$ встановлюємо, що $G(t,\, x)$ є неперервно диференційовною на проміжку $(0,\, T]$ функцією (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$) і нескінченно диференційовною по аргументу x (при фіксованому $t \in (0,\, T]$).

Оцінки функції G та її похідних по аргументу x (з виділеною при цьому залежністю від параметра t) даються в наступному твердженні.

Лема 1. *Для функції G та її похідних (по x) правильними є оцінки*

$$|D_x^s G(t,\, x)| \le c_s t^{-(s+q)/\gamma} (1 + |x|)^{-(\gamma_0+s)},$$

$$t \in (0,\, T^*], \qquad (6)$$

$T^* = \min\{1,\, T\}$, $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma_0 = 2\nu+2+[\gamma]$,

$q = \omega_\alpha + (\gamma + \omega_\alpha)\alpha - [\gamma]$, $\alpha = \nu + 3/2 + [\gamma]$,

стала $c_s > 0$ не залежить від t.

Доведення. Передусім розглянемо випадок $s = 0$ і використаємо методику оцінювання фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (2), розвинену в праці [5]. Отже, врахувавши вигляд нормованої функції Бесселя j_ν, подамо $G(t,\, x)$, $x \neq 0$, у вигляді

$$G(t,\, x) = \Lambda_1(t,\, x) + \Lambda_2(t,\, x),$$

де

$$\Lambda_1(t,\, x) = c_n \sum_{j=0}^{n} \frac{d_j}{x^{n+j+1}} J_{1,j}(t,\, x), \quad n = \nu - 1/2,$$

$$J_{1,j}(t,\, x) = \int_0^\infty Q_1(t,\, \sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-j+1} \times$$

$$\times \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma,$$

$$\Lambda_2(t,\, x) = c_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{d}_j}{x^{n+j+1}} J_{2,j}(t,\, x),$$

$$J_{2,j}(t,\, x) = \int_0^\infty Q_1(t,\, \sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-j+1} \times$$

$$\times \cos(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma,$$

$$Q_1(t,\, \sigma) = e^{-t f(a(\sigma))},$$

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))}\right)^{-1}.$$

Оцінимо $J_{1,j}(t,\, x)$. Для цього інтеграл $J_{1,j}(t,\, x)$, $x \neq 0$, зінтегруємо частинами m_j

разів, де $m_j = n - j + 2 + [\gamma]$, $0 \le j \le n$, і подамо цей інтеграл у наступному вигляді

$$J_{1,j}(t,\, x) = \frac{(-1)^{m_j}}{x^{m_j}} \times$$

$$\times \lim_{\varepsilon \to +0} \Bigg[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} D_\sigma^{m_j} (Q_1(t,\, \sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-j+1}) \times$$

$$\times \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2} + m_j \frac{\pi}{2}) d\sigma + \Phi(\varepsilon,\, x) \Bigg], \quad x \ne 0. \tag{7}$$

Врахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$D_\sigma^{m_j} (Q_1(t,\, \sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-j+1}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_j} C_{m_j}^l D_\sigma^l (Q_1(t,\, \sigma) \sigma^{n-j+1}) D_\sigma^{m_j - l} Q_2(\sigma) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-j+1} C_{m_j}^l D_\sigma^l (Q_1(t,\, \sigma) \sigma^{n-j+1}) D_\sigma^{m_j - l} Q_2(\sigma).$$

Оцінимо $|D_\sigma^{m_j - l} Q_2(\sigma)|$. Для цього зауважимо, що

$$D_\sigma^1 Q_2(\sigma) = Q_2^2(\sigma) \sum_{k=1}^{m} \mu_k (b_k'(\sigma) - t_k b_k(\sigma) \times$$

$$\times f'(a(\sigma))) e^{-t_k f(a(\sigma))} = -Q_2^2(\sigma) D_\sigma^1 R(\sigma),$$

де

$$R(\sigma) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))}.$$

Отже, для $l \in \mathbb{Z}_+$

$$D_\sigma^l D_\sigma^1 Q_2(\sigma) = -D_\sigma^l (Q_2^2(\sigma) D_\sigma^1 R(\sigma)) =$$

$$= -\sum_{s=0}^{l} C_s^l D_\sigma^s Q_2^2(\sigma) \cdot D_\sigma^{l+1-s} R(\sigma).$$

Оскільки $Q_2^2(\sigma) = R^{-2}(\sigma)$, то для обчислення і оцінки похідної $D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)$ скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{dg^m} F(g) \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1 + \ldots + m_l = m \\ m_1 + 2m_2 + \ldots + l m_l = s}} \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \left(D_\sigma^1 g(\sigma) \right)^{m_1} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2!} D_\sigma^2 g(\sigma) \right)^{m_2} \ldots \left(\frac{1}{l!} D_\sigma^l g(\sigma) \right)^{m_l}.$$

