УДК 517.538.7

©2013 р. О.А. Боженко

Сумський державний університет

СЛАБКО РЕГУЛЯРНІ МНОЖИНИ У КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Розглядається поняття слабко регулярної множини у комплексній площині. Доводиться, що такі множини є інтерполяційними в класах аналітичних функцій скінченного порядку.
Ключові слова: регулярні множини, уточнений порядок, слабко регулярні множини, інтерполяційна послідовність.

We consider the concept of a weakly regular set in the complex plane. We prove that such sets are interpolation sets in the classes of analytical functions of finite order. Keywords: Regular sets, proximate order, weakly regular sets, interpolation sequence.

Вступ. Поняття регулярної множини у комплексній площині було запроваджено Б.Я. Левіним [1]. Введемо необхідні означення. Диференційовна функція $\rho(r)$ на півосі $(0,+\infty)$ називається *уточненим порядком*, якщо виконуються умови:

1) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$,

2) $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r=0$.

У статті використовується позначення $V(r)=r^{\rho(r)}$. Наведемо найчастіше цитовану властивість уточненого порядку [1, Розділ I, §12].

Лема 1. *Нехай ρ уточнений порядок та $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho>0$. Тоді асимптотична нерівність*

$$(1-\varepsilon)k^{\rho}V(r)<V(kr)<(1+\varepsilon)k^{\rho}V(r)$$

виконується рівномірно відносно k, $0<a\le k\le b$, при $r\to\infty$.

Нехай $\rho(r)$ – деякий уточнений порядок такий, що $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho>\ 0$, та $A=\{a_n, n=1,2,\dots\}$ – послідовність різних точок у комплексній площині $\mathbb{C}$. Припустимо, що точки відмежовані одна від одної. Більш точніше, що виконується одна з наступних умов (C) або (C$'$):

(C) *Точки a_n розташовані в середині кутів із спільною вершиною в початку координат, які не перетинаються, так, що для будь-яких двох точок послідовності A, розташованих в середині одного з кутів, виконується умова*

$$|a_{n+1}|-|a_n|\ge r_n=d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$$

для деякого $d>0$.

(C$'$) *Існує число $d>0$ таке, що круги з радіусами*

$$r_n=d|a_n|^{1-\frac{\rho(|a_n|)}{2}}$$

з центрами в точках a_n, не перетинаються.

Правильна множина A (див. [1, Розділ II]), що задовольняє одну з умов (C) або (C$'$), називається регулярною множиною *в сенсі Левіна*, або коротко *R-множиною*, а круги $|z-a_n|\le r_n$ називають *винятковими кругами R-множини* (*C_R-кругами*).

Множини, що задовольняють умову (C), відіграють важливу роль у теорії цілих функцій. Зокрема, вони застосовуються для побудови канонічних добутків множин [1, 2, 3].

У роботах [4, 5] розглядаються множини $A=\{a_n, n=1,2,\dots\}$ у верхній півплощині $\mathbb{C}_+=\{z:\Im z>0\}$, що задовольняють умову:

(C$_+$) *Для всіх точок множини A виконується нерівність:*

$$|a_{n+1}|-|a_n|\ge r_n=d\sin\arg(a_n)|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$$

для деякого $d>0$.

Такі множини також використовуються для побудови канонічних добутків у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$.

У нашій статті ми узагальнюємо поняття регулярної множини в сенсі Левіна. Ми вводимо поняття слабко регулярної множини у комплексній площині. Це накладає більш

слабкі обмеження на множину A. Зокрема, не вимагається, щоб вона була правильно розподілена. Використовуючи критерії інтерполяційності в термінах міри, яка породжується вузлами інтерполяції, які були отримані раніше К.Г. Малютіним, ми доводимо, що такі множини є інтерполяційними у класах цілих функцій скінченного порядку. Це дає можливість будувати приклади інтерполяційних множин у цих класах. Відмітимо, що аналогічні приклади інтерполяційних множин у класах обмежених функцій в одиничному крузі були наведені в [6]. Для їх побудови використовувалася інтерполяційна теорема Карлесона у термінах міри, яка породжується вузлами інтерполяції.

Далі через K_i, $i = 1, 2, \dots$, будемо позначати додатні сталі.

1. Слабко регулярні множини у комплексній площині. Позначимо через $[\rho, \infty]$ клас цілих функцій f порядку $\rho > 0$, тобто таких, що виконується умова

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ |f(re^{i\theta})|}{\log r} \le \rho\,.$$

Означення 1. *Послідовність* $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ *називається інтерполяційною послідовністю в класі* $[\rho, \infty]$, *якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел* $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$, *що задовольняє умову*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ |b_n|}{\log |a_n|} \le \rho \tag{1}$$

існує функція $f \in [\rho, \infty]$, *яка розв'язує інтерполяційну задачу*

$$f(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots\,. \tag{2}$$

Нехай $\rho(r)$ - уточнений порядок, $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$. Позначимо через $[\rho(r), \infty)$ клас цілих функцій f типу не вищого, ніж нормальний при порядку $\rho(r)$, тобто, таких, що

$$\log^+ |f(re^{i\theta})| \le C_f V(r)\,,$$

де $C_f > 0$ – скінченна стала.

