УДК 517.98

©2013 р. Т.В. Василишин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

АЛГЕБРА ТИПУ ВІНЕРА ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ (p,q)-ПОЛІНОМАМИ НА БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

У роботі досліджено алгебру комплекснозначних функцій на банаховому просторі, які розкладаються у абсолютно збіжний на обмежених множинах ряд (p,q)-поліномів. Досліджено властивості спектра цієї алгебри.

We study the algebra of complex-valued functions on a Banach space which can be represented as an absolutely convergent on bounded sets series of (p,q)-polynomials. Some properties of the spectrum of this algebra are investigated.

1. Вступ

У роботах [1], [2], [3], [6], [7] досліджувались алгебри аналітичних функцій на банахових просторах та їх спектри. Нашим завданням є дослідження алгебри функцій, породжених (p,q)-поліномами на банаховому просторі. Ми розглядаємо алгебру функцій, які розкладаються у абсолютно збіжний на обмежених підмножинах банахового простору ряд (p,q)-поліномів. Таку алгебру можна розглядати як певне узагальнення відомої алгебри Вінера функцій з абсолютно збіжним рядом Фур'є. Для цієї алгебри вдається розвинути і застосувати техніку, розроблену для аналітичних функцій у роботах [2], [3], [7].

2. Основні означення та попередні відомості

Нехай X – банахів простір. Функцію $A : X^{p+q} \to \mathbb{C}$, де $p,q \in \mathbb{Z}$, $p,q \geq 0$, будемо називати (p,q)-лінійною симетричною формою, якщо A є лінійною за кожним із перших p аргументів, антилінійною за кожним із останніх q аргументів, симетричною за першими p аргументами і симетричною за останніми q аргументами. Простір (p,q)-лінійних симетричних форм будемо позначати $\mathcal{L}_a^s({}^{p,q}X)$. Простір неперервних (p,q)-лінійних симетричних форм будемо позначати $\mathcal{L}^s({}^{p,q}X)$. Простір $\mathcal{L}^s({}^{p,q}X)$ із нормою

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|\leq 1,\ldots,\|x_{p+q}\|\leq 1} |A(x_1,\ldots,x_{p+q})|$$

є банаховим простором.

Якщо для функції $P : X \to \mathbb{C}$ існує (p,q)-лінійна симетрична форма A_P така, що P є звуженням на діагональ форми A_P, тобто $P(x) = A_P(\underbrace{x,\ldots,x}_{p+q})$ для довільного $x \in X$, то P будемо називати (p,q)-поліномом. Число p будемо називати степенем однорідності P і позначати $\deg_h P$, число q будемо називати степенем антиоднорідності P і позначати $\deg_a P$. Форму A_P будемо називати (p,q)-лінійною симетричною формою, асоційованою з (p,q)-поліномом P. Простір (p,q)-поліномів будемо позначати $\mathcal{P}_a({}^{p,q}X)$. Простір неперервних (p,q)-поліномів із нормою

$$\|P\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |P(x)|$$

будемо позначати $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$.

У [5] побудовано так звану поляризаційну формулу, яка дозволяє знайти асоційовану форму для даного (p,q)-полінома:

$$A_P(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \frac{1}{(2q+1)2^{p+q}p!q!} \times \\ \times \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p+q}=\pm 1} \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p+q} \sum_{j=1}^{2q+1} \alpha_j^{2q+1-p} \times \\ \times P\Big(\alpha_j(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p) + \\ + \varepsilon_{p+1}x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q}x_{p+q}\Big), \quad (12)$$

де $\alpha_j = \exp\left(\frac{2\pi(j-1)i}{2q+1}\right)$. Цим самим показано, що простори $\mathcal{L}_a^s({}^{p,q}X)$ і $\mathcal{P}_a({}^{p,q}X)$ ізоморфні.

Також у [5] доведено так звану поляризаційну нерівність для норм неперервного (p,q)-полінома і асоційованої з ним (p,q)-лінійної симетричної форми:

$$\|P\| \leq \|A_P\| \leq c(p,q,X)\|P\|,$$

де $c(p,q,X)$ – поляризаційна константа, яка знаходиться в межах $1 \leq c(p,q,X) \leq \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}$.

Із поляризаційної формули і поляризаційної нерівності випливає, що простори $\mathcal{L}^s({}^{p,q}X)$ і $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$ топологічно ізоморфні.

3. Тензорні добутки

Побудуємо передспряжений простір до простору неперервних (p,q)-поліномів $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$.

Для банахового простору $X = (X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ визначимо простір $\overline{X} = (X, +, *, \|\cdot\|)$, у якому задамо операцію множення на скаляр " $*$ " наступним чином:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x \in X \quad \lambda * x = \overline{\lambda} \cdot x.$$

Простір $\overline{X}$ називають комплексно-спряженим простором до простору X. Очевидно, $\overline{X}$ буде банаховим простором, антиізоморфним до X.

Тензорний добуток $\underbrace{X \bigotimes \ldots \bigotimes X}_{p} \bigotimes \underbrace{\overline{X} \bigotimes \ldots \bigotimes \overline{X}}_{q}$ будемо називати тензорним (p,q)-степенем простору X і будемо позначати $\bigotimes^{p,q} X$.

Означення 1. *Визначимо оператор (p,q)-симетризації $s_{p,q} : \bigotimes^{p,q} X \to \bigotimes^{p,q} X$. На елементарних тензорах покладемо*

$$s_{p,q}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \times$$
$$\times \sum_{\sigma \in S(p)} \sum_{\tau \in S(q)} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)} \otimes x_{p+\tau(1)} \otimes \ldots$$
$$\otimes x_{p+\tau(q)},$$

де через $S(n)$ позначено групу всіх підстановок на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$.

На довільні тензори продовжуємо $s_{p,q}$ за лінійністю.

Образ оператора $s_{p,q}$ назвемо (p,q)-симетричним тензорним степенем простору X і будемо позначати $\bigotimes_s^{p,q} X$. Елемент простору $\bigotimes_s^{p,q} X$ вигляду $x^{\otimes(p,q)} = \underbrace{x \otimes \ldots \otimes x}_{p} \otimes \underbrace{x \otimes \ldots \otimes x}_{q}$ будемо називати елементарним (p,q)-симетричним тензором.