У цій формулі покладемо $F = g^{-2}$, $g = R$. Тоді

$$|D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)| = \Bigg| \sum_{j=1}^{s} \frac{d^j}{dR^j} R^{-2} \times$$

$$\times \sum_{\substack{j_1 + \ldots + j_\nu = j \\ j_1 + 2j_2 + \ldots + \nu j_\nu = s}} \frac{s!}{j_1! \ldots j_\nu!} \times (D_\sigma^1 R(\sigma))^{j_1} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2!} D_\sigma^2 R(\sigma) \right)^{j_2} \ldots \left(\frac{1}{\nu!} D_\sigma^\nu R(\sigma) \right)^{j_\nu} \Bigg|.$$

Далі, скориставшись умовою $1'$), яку задовольняють функції $b_1, \ldots, b_m$, нерівністю

$$\frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|} \le \left(\mu - \Lambda \sum_{k=1}^{m} \mu_k \right)^{-(2+j)} \equiv \tilde{\beta}_j$$

та нерівностями з [8]:

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\, \sigma)| \le c_s t^s e^{-\beta_0 t |\sigma|^\gamma} |\sigma|^{\omega_s - s},$$

$$s \in \mathbb{N},\, (t,\, \sigma) \in \Omega, \tag{8}$$

де $\beta_0 > 0$, $c_s > 0$ – сталі, не залежні від t, ω_s визначається умовою з леми 1 праці [8], безпосередньо встановлюємо, що

$$|D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)| \le \delta_s |\sigma|^{\gamma - s}, \;\; |\sigma| < 1,\, \sigma \ne 0,$$

$$|D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)| \le \tilde{\delta}_s |\sigma|^{(\gamma + \omega_s - 1)s}, \;\; |\sigma| \ge 1.$$

Урахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій дістанемо, що

$$|D_\sigma^l (Q_1(t,\, \sigma) \sigma^{n-j+1})| =$$

$$= \left| \sum_{s=0}^{l} C_s^l D_\sigma^s Q_1(t,\, \sigma) D_\sigma^{l-s} \sigma^{n-j+1} \right| \le$$

$$\le |D_\sigma^l Q_1(t,\, \sigma)| \sigma^{n-j+1} + l(n-j+1) \times$$

$$\times |D_\sigma^{l-1} Q_1(t,\, \sigma)| \sigma^{n-j} + \ldots +$$

$$+(n-j+1-l) |Q_1(t,\, \sigma)| \sigma^{n-j+1-l},$$

$$\sigma > 0,\, 1 \le l \le n-j+1,\, t \in (0,\, T^*]. \tag{9}$$

При оцінці доданків у сумі (9) знову скористаємося нерівностями (8):

$$|D_\sigma^l (Q_1(t,\, \sigma) \sigma^{n-j+1})| \le$$

$$\le \tilde{c}_l \sigma^{n-j+1+\gamma-l} + \tilde{c} \sigma^{n-j+1-l}.$$

Якщо $|\sigma| < 1$, $\sigma \neq 0$, то

$$\chi(\sigma) := |D_\sigma^{m_j}(Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1})| \leq$$
$$\leq |Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1}| \cdot |D_\sigma^{m_j}Q_2(\sigma)| +$$
$$+\sum_{l=1}^{n-j+1} C_{m_j}^l |D_\sigma^l(Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1})| \times$$
$$\times |D_\sigma^{m_j-l}Q_2(\sigma)| \leq c(\sigma^\alpha + \sigma^{\tilde\alpha} + \sigma^{\tilde{\tilde\alpha}}),$$

де

$$\alpha = n-j+1+\gamma-m_j = -1+\gamma-[\gamma] = \{\gamma\}-1,$$
$$\tilde\alpha = n-j+1+\gamma-l+\gamma-m_j+l = \gamma+\{\gamma\}-1 > 0,$$
$$\tilde{\tilde\alpha} = n-j+1-l+\gamma-m_j+l = \{\gamma\}-1,$$
$$m_j = n-j+2+[\gamma].$$

Оскільки $0 < 1-\{\gamma\} < 1$, то функція $\sigma^\alpha + \sigma^{\tilde\alpha} + \sigma^{\tilde{\tilde\alpha}}$ інтегровна в околі нуля. Отже, інтегровною в околі нуля є функція $\chi(\sigma)$. Із наведених вище міркувань випливає також, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \Phi(\varepsilon, x) = 0$ для кожного $x \neq 0$, де $\Phi(\varepsilon, x)$ – функція з формули (7).