Означення 2. *Послідовність* $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ *називається інтерполяційною послідовністю в класі* $[\rho(r), \infty)$, *якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел* $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$, *що задовольняє умову*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+ |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty \tag{3}$$

існує функція $f \in [\rho(r), \infty)$, *яка розв'язує інтерполяційну задачу* (2).

Позначимо через $C(a, r)$ відкритий круг радіуса r з центром в точці a. На множині A визначимо міру $n(G) = \sum_{a_n \in G} 1$ і сім'ю функцій

$$\Phi_z(\alpha) = \frac{\max\{n(C(z, \alpha|z|)) - 1; 0\}}{V(|z|)}\,.$$

Наступні теореми були отримані в роботі [7].

Теорема 1. *Послідовність* $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ *є інтерполяційною в класі* $[\rho, \infty]$, *тоді і тільки тоді, коли існує уточнений порядок* $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) \le \rho$, *такий, що*

$$\Phi_z(\alpha) \le (\ln 1/\alpha)^{-1}\,. \tag{4}$$

Теорема 2. *Послідовність* $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ *є інтерполяційною в класі* $[\rho(r), \infty)$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \int_0^{1/2} \frac{\Phi_z(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha < \infty\,. \tag{5}$$

Введемо наступні означення.

Означення 3. *Послідовність* $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ *називається слабо регулярною послідовністю при порядку* $\rho > 0$, *або більш точніше* $WR(\rho)$-*множиною, якщо існує уточнений порядок* $\rho(r)$, $\lim_{r\to\infty} \rho(r) \le \rho$, *такий, що виконується одна з умов* (C) *або* (C′) *і*

$$n(C(0, r)) \le K_1 V(r), \quad K_1 > 0\,. \tag{6}$$

Означення 4. *Послідовність* $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ *називають слабко регулярною послідовністю при уточненому*

порядку $\rho(r)$, або більш точніше $WR(\rho(r))$-множиною, якщо виконується умова (30) *і справедлива одна з умов* (C) *або* (C$'$).

2. Інтерполяційність слабко регулярних множин. Перш за все доведемо деякі наслідки з умов (C) і (C$'$).

Лема 2. *Якщо послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$, задовольняє умову* (C), *то існує число $d_1 > 0$ таке, що круги з радіусами $d_1|a_n|/V(|a_n|$ та з центром в точках a_n не перетинаються.*

Доведення. З леми 1 випливає, що існує число $K_2 > 1$ таке, що для будь яких r_1 і r_2, що задовольняють нерівність $1 \le r_1 \le r_2 \le 2r_1(1+d)\dfrac{r_1}{V(r_1)}$ виконується умова

$$\frac{r_2}{V(r_2)} \le K_2 \frac{r_1}{V(r_1)}\,. \tag{7}$$

Позначимо $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай $r_j > r_i$. Якщо $r_j \ge 2\left(r_i + d\dfrac{r_i}{V(r_i)}\right)$, то $C\left(a_i, d\dfrac{r_i}{V(r_i)}\right)$ і $C\left(a_j, \dfrac{r_j}{2}\right)$ не перетинаються, бо у цьому випадку для всіх точок $z \in C\left(a_j, \dfrac{r_j}{2}\right)$ виконується нерівність $|z - a_i| \ge |a_j - a_i| - |z - a_j| \ge r_j - r_i - \dfrac{r_j}{2} = \dfrac{r_j}{2} - r_i \ge d\dfrac{r_i}{V(r_i)}$. Отже, $z \notin C\left(a_i, d\dfrac{r_i}{V(r_i)}\right)$. Оскільки $V(r_j) \ge 1$, то $C\left(a_i, d\dfrac{r_i}{V(r_i)}\right)$ і $C\left(a_j, d\dfrac{r_j}{2V(r_j)}\right)$ не перетинаються.