Твердження 1. *Кожен елемент простору $\bigotimes_s^{p,q} X$ можна зобразити у вигляді скінченної суми елементів вигляду $\lambda y^{\otimes(p,q)}$, де $|\lambda| = 1$.*

Доведення. Доведемо спочатку, що (p,q)-симетризацію довільного елементарного тензора можна подати у вигляді такої суми.

Нехай $x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q} \in \bigotimes^{p,q} X$. Нехай $f : X^{p+q} \to \to \bigotimes_s^{p,q} X$, $f(x_1, \ldots, x_{p+q}) = s(x1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q})$. Очевидно, f є (p,q)-лінійним симетричним відображенням. Використаємо поляризаційну формулу.

$$f(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{2^{p+q}p!q!} \times$$
$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+q} = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{p+q} \times \sum_{l=1}^{2q+1} \frac{\alpha_l^{2q+1-p}}{2q+1} \times$$
$$\times f\left(\Delta_{p,q}\left(\alpha_l \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k x_k + \sum_{k=p+1}^{p+q} \varepsilon_k x_k\right)\right) =$$

$$= \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+q} = \pm 1} \sum_{l=1}^{2q+1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{p+q} \alpha_l^{2q+1-p} \times$$
$$\times \left(\left(\frac{1}{2^{p+q}p!q!(2q+1)}\right)^{1/p+q} \times\right.$$
$$\left.\times \left(\alpha_l \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k x_k + \sum_{k=p+1}^{p+q} \varepsilon_k x_k\right)\right)^{\otimes(p,q)},$$

де $\Delta_{p,q}(x) = (\underbrace{x, \ldots, x}_{p+q})$.

Оскільки $|\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{p+q} \alpha_l^{2q+1-p}| = 1$, то для (p,q)-симетризації елементарного тензора теорему доведено. Кожен тензор $\theta \in \bigotimes_s^{p,q} X$ є сумою (p,q)-симетризацій елементарних тензорів, тому

$$\theta = \sum_i \lambda_i y_i^{\otimes(p,q)}, \quad |\lambda_i| = 1.$$

Покажемо, що простір $\mathcal{P}_a({}^{p,q}X)$ ізоморфний простору лінійних функціоналів $(\bigotimes_s^{p,q} X)^*$.

Твердження 2. *Для кожного $P \in \mathcal{P}_a({}^{p,q}X)$ існує лінійний функціонал $j_{p,q}^*(P)$ на $\bigotimes_s^{p,q} X$ такий, що наступна діаграма комутує:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\delta_{p,q}"'] & & \mathbb{C} \\ & \bigotimes_s^{p,q} X \arrow[ur, "j_{p,q}^*(P)"'] & \end{tikzcd},$$

де $\delta_{p,q}(x) = x^{\otimes(p,q)}$. Відображення $j_{p,q}^*$ є ізоморфізмом між просторами $\mathcal{P}_a({}^{p,q}X)$ і $(\bigotimes_s^{p,q} X)^*$.

Доведення. Нехай $P \in \mathcal{P}_a({}^{p,q}X)$. Визначимо $j_{p,q}^*(P)$ на елементарних симетричних тензорах:

$$j_{p,q}^*(P)(x^{\otimes(p,q)}) = P(x)$$

і продовжимо за лінійністю на всі тензори $\theta \in \bigotimes_s^{p,q} X$:

$$j_{p,q}^*(P)(\theta) = j_{p,q}^*(P)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{\otimes(p,q)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i j_{p,q}^*(P)(x_i^{\otimes(p,q)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

Тоді $j_{p,q}^*(P) \in (\bigotimes_s^{p,q} X)^*$ і діаграма комутує.

Доведемо ін'єктивність відображення $j_{p,q}^*$. Умова комутативності діаграми визначає значення лінійного функціонала $j_{p,q}^*(P)$ на елементарних (p,q)-симетричних тензорах, а саме $j_{p,q}^*(P)(x^{\otimes(p,q)}) = P(x)$. Тому $j_{p,q}^*(P)$ однозначно визначає значення (p,q)-полінома P, образом якого він є.

Доведемо сюр'єктивність відображення $j_{p,q}^*$. Нехай маємо деякий лінійний функціонал $f \in (\bigotimes_s^{p,q} X)^*$. Покажемо, що існує такий (p,q)-поліном $P \in \mathcal{P}_a({}^{p,q}X)$, що $j_{p,q}^*(P) = f$. Покладемо

$$A_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p+q}) = f(s_{p,q}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q})).$$

Легко перевірити, що $A_{p,q} \in \mathcal{L}_a({}^{p,q}X)$. Нехай P – це (p,q)-поліном, асоційований з $A_{p,q}$. Тоді $j_{p,q}^*(P) = f$.

Лінійність оператора $j_{p,q}^*$ також перевірити не складно. Отже, $j_{p,q}^*$ є ізоморфізмом між просторами $\mathcal{P}_a({}^{p,q}X)$ і $(\bigotimes_s^{p,q} X)^*$.

Введемо норму на просторі $\bigotimes_s^{p,q} X$. Для $\theta \in \bigotimes_s^{p,q} X$ покладемо

$$\|\theta\|_{\pi,s} = \inf\Big\{\sum_j \|y_j\|^{p+q} :\ \theta = \sum_j \lambda_j y_j^{\otimes(p,q)},$$

$$|\lambda_j| = 1\Big\}.$$

Будемо називати $\|\cdot\|_{s,\pi}$ проективною симетричною тензорною нормою. Простір $\bigotimes_s^{p,q} X$ із нормою $\|\cdot\|_{s,\pi}$ будемо позначати $\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X$.

Твердження 3. *Відкрита одинична куля простору $\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X$ збігається з опуклою оболонкою множини $M = \big\{\lambda x^{\otimes(p,q)} :\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1,\ \|x\| < 1\big\}$.*

Доведення. Нехай B_1 – відкрита одинична куля простору $\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X$, $\operatorname{conv}(M)$ – опукла оболонка множини M.