Випадок $\sigma \geq 1$ розглядається аналогічно, при цьому у відповідних оцінках функції $Q_1(t,\sigma)$ слід зберігати множник $\exp\{-\beta_0 t|\sigma|^\gamma\}$ (див.(8)), який забезпечує інтегровність функції $\chi(\sigma)$ на нескінченності. З (9), з урахуванням (8), дістаємо нерівність

$$|D_\sigma^l(Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1})| \leq c\sigma^{n-j+1-l+\omega_l}e^{-\beta_0 t|\sigma|^\gamma},$$

з якої випливає оцінка функції $\chi(\sigma)$:

$$\chi(\sigma) \leq c\sigma^{n-j+1+\omega_{m_j}+(\gamma+\omega_{m_j})m_j-m_j}e^{-\beta_0 t|\sigma|^\gamma} \leq$$
$$\leq c\sigma^{\omega_\alpha+(\gamma+\omega_\alpha)\alpha-[\gamma]-1}e^{-\beta_0 t\sigma^\gamma},$$
$$\alpha = \nu + 3/2 + [\gamma],\ \sigma \geq 1.$$

Зазначимо також, що на нескінченності позаінтегральні вирази у формулі (7) перетворюються в нуль за рахунок функції $\exp\{-\beta_0 t\sigma^\gamma\}$, яку всі вони містять як множник. При цьому

$$\int_1^\infty \chi(\sigma)d\sigma \leq c\int_0^\infty \sigma^{p_\alpha}e^{-\beta_0 t\sigma^\gamma}d\sigma \overset{t^{1/\gamma}\sigma=z}{=}$$
$$= ct^{-(p_2+1)/\gamma}\int_0^\infty z^{p_\alpha}e^{-\beta_0 z^\gamma}dz =$$
$$= c_1 t^{-(p_\alpha+1)/\gamma},\ \ p_\alpha = \omega_\alpha + (\gamma+\omega_\alpha)\alpha - [\gamma] - 1.$$

Оскільки $t \in (0, T^*]$, то з отриманих результатів випливає оцінка

$$|J_{1,j}(t,x)| \leq \frac{\widetilde{L}_j t^{-(p_\alpha+1)/\gamma}}{|x|^{n-j+2+[\gamma]}},\ \ x \neq 0.$$

Тоді

$$|\Lambda_1(t,x)| \leq c_n t^{-(p_\alpha+1)/\gamma}\sum_{j=0}^n d_j\widetilde{L}_j|x|^{-(n+j+1)} \times$$
$$\times |x|^{-(n-j+2+[\gamma])} =$$
$$= \tilde{c}_n t^{-(p_\alpha+1)/\gamma}|x|^{-(2\nu+2+[\gamma])},\ \ x \neq 0.$$

Аналогічно оцінюємо $|\Lambda_2(t,x)|$, $x \neq 0$. У результаті прийдемо до наступної нерівності:

$$|G(t,x)| \leq ct^{-(p_\alpha+1)/\gamma}|x|^{-\gamma_0},$$
$$x \neq 0,\ \gamma_0 = 2\nu + 2 + [\gamma].$$

З іншого боку,

$$|G(t,x)| \leq \tilde{c}\int_0^\infty e^{-tf(a(\sigma))}\sigma^{2\nu+1}d\sigma \overset{\sigma=t^{-1/\gamma}y}{=}$$
$$= \tilde{c}t^{-(2\nu+2)/\gamma} \times \int_0^\infty e^{-tf(t^{-1}a(y))}y^{2\nu+1}dy \leq$$
$$\leq \tilde{c}t^{-(2\nu+2)/\gamma}\int_0^\infty e^{-\beta_0 a(y)}y^{2\nu+1}dy = \tilde{\tilde{c}}t^{-(2\nu+2)/\gamma}.$$

Оскільки $p_\alpha + 1 \geq 2\nu + 2$, то звідси дістаємо, що у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справджується нерівність

$$|G(t,x)| \leq ct^{-q/\gamma}(1+|x|)^{-\gamma_0},\ \ t \in (0, T^*],$$

що й потрібно було довести.

У випадку $s \in \mathbb{N}$ маємо, що

$$D_x^s G(t,x) = D_x^s\Psi_1(t,x) + D_x^s\Psi_2(t,x),$$

де

$$D_x^s\Psi_1(t,x) = c_n\sum_{j=0}^n d_j\int_0^\infty \widetilde{Q}_j(t,\sigma) \times$$
$$\times D_x^s\Big(x^{-(n+j+1)}\sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2})\Big)d\sigma,$$

$$D_x^s\Psi_2(t,\,x) = c_n\sum_{j=1}^{n-1}\tilde d_j\int\limits_0^\infty \widetilde Q_j(t,\,\sigma)\times$$
$$\times D_x^s\Big(x^{-(n+j+1)}\cos(x\sigma-\frac{n\pi}{2})\Big)d\sigma,$$
$$\widetilde Q_j(t,\,\sigma) := Q_1(t,\,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1}.$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$D_x^s\Psi_1(t,\,x) = c_n\sum_{j=0}^{n} d_j\sum_{l=0}^{s} C_s^l\alpha_l x^{-(n+j+1+l)}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty Q_1(t,\,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1+s-l}\times$$
$$\times\sin\Big(x\sigma-\frac{n\pi}{2}+(s-l)\frac{\pi}{2}\Big)d\sigma\equiv$$
$$\equiv c_n\sum_{j=0}^{n} d_j\sum_{l=0}^{s} C_s^l\alpha_l x^{-(n+j+1+l)}\Gamma_1(t,\,x),$$