Якщо $r_j \le 2\left(r_i + d\dfrac{r_i}{V(r_i)}\right)$, то із (7) випливає нерівність $d\dfrac{r_j}{2K_2V(r_j)} \le d\dfrac{r_i}{2V(r_i)}$. З умови (C) одержуємо, у цьому випадку, що круги $C\left(a_j, d\dfrac{r_j}{K_2V(r_j)}\right)$ і $C\left(a_i, d\dfrac{r_i}{2V(r_i)}\right)$ не перетинаються, оскільки

$$d\frac{r_j}{2K_2V(r_j)} + d\frac{r_i}{2V(r_i)} \le d\frac{r_i}{V(r_i)}.$$

Означення 5. *Нехай послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ – слабко регулярна відносно уточненого порядку $\rho(r)$. Тоді виняткові круги називаються $C_R(\rho(r))$-кругами.*

Означення 6. *Нехай послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ – слабко регулярна відносно порядку ρ. Тоді виняткові круги називаються $C_R(\rho)$-кругами.*

Лема 3. *Нехай послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ – слабко регулярна відносно уточненого порядку $\rho(r)$. Якщо виконується умова* (C), *то виконується нерівність*

$$\Phi_z(\alpha) \le K\alpha\,, \tag{8}$$

а якщо виконується нерівність (C$'$), *то виконується нерівність*

$$\Phi_z(\alpha) \le K\alpha^2\,, \tag{9}$$

при деякому $K > 0$.

Доведення. Припустимо, що виконується умова (C), а точка z не належить жодному $C_R(\rho(r))$-кругу виняткової множини. Побудуємо круг $C(z, \alpha|z|)$ з центром в точці z радіуса $\alpha|z|$. Якщо точка $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ належить кругу $C(z, \alpha|z|)$, то позначимо через $[\alpha_n, \beta_n]$ кругову проекцію сегмента $[a_n, a_n + e^{i\theta_n} d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}]$ на промінь $\arg\xi = \arg z$. Оскільки точка z не належить винятковому кругу, що відповідає точці a_n, то $[\alpha_n, \beta_n]$ належить кругу $C(z, 2\alpha|z|)$. З умови (C) випливає, що всі такі сегменти не перетинаються. Отже,

$$\sum_{a_n \in C(z,\alpha|z|)} d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)} \le 4\alpha|z|\,.$$

З останньої нерівності і леми 1 одержуємо для всіх $\alpha \le 1/2$,

$$n(C(z, \alpha|z|)) \le K_3\alpha V(|z|)\,, \tag{10}$$

для деякого $K_3 > 0$. Нерівність (6) справедлива для всіх точок z, які не належать винятковим кругам. Якщо точка z належить винятковому кругу, тоді ліва частина нерівності (6) може збільшитися не більше ніж на одиницю, оскільки виняткові круги не перетинаються. Отже, для будь якої точки $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\Phi_z(\alpha) \le K_4\alpha.$$

Оцінка (4) може бути одержана з умови (C$'$), порівнянням площ виняткових кругів методами, запропонованими в роботі [1].

Для повноти викладення, наведемо ці міркування. Нехай виконується умова (C′) і точка z не належить винятковій множині, а точка a_n належить кругу $C(z, \alpha|z|)$. Тоді, винятковий круг $C(a_n, d|a_n|^{1-\frac{\rho(|a_n|)}{2}})$ належить кругу $C(z, 2\alpha|z|)$. Оскільки, виняткові круги не перетинаються, тоді сума площ таких кругів, центри яких попали в круг $C(z, \alpha|z|)$, не більша площі круга $C(z, 2\alpha|z|)$, тобто

$$\sum_{a_n \in C(z,\alpha|z|)} d^2|a_n|^{2-\rho(|a_n|)} \leq 4\alpha^2|z|^2 .$$

Використовуючи лему 1, звідси можна одержати нерівність:

$$n(C(z, \alpha|z|)) \leq K_5\alpha^2 V(|z|) . \qquad (11)$$

Якщо точка z належить винятковій множині, то ліва частина нерівності (7) може збільшитися не більш ніж на одиницю. Таким чином, доведено, що оцінка (4) виконується.

Теорема 3. *Нехай послідовність* $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ *слабко регулярна при уточненому порядку* $\rho(r)$. *Тоді* A *– інтерполяційна послідовність в класі* $[\rho(r), \infty)$.

Доведення. Доведення випливає з леми 3 і теореми 2.

Теорема 4. *Нехай послідовність* $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ *слабко регулярна при порядку* $\rho > 0$. *Тоді* A *інтерполяційна послідовність в класі* $[\rho, \infty]$.

Доведення. Ця теорема є наслідком теореми 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

2. *Леонтьев А.Ф.*. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

3. *Гришин А.Ф.* О множествах регулярного роста целых функций. III // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1984. – **44**. – С. 32-42.

4. *Малютин К.Г.* О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I // Известия РАН: Математика, 1995. – **59**, № 4. – С. 785-814.

5. *Малютин К.Г.* О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II // Известия РАН: Математика, 1995. – **59**, № 5. – С. 983-1006.

6. *Виноградов С.А., Хавин В.П.* Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. II // Исследования по линейным операторам и теории функций. VI, Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1976. – **56**. – С. 12-56.

7. *Малютин К.Г* Интерполяция голоморфными функциями. – Харьков: Дис. канд. физ.-мат. наук, 1980. – 104 с.