Покажемо, що $\operatorname{conv}(M) \subset B_1$. Нехай $\theta \in \operatorname{conv}(M)$. Тоді існують скінченні послідовності $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$, такі, що $\mu_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$, $|\lambda_i| = 1$, $\|x_i\| < 1$ і $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i x_i^{\otimes(p,q)}$. Тоді

$$\|\theta\|_{s,\pi} \le \sum_{i=1}^n |\mu_i \lambda_i| \cdot \|x_i^{\otimes(p+q)}\| <$$

$$< \sum_{i=1}^n |\mu_i \lambda_i| = \sum_{i=1}^n \mu_i = 1.$$

Отже, $\|\theta\|_{s,\pi} < 1$, тому $\theta \in B_1$.

Покажемо, що $B_1 \subset \operatorname{conv}(M)$. Нехай $\theta \in B_1$. Якщо $\theta = 0$, то $\theta \in \operatorname{conv}(M)$. Нехай $\theta \ne 0$. Тоді $0 < \|\theta\|_{s,\pi} < 1$. Оскільки $\|\theta\|_{s,\pi} < 1$, то існує зображення θ, $\theta = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^{\otimes(p,q)}$, таке, що $|\lambda_i| = 1$ і $\sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p+q} < 1$.

Нехай ε – поки що довільне додатне число. Можемо зобразити θ у такому вигляді:

$$\theta = \sum_{i=1}^n (1+\varepsilon)^{p+q} \|y_i\|^{p+q} \lambda_i \left(\frac{y_i}{\|y_i\|(1+\varepsilon)}\right)^{\otimes(p,q)}.$$

Виберемо ε так, щоб виконувалась умова

$$\sum_{i=1}^n (1+\varepsilon)^{p+q} \|y_i\|^{p+q} < 1.$$

Для цього достатньо взяти

$$\varepsilon < \sqrt[p+q]{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^{p+q}}} - 1.$$

Тепер позначимо $(1+\varepsilon)^{p+q}\|y_i\|^{p+q}$ через μ_i. Покладемо $\mu_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n}\mu_i$. Тоді

$$\theta = \mu_{n+1}\cdot 0 + \sum_{i=1}^{n}\mu_i\lambda_i\left(\frac{y_i}{\|y_i\|(1+\varepsilon)}\right)^{\otimes(p,q)}.$$

Отже, $\theta \in \mathrm{conv}(M)$.

Позначимо звуження відображення $j^*_{p,q}$ на простір неперервних (p,q)-поліномів $\mathcal{P}(^{p,q}X)$ через $j'_{p,q}$. Покажемо, що $j'_{p,q}$ є ізометрією між просторами $\mathcal{P}(^{p,q}X)$ і $\left(\bigotimes_{s,\pi}^{p,q}X\right)'$.

Твердження 4. *Простір неперервних (p,q)-поліномів $\mathcal{P}(^{p,q}X)$ є ізометричним до простору неперервних лінійних функціоналів $\left(\bigotimes_{s,\pi}^{p,q}X\right)'$.*

Доведення. Оцінимо норму (p,q)-полінома P.

$$\|P\| = \sup_{\|x\|\le 1}|P(x)| = \sup_{\|x\|\le 1}|j'_{p,q}(P)(x^{\otimes(p,q)})| \le \\ \le \sup_{\|\theta\|\le 1}|j'_{p,q}(P)(\theta)| = \|j'_{p,q}(P)\|.$$

Отже, $\|P\| \le \|j'_{p,q}(P)\|$. Оцінимо норму $j'_{p,q}(P)$.

$$\|j'_{p,q}(P)\| = \sup_{\|\theta\|_{s,\pi}\le 1}|j'_{p,q}(P)(\theta)| = \\ = \sup_{\|\theta\|_{s,\pi}< 1}|j'_{p,q}(P)(\theta)| =$$

$$= \sup\left\{\left|j'_{p,q}(P)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\lambda_i x_i^{\otimes(p,q)}\right)\right| :\ \mu_i > 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\mu_i \le 1,\ |\lambda_i| = 1,\ \|x_i\| < 1\right\}.$$

Оскільки

$$\left|j'_{p,q}(P)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\lambda_i x_i^{\otimes(p,q)}\right)\right| \le \\ \le \sum_{i=1}^{n}\mu_i\left|j'_{p,q}(P)\left(x_i^{\otimes(p,q)}\right)\right| = \sum_{i=1}^{n}\mu_i|P(x_i)| \le \\ \le \|P\|\sum_{i=1}^{n}\mu_i\|x_i\| \le \|P\|,$$

то $\|j'_{p,q}(P)\| \le \|P\|$. Звідси робимо висновок, що $\|P\| = \|j'_{p,q}(P)\|$.

Простір $\left(\bigotimes_{s,\pi}^{p,q}X\right)'$ збігається з простором $\left(\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{p,q}X\right)'$, де $\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{p,q}X$ – поповнення простору $\bigotimes_{s,\pi}^{p,q}X$. Тому ми отримали зображення простору $\mathcal{P}(^{p,q}X)$ у вигляді спряженого до банахового простору $\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{p,q}X$.

4. k-однорідні поліноми на тензорному добутку

Визначимо відображення

$$j : \mathcal{P}(^{km,kl}X) \to \mathcal{P}(^k\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l}X)$$

наступним чином. Нехай $P \in \mathcal{P}(^{km,kl}X)$, A_P – (km,kl)-лінійна симетрична форма, асоційована з P. Покладемо

$$A_{P_{(m,l)}}(x_1^{\otimes(m,l)},\ldots,x_k^{\otimes(m,l)}) = A_P(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{m},\ldots \\ \ldots,\underbrace{x_k,\ldots,x_k}_{m};\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{l},\ldots,\underbrace{x_k,\ldots,x_k}_{l})$$

і продовжимо за k-лінійністю на всі тензори із $\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{p,q}X$. Тоді $A_{P_{(m,l)}}$ буде k-лінійною симетричною формою на просторі $\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{p,q}X$. Покладемо $P_{(m,l)}(\theta) = A_{P_{(m,l)}}(\underbrace{\theta,\ldots,\theta}_{k})$. Тепер визначимо відображення j як $j(P) = P_{(m,l)}$.

Теорема 1. *Для неперервного (km,kl)-полінома P, k-однорідний поліном $P_{(m,l)}$ буде неперервним і для норми полінома $P_{(m,l)}$ маємо таку оцінку:*

$$\|P\| \le \|P_{(m,l)}\| \le c(km,kl,X)\|P\|,$$

де $c(km,kl,X)$ – поляризаційна константа.

Доведення. Оцінимо значення полінома $P_{(m,l)}$ на відкритій одиничній кулі простору $\widehat{\bigotimes}^{p,q}_{s,\pi}X$. Якщо $\theta \in \widehat{\bigotimes}^{p,q}_{s,\pi}X$ і $\|\theta\| < 1$, то за твердженням 3 існують послідовності $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ такі, що $\mu_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \mu_i \leq 1$, $|\lambda_i| = 1$, $\|x_i\| < 1$ і $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_i\lambda_i x_i^{\otimes(m,l)}$. Оцінимо значення $|P_{(m,l)}(\theta)|$.

$$
\begin{aligned}
\left|P_{(m,l)}(\theta)\right| &= \big|A_{P_{(m,l)}}(\underbrace{\theta,\ldots,\theta}_{k})\big| = \\
&= \left|A_{P_{(m,l)}}\left(\sum_{i_1=1}^n \mu_{i_1}\lambda_{i_1}x_{i_1}^{\otimes(m,l)},\ldots\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\ldots,\sum_{i_k=1}^n \mu_{i_k}\lambda_{i_k}x_{i_k}^{\otimes(m,l)}\right)\right| = \\
&= \left|\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n \mu_{i_1}\lambda_{i_1}\ldots\mu_{i_k}\lambda_{i_k}\times\right. \\
&\qquad \left.\times A_{P_{(m,l)}}\left(x_{i_1}^{\otimes(m,l)},\ldots\ldots,x_{i_k}^{\otimes(m,l)}\right)\right| \leq \\
&\leq \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n \mu_{i_1}\ldots,\mu_{i_k}\times \\
&\qquad \times\left|A_{P_{(m,l)}}\left(x_{i_1}^{\otimes(m,l)},\ldots\ldots,x_{i_k}^{\otimes(m,l)}\right)\right| = \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n \mu_{i_1}\ldots\mu_{i_k}\big|A_P(\underbrace{x_{i_1},\ldots,x_{i_1}}_{m},\ldots \\
&\ldots,\underbrace{x_{i_k},\ldots,x_{i_k}}_{m};\underbrace{x_{i_1},\ldots,x_{i_1}}_{l},\ldots,\underbrace{x_{i_k},\ldots,x_{i_k}}_{l})\big| \leq \\
&\leq \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n \mu_{i_1}\ldots\mu_{i_k}\|x_{i_1}\|^{m+l}\ldots\|x_{i_k}\|^{m+l}\|A_P\| \leq \\
&\leq \|A_P\|\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n \mu_{i_1}\ldots\mu_{i_k} = \|A_P\|\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right)^k \leq \\
&\leq \|A_P\| \leq c(km,kl,X)\|P\|.
\end{aligned}
$$

Отже, поліном $P_{(m,l)}$ – неперервний і $\|P_{(m,l)}\| \leq c(km,kl,X)\|P\|$.

Оскільки $P(x) = P_{(m,l)}\left(x^{\otimes(m,l)}\right)$ і з того, що $\|x\| \leq 1$ випливає, що $\|x^{\otimes(m,l)}\|_{s,\pi} \leq 1$, то $\|P\| \leq \|P_{(m,l)}\|$.

5. Алгебра типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами

Нехай $\mathcal{W}_0(X)$ – алгебра, породжена скінченними лінійними комбінаціями і добутками всіх (p,q)-поліномів, де $p,q \in \mathbb{Z}$, $p,q \geq 0$. Кожен елемент f алгебри $\mathcal{W}_0(X)$ можна подати у вигляді

$$f = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m f_{k,m-k},$$

де $f_{k,m-k} \in \mathcal{P}({}^{k,m-k}X)$.

Позначимо $\mathbb{Q}^+$ множину раціональних чисел, більших від нуля. Для кожного $r \in \mathbb{Q}^+$ введемо на алгебрі $\mathcal{W}_0(X)$ норму

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \sup_{\|x\|\leq r} |f_{k,m-k}(x)|.$$

Зауважимо, що оскільки $f_{k,m-k} \in \mathcal{P}({}^{p,q}X)$, то

$$\sup_{\|x\|\leq r} |f_{k,m-k}(x)| = \sup_{\|y\|\leq 1} |f_{k,m-k}(ry)| = r^m\|f_{k,m-k}\|.$$

На $\mathcal{W}_0(X)$ отримали зліченну систему норм $\{\|\cdot\|_r :\ r \in \mathbb{Q}^+\}$. Ця система норм породжує на $\mathcal{W}_0(X)$ метризовну топологію. Нехай $\mathcal{W}(X)$ – поповнення алгебри $W_0(X)$ в метриці, породженій системою норм. Елементами алгебри $\mathcal{W}(X)$ будуть функції

$$f = \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m f_{k,m-k}$$

такі, що для кожного $r \in \mathbb{Q}^+$ буде збіжним ряд

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m r^m\|f_{k,m-k}\|.$$

Нехай $\mathcal{W}(X)'$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{W}(X)$. Не складно перевірити правильність такого твердження:

Твердження 5. *Для кожного лінійного неперервного функціонала $\phi \in \mathcal{W}(X)'$ існує число $r \in \mathbb{Q}^+$ таке, що ϕ – неперервний відносно норми $\|\cdot\|_r$.*

Зауважимо, що для $P \in \mathcal{P}({}^{p,q}X)$ маємо $\|P\|_r = r^{p+q}\|P\|$. Звідси робимо висновок, що звуження норми $\|\cdot\|_r$ на простір $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$ є нормою, еквівалентною до норми рівномірної збіжності на одиничній кулі. Отже, топологія, успадкована простором

$\mathcal{P}(^{p,q}X)$ від алгебри $\mathcal{W}(X)$, збігається з топологією рівномірної збіжності на одиничній кулі. Для лінійного неперервного функціонала $\phi \in \mathcal{W}(X)'$ будемо позначати $\phi_{p,q}$ звуження ϕ на простір $\mathcal{P}(^{p,q}X)$. Оскільки ϕ – неперервний, то $\phi_{p,q}$ – також неперервний і існує

$$\|\phi_{p,q}\| = \sup\{|\phi_{p,q}(P)| : P \in \mathcal{P}(^{p,q}X), \|P\| \leq 1\}.$$

Означення 2. *Визначимо радіус-функцію R на $\mathcal{W}(X)'$, поклавши за $R(\phi)$ інфімум $r > 0$ таких, що ϕ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$.*

Зауважимо, що згідно з твердженням 5, для кожного $\phi \in \mathcal{W}(X)'$

$$0 \leq R(\phi) < \infty.$$

Теорема 2. *Радіус-функція R на $\mathcal{W}(X)'$ задається рівністю*

$$R(\phi) = \limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Доведення. Доведемо, що $R(\phi) \geq \limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}$. Якщо $\limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m} = 0$, то нерівність очевидна. Нехай

$$0 < t < \limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Тоді існує зростаюча послідовність $\{m_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ така, що $\max_{0\leq k\leq m_j} \|\phi_{k,m_j-k}\|^{1/m_j} > t$ для достатньо великих j. Звідси, існує послідовність (p,q)-поліномів $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$, сума однорідного і антиоднорідного степенів яких дорівнює m_j, $\|P_j\| = 1$ і $|\phi(P_j)| > t^{m_j}$ для достатньо великих j. Нехай $0 < r < t$. Тоді $\|P_j\|_r = r^{m_j}$ і

$$|\phi(P_j)| > t^{m_j} = (t/r)^{m_j} \cdot r^{m_j} = (t/r)^{m_j}\|P_j\|_r.$$

Оскільки $(t/r)^{m_j} \to +\infty$ при $j \to +\infty$, то ϕ – розривний відносно норми $\|\cdot\|_r$. Отже, $R(\phi) \geq r$. Але, оскільки t і r обрані довільно, то

$$R(\phi) \geq \limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Тепер доведемо, що

$$R(\phi) \leq \limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Нехай

$$\limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m} < s.$$

Тоді для великих m

$$\|\phi_{k,m-k}\| \leq s^m$$

Можна вибрати константу $c \geq 1$ таку, що

$$\|\phi_{k,m-k}\| \leq cs^m$$

для довільних $m > 0$ і $0 \leq k \leq m$.

Нехай $f \in \mathcal{W}(X)$, $f = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$. Нехай $r > s$. Оскільки $r^m\|f_{k,m-k}\| = \|f_{k,m-k}\|_r$ і $\|f\|_r = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j} \|f_{i,j-i}\|_r \geq \|f_{k,m-k}\|_r$ для довільних $m \geq 0$ і $0 \leq k \leq m$, то

$$\|f_{k,m-k}\| = \frac{1}{r^m}\|f_{k,m-k}\|_r \leq \frac{1}{r^m}\|f\|_r.$$

Із неперервності $\phi_{k,m-k}$ отримуємо

$$|\phi_{k,m-k}(f_{k,m-k})| \leq \|\phi_{k,m-k}\|\|f_{k,m-k}\| \leq \frac{cs^m}{r^m}\|f\|_r.$$

Тепер

$$|\phi(f)| = \left|\phi\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}\Big)\right| =$$

$$= \left|\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} \phi_{k,m-k}(f_{k,m-k})\right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} |\phi_{k,m-k}(f_{k,m-k})| \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{mcs^m}{r^m}\|f\|_r =$$

$$= c\Big(\sum_{m=0}^{\infty} m\left(\frac{s}{r}\right)^m\Big)\|f\|_r = \frac{cs/r}{(1-s/r)^2}\|f\|_r.$$

Отже, ϕ – неперервний відносно норми $\|\cdot\|_r$. Звідси $R(\phi) \leq r$. Оскільки s і r вибрали довільно, то

$$R(\phi) \leq \limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Отже, отримали

$$R(\phi) = \limsup_{m\to\infty} \max_{0\leq k\leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Теорема 3. *Нехай ϕ – лінійний функціонал на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Припустимо, що звуження ϕ на простори $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$, $p, q \geq 0$, неперервні і їх норми задовольняють оцінку $\|\phi_{p,q}\| \leq cs^{p+q}$ для деяких $c, s > 0$. Тоді ϕ – неперервний лінійний функціонал.*

Доведення. Нехай $r > s$ і f – довільна функція із $\mathcal{W}(X)$. Тоді, згідно з доведеною в теоремі 2 оцінкою,

$$|\phi(f)| \leq \frac{cs/r}{(1-s/r)^2}\|f\|_r.$$

Отже, ϕ – неперервний відносно норми $\|\cdot\|_r$. Оскільки ϕ – неперервний відносно однієї з норм, які породжують топологію на $\mathcal{W}(X)$, то ϕ – неперервний відносно топології алгебри $\mathcal{W}(X)$.

6. Основний результат

Нехай m, l – деякі цілі невід'ємні числа. Нехай

$$\Lambda = \{(p,q) : p, q \in \mathbb{Z},$$
$$0 \leq p \leq m, 0 \leq q \leq l\} \setminus \{(m,l)\}.$$

Нехай $\mathcal{W}_\Lambda(X)$ – підалгебра алгебри $\mathcal{W}(X)$, породжена всіма (p,q)-поліномами, для яких $(p,q) \in \Lambda$.

Теорема 4. *Нехай ϕ – лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\phi(P) = 0$ для кожного $P \in \mathcal{P}({}^{m,l}X) \cap \mathcal{W}_\Lambda(X)$ і $\phi_{m,l} \neq 0$. Тоді існує неперервний комплекснозначний гомоморфізм ψ на $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\psi_{p,q} = 0$, якщо $(p,q) \in \Lambda$, і $\psi_{m,l} = \phi_{m,l}$. Радіус-функція*

$$R(\psi) \leq e\frac{m+l}{m^{m/(m+l)}l^{l/(m+l)}}\|\phi_{m,l}\|^{1/(m+l)}.$$

Доведення. Оскільки простір $\mathcal{P}({}^{m,l}X)$ є ізометричним до простору $\left(\widehat{\bigotimes}{}^{m,l}_{s,\pi}X\right)'$ (твердження 4) з ізометрією $j'_{m,l}$, то простір неперервних лінійних функціоналів $\mathcal{P}({}^{m,l}X)'$ ізометричний до простору $\left(\widehat{\bigotimes}{}^{m,l}_{s,\pi}X\right)''$. Нехай $j''_{m,l} : \mathcal{P}({}^{m,l}X)' \to \left(\bigotimes{}^{m,l}_{s,\pi}X\right)''$ – ізометрія між цими просторами. Нехай $w = j''_{m,l}(\phi_{m,l})$. Тоді $\|w\| = \|\phi_{m,l}\|$. Оскільки $\phi_{m,l} \neq 0$, то $w \neq 0$. Тепер для довільного $P \in \mathcal{P}({}^{m,l}X)$

$$\phi_{m,l}(P) = j''_{m,l}(\phi_{m,l})(j'_{m,l}(P)) = w(j'_{m,l}(P)).$$

Нехай маємо (km, kl)-поліном P, де k – ціле невід'ємне число. Згідно з теоремою 5.1, простір (km, kl)-поліномів $\mathcal{P}({}^{km,kl}X)$ відображається в простір $\mathcal{P}({}^k\widehat{\bigotimes}{}^{m,l}_{s,\pi}X)$ відображенням $Q \mapsto Q_{(m,l)}$. При цьому маємо таку оцінку для норм:

$$\|Q\| \leq \|Q_{(m,l)}\| \leq c(km, kl, X)\|Q\|.$$

Нехай $P_{(m,l)}$ – образ P при даному ізоморфізмі. Будемо позначати $\widetilde{P_{(m,l)}}$ продовження Арона-Бернера (див. [4]) полінома $P_{(m,l)}$ на простір $\left(\widehat{\bigotimes}{}^{m,l}_{s,\pi}X\right)''$. Для довільного (p,q)-полінома Q покладемо

$$\psi(Q) =$$
$$= \begin{cases} \widetilde{Q_{(m,l)}}(w), & \text{якщо існує } k \text{ таке, що } \\ & \deg_h Q = km,\ \deg_a Q = kl \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Перевіримо, що $\psi_{m,l} = \phi_{m,l}$. Для $Q \in \mathcal{P}({}^{m,l}X)$ поліном $Q_{(m,l)}$ – це лінійний неперервний функціонал на просторі $\widehat{\bigotimes}{}^{m,l}_{s,\pi}X$, тому

$$\psi(Q) = \widetilde{Q_{(m,l)}}(w) = w(Q_{(m,l)}) =$$
$$= w(j'_{m,l}(Q)) = \phi_{m,l}(Q).$$

Отже, $\psi_{m,l} = \phi_{m,l}$.

Доведемо, що для довільних (p,q)-поліномів P і Q буде $\psi(PQ) = \psi(P)\psi(Q)$. Розглянемо три випадки.

a) Припустимо, що не існує такого цілого k, що $\deg_h PQ = km$ і $\deg_a PQ = kl$. Тоді виконується принаймні одна з умов:

1) не існує такого цілого k_1, що $\deg_h P = k_1 m$ і $\deg_a P = k_1 l$,

2) не існує такого цілого k_2, що $\deg_h Q = k_2 m$ і $\deg_a Q = k_2 l$.

У першому випадку $\psi(P) = 0$ і $\psi(PQ) = 0$. У другому випадку $\psi(Q) = 0$ і $\psi(PQ) = 0$. Отже, $\psi(PQ) = \psi(P)\psi(Q)$.

b) Припустимо, що існує ціле k таке, що $\deg_h PQ = km$ і $\deg_a PQ = kl$, і існує ціле k_1 таке, що $\deg_h P = k_1 m$ і $\deg_a P = k_1 l$. Позначимо $k_2 = k - k_1$. Тоді $\deg_h Q = k_2 m$,

$\deg_a Q = k_2 l$ і

$$\psi(PQ) = \widetilde{(PQ)_{(m,l)}}(w) = \\ = \widetilde{P_{(m,l)}}(w)\widetilde{Q_{(m,l)}}(w) = \psi(P)\psi(Q).$$

c) Припустимо, що існує ціле k таке, що $\deg_h PQ = km$ і $\deg_a PQ = kl$, і не існує цілого k_1 такого, що $\deg_h P = k_1 m$ і $\deg_a P = k_1 l$. Тоді не існує цілого k_2 такого, що $\deg_h Q = k_2 m$ і $\deg_a Q = k_2 l$. Звідси, $\psi(P) = 0$ і $\psi(Q) = 0$. Нехай (u_α) – напрямленість елементів $\widehat{\bigotimes}^{m,l}_{s,\pi} X$, яка збігається до w у $*$-слабкій топології простору $\left(\widehat{\bigotimes}^{m,l}_{s,\pi} X\right)''$, при цьому α належить індексній множині $\mathcal{U}$. Знайдемо значення $\psi(PQ)$.

$$\psi(PQ) = \widetilde{(PQ)_{(m,l)}}(w) = A_{\widetilde{(PQ)_{(m,l)}}}(\underbrace{w, \dots, w}_{k}) = \\ = \lim_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} A_{(PQ)_{(m,l)}}(u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_k}).$$

Оскільки $u_\alpha \in \widehat{\bigotimes}^{m,l}_{s,\pi} X$, то $u_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_{j,\alpha}^{\otimes(m,l)}$, де $|\lambda_j| = 1$ і $x_{j,\alpha} \in X$. Тепер

$$\psi(PQ) = \lim_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} A_{(PQ)_{(m,l)}}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \lambda_{j_1} x_{j_1,\alpha_1}^{\otimes(m,l)}, \dots \right. \\ \left. \dots, \sum_{j_k=1}^{\infty} \lambda_{j_k} x_{j_k,\alpha_k}^{\otimes(m,l)}\right) = \\ = \lim_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{\infty} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k} \times \\ \times A_{(PQ)_{(m,l)}}\left(x_{j_1,\alpha_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, x_{j_k,\alpha_k}^{\otimes(m,l)}\right).$$

За означенням,

$$A_{(PQ)_{(m,l)}}\left(x_{j_1,\alpha_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, x_{j_k,\alpha_k}^{\otimes(m,l)}\right) = \\ = A_{PQ}(\underbrace{x_{j_1,\alpha_1}, \dots, x_{j_1,\alpha_1}}_{m}, \dots \\ \dots, \underbrace{x_{j_k,\alpha_k}, \dots, x_{j_k,\alpha_k}}_{m}; \underbrace{x_{j_1,\alpha_1}, \dots, x_{j_1,\alpha_1}}_{l}, \dots \\ \dots, \underbrace{x_{j_k,\alpha_k}, \dots, x_{j_k,\alpha_k}}_{l}).$$

Зробимо зауваження щодо позначень. Нехай маємо деяку (p,q)-лінійну форму $B : Y^{p+q} \to \mathbb{C}$. Нехай

$$y = (y_1, \dots, y_p) \in Y^p, \quad z = (z_1, \dots, z_q) \in Y^q.$$

Можемо розглянути y як відображення з множини $\{1, 2, \dots, p\}$ у простір Y, а z – як відображення з множини $\{1, 2, \dots, q\}$ у простір Y. Тоді B можна розглядати як функцію від цих відображень:

$$B(y; z) = B(y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_q).$$

Нехай $x : \{1, 2, \dots, k\} \to X$ діє за законом

$$x : i \mapsto x_{j_i,\alpha_i},$$

нехай $\tau_h : \{1, 2, \dots, km\} \to \{1, 2, \dots, k\}$ діє за законом

$$\tau_h(i) = n, \text{де } n \text{ – таке, що } (n-1)m < i \le nm$$

і нехай $\tau_a : \{1, 2, \dots, kl\} \to \{1, 2, \dots, k\}$ діє за законом

$$\tau_a(i) = n, \text{ де } n \text{ – таке, що } (n-1)l < i \le nl.$$

Тоді $x \circ \tau_h \in X^{km}$, $x \circ \tau_a \in X^{kl}$ і, згідно з введеним вище позначенням, можемо записати

$$A_{(PQ)_{(m,l)}}\left(x_{j_1,\alpha_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, x_{j_k,\alpha_k}^{\otimes(m,l)}\right) = \\ = A_{PQ}(x \circ \tau_h; x \circ \tau_a).$$

Нехай θ_{hP} – тотожне відображення на множині $\{1, 2, \dots, \deg_h P\}$:

$$\theta_{hP} = \mathrm{id}_{\{1,2,\dots,\deg_h P\}},$$

θ_{aP} – тотожне відображення на множині $\{1, 2, \dots, \deg_a P\}$:

$$\theta_{aP} = \mathrm{id}_{\{1,2,\dots,\deg_a P\}},$$

θ_{hQ} – відображення з $\{1, 2, \dots, \deg_h Q\}$ в $\{\deg_h P + 1, \deg_h P + 2, \dots, \deg_h P + \deg_h Q\}$, яке діє за законом

$$\theta_{hQ}(i) = \deg_h P + i,$$

θ_{aQ} – відображення з $\{1, 2, \dots, \deg_a Q\}$ в $\{\deg_a P + 1, \deg_a P + 2, \dots, \deg_a P + \deg_a Q\}$, яке діє за законом

$$\theta_{aQ}(i) = \deg_a P + i.$$

Для $y \in X^{km}$, $z \in X^{kl}$ легко перевірити виконання рівності

$$A_{PQ}(y;z) = \frac{1}{(km)!(kl)!}\times$$
$$\times \sum_{\sigma_h \in S(km)} \sum_{\sigma_a \in S(kl)} A_P(y\circ\sigma_h\circ\theta_{hP}; z\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})\times$$
$$\times A_Q(y\circ\sigma_h\circ\theta_{hQ}; z\circ\sigma_a\circ\theta_{aQ}).$$

Дійсно, оскільки в правій і лівій частинах рівності знаходяться (km, kl)-лінійні симетричні форми, звуження на діагональ яких співпадають, то рівність правильна. Запишемо цю рівність при $y = x\circ\tau_h$, $z = x\circ\tau_a$.

$$A_{PQ}(x\circ\tau_h; x\circ\tau_a) = \frac{1}{(km)!(kl)!} \sum_{\sigma_h \in S(km)} \sum_{\sigma_a \in S(kl)}$$
$$A_P(x\circ\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP}; x\circ\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})\times$$
$$\times A_Q(x\circ\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hQ}; x\circ\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aQ}).$$

Отже,

$$\psi(PQ) = \frac{1}{(km)!(kl)!}\times$$
$$\times \sum_{\sigma_h \in S(km)} \sum_{\sigma_a \in S(kl)} \lim_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{\infty} \lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_k}\times$$
$$\times A_P(x\circ\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP}; x\circ\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})\times$$
$$\times A_Q(x\circ\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hQ}; x\circ\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aQ}).$$

Лема. *Для фіксованих підстановок σ_h, σ_a існує таке число $s_0 \in \{1,2,\ldots,k\}$, що виконується принаймні одна з умов:*

1) $1 \le |(\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP})^{-1}(s_0)| < m,$

2) $1 \le |(\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})^{-1}(s_0)| < l,$

3) $|(\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP})^{-1}(s_0)| = 0$ *і* $|(\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})^{-1}(s_0)| \ge 1,$

4) $|(\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})^{-1}(s_0)| = 0$ *і* $|(\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP})^{-1}(s_0)| \ge 1.$

Доведення. Припустимо, що для кожного $s \in \{1,2,\ldots,k\}$ не виконується жодна з цих умов. Тоді для кожного $s \in \{1,2,\ldots,k\}$ буде виконуватись

(I) $|(\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP})^{-1}(s)| = m$ і $|(\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})^{-1}(s)| = l,$

або

(II) $|(\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP})^{-1}(s)| = 0$ і $|(\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})^{-1}(s)| = 0.$

Нехай кількість тих s, для яких виконується (I), дорівнює n. Тоді

$$\deg_h P = \left|(\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP})^{-1}\{1,2,\ldots,k\}\right| = nm$$

і

$$\deg_a P = \left|(\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})^{-1}\{1,2,\ldots,k\}\right| = nl.$$

Приходимо до суперечності з тим, що не існує такого числа k_1, що $\deg_h P = k_1 m$ і $\deg_a P = k_1 l$.

Продовження доведення теореми.

Отже, існує число s_0, для якого виконується одна з умов 1) – 4). Позначимо

$$d_1 = \left|(\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP})^{-1}(s_0)\right|,$$

$$d_2 = \left|(\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP})^{-1}(s_0)\right|.$$

Зафіксуємо всі аргументи $x_{j_1,\alpha_1},\ldots,x_{j_k,\alpha_k}$, крім $x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}$. Позначимо

$$P_\sigma(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}) = A_P(x\circ\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hP}; x\circ\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aP}),$$

$$Q_\sigma(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}) = A_Q(x\circ\tau_h\circ\sigma_h\circ\theta_{hQ}; x\circ\tau_a\circ\sigma_a\circ\theta_{aQ}).$$

Тоді P_σ буде (d_1,d_2)-поліномом від $x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}$, Q_σ буде $(m-d_1, l-d_2)$-поліномом від $x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}$.

Тоді

$$\psi(PQ)=\frac{1}{(km)!(kl)!}\times$$
$$\times\sum_{\sigma_h\in S(km)}\sum_{\sigma_a\in S(kl)}\lim_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{\infty}\lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_k}\times$$
$$\times P_\sigma(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}})Q_\sigma(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}})=$$
$$=\frac{1}{(km)!(kl)!}\sum_{\sigma_h\in S(km)}\sum_{\sigma_a\in S(kl)}\lim_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{s_0-1},\alpha_{s_0+1},\ldots,\alpha_k}$$
$$\sum_{j_1,\ldots,j_{s_0-1},j_{s_0+1},\ldots,j_k=1}^{\infty}\lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_{s_0-1}}\lambda_{j_{s_0+1}}\ldots\lambda_{j_k}\times$$
$$\times\lim_{\alpha_{s_0}}\sum_{j_{s_0}=1}^{\infty}\lambda_{j_{s_0}}(P_\sigma Q_\sigma)(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}).$$

Оскільки $P_\sigma Q_\sigma$ є (m,l)-поліномом, то $(P_\sigma Q_\sigma)_{(m,l)}$ буде лінійним функціоналом і

$$(P_\sigma Q_\sigma)(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}})=(P_\sigma Q_\sigma)_{(m,l)}\left(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}^{\otimes(m,l)}\right).$$

Тому

$$\lim_{\alpha_{s_0}}\sum_{j_{s_0}=1}^{\infty}\lambda_{j_{s_0}}(P_\sigma Q_\sigma)(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}})=$$
$$=\lim_{\alpha_{s_0}}\sum_{j_{s_0}=1}^{\infty}\lambda_{j_{s_0}}(P_\sigma Q_\sigma)_{(m,l)}\left(x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}^{\otimes(m,l)}\right)=$$
$$=\lim_{\alpha_{s_0}}(P_\sigma Q_\sigma)_{(m,l)}\left(\sum_{j_{s_0}=1}^{\infty}\lambda_{j_{s_0}}x_{j_{s_0},\alpha_{s_0}}^{\otimes(m,l)}\right)=$$
$$=\lim_{\alpha_{s_0}}(P_\sigma Q_\sigma)_{(m,l)}\left(u_{\alpha_{s_0}}\right)=\widetilde{(P_\sigma Q_\sigma)_{(m,l)}}(w)=$$
$$=\psi(P_\sigma Q_\sigma)=\psi_{m,l}(P_\sigma Q_\sigma)=\phi_{m,l}(P_\sigma Q_\sigma).$$

Оскільки $P_\sigma Q_\sigma\in\mathcal{P}({}^{m,l}X)\cap A_\Lambda(X)$, то $\phi_{m,l}(P_\sigma Q_\sigma)=0$. Тому $\psi(PQ)=0$. Мультиплікативність для випадку c) доведено.

Отже, ми визначили мультиплікативну функцію ψ на (p,q)-поліномах. Продовжимо її за лінійністю на алгебру $\mathcal{W}(X)$. Тепер потрібно довести неперервність ψ. Для цього оцінимо норми звужень функціонала ψ на простори (p,q)-поліномів. Якщо не існує такого k, що $p=km$, $q=kl$, то для довільного $P\in\mathcal{P}({}^{p,q}X)$ буде $\psi(P)=0$, тому для таких p і q буде $\|\psi_{p,q}\|=0$. Оцінимо норму у випадку $p=km$, $q=kl$ для деякого k.

$$\|\psi_{km,kl}\|=$$
$$=\sup\left\{|\psi(P)|:P\in\mathcal{P}({}^{km,kl}X),\|P\|\le1\right\}.$$

Оскільки

$$|\psi(P)|=|\widetilde{P_{(m,l)}}(w)|\le\|\widetilde{P_{(m,l)}}\|\|w\|^k=$$
$$=\|P_{(m,l)}\|\|w\|^k\le c(km,kl,X)\|\|P\|\|w\|^k\le$$
$$\le\frac{(km+kl)^{km+kl}}{(km)!(kl)!}\|P\|\|w\|^k,$$

то

$$\|\psi_{km,kl}\|\le\sup_{\|P\|\le1}\frac{(km+kl)^{km+kl}}{(km)!(kl)!}\|P\|\|w\|^k=$$
$$=\frac{(km+kl)^{km+kl}}{(km)!(kl)!}\|w\|^k.$$

Використаємо оцінку $n!\ge e\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Маємо

$$\frac{(km+kl)^{km+kl}}{(km)!(kl)!}\le\frac{