де $\alpha_l = (-1)^l(n+j+1)\dots(n+j+1+l)$,

$$\Gamma_1(t,\,x) = \int\limits_0^\infty Q_1(t,\,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1+s-l}\times$$
$$\times\sin\Big(x\sigma-\frac{n\pi}{2}+(s-l)\frac{\pi}{2}\Big)d\sigma.$$

Оцінка функції Γ_1 здійснюється за схемою, наведеною вище. У результаті для $|D_x^s\Psi_1(t,\,x)|$ отримаємо оцінку вигляду (6). Такі ж оцінки отримуються для функції $|D_x^s\Psi_2(t,\,x)|$, а, отже, і для функції $|D_x^sG(t,\,x)|$.

Лема доведена.

Зауваження 1. Із оцінок (6) похідних функції G випливає, що при кожному $t\in(0,\,T]$ функція G, як функція аргументу x, є елементом простору $\overset{\circ}{\Phi}$.

Лема 2. *Правильними є наступні твердження.*

1) Функція $G(t,\,\cdot)$, $t\in(0,\,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, диференційовна по t.

2) $\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\,\cdot)) = f*\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}$, $\forall f\in(\overset{\circ}{\Phi})'$.

3) У просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ справджуються граничні співвідношення:

а) $\mu\lim\limits_{t\to+0}G(t,\,\cdot)-\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k\lim\limits_{t\to t_k}B_kG(t,\,\cdot)=\delta$*;*

б) $\mu\lim\limits_{t\to+0}\omega(t,\,\cdot)-\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k\lim\limits_{t\to t_k}B_k\omega(t,\,\cdot)=g$*,*

де

$$\omega(t,\,x) = g*G(t,\,x),\ \ g\in(\overset{\circ}{\Phi}_*)',\ (t,\,x)\in\Omega.$$

4) Функція $G(t,\,\cdot)$ задовольняє рівняння (2).

Доведення тверджень леми 1 аналогічні доведенням тверджень 1, 2, 3.б), 3.в), 4 леми 2 праці [8].

На підставі наведених вище властивостей функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі для рівняння (2) з псевдодиференціальними умовами.

Із твердження 3.б) леми 2 випливає, що для рівняння (2) m-точкову за часом задачу з псевдодиференціальними умовами можна ставити так. Для (2) розглянемо задачу

$$\mu u(t,\,\cdot)|_{t=0}-\sum_{k=1}^{m}\mu_kB_ku(t,\,\cdot)|_{t=t_k}=g, \quad (10)$$

де $g\in(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, параметри $\mu,\mu_1,\dots,\mu_m$ задовольняють умови, сформульовані раніше. Під розв'язком задачі (2), (10) розумітимемо функцію $u\in C^1((0,\,T],\,\overset{\circ}{\Phi})$, яка задовольняє рівняння (2) у звичайному розумінні та граничну умову (10) у тому сенсі, що

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}B_ku(t,\,\cdot)=g,$$

де границі розглядаються в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$.

З тверджень леми 2 випливає наступна

Теорема. *m-точкова задача (2), (10) є розв'язною; розв'язок зображається у вигляді*

$$u(t,\,x) = g*G(t,\,x),\ \ (t,\,x)\in\Omega,$$

де G – фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі, при цьому $u(t,\,\cdot)\in\overset{\circ}{\Phi}$ при кожному $t\in(0,T]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

2. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

3. *Городецький В.В., Дрінь Я.М.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 61-78.

4. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11-15.

5. *Шевчук Н.М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 374. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 145-154.

6. *Городецкий В.В., Мироник В.И.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. I // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 349-363.

7. *Городецкий В.В., Мироник В.И.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. II // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 520-526.

8. *Кулик Т.С., Мироник В.І.* Багатоточкова задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика: зб. наук. пр. – Т.1, № 3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – С. 49-57.

9. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченнодиференційовних функцій // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2007. – Вип. 15. – С. 51-66.

10. *Ленюк О.М.* Перетворення Бесселя одного класу узагальнених функцій типу розподілів // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 95-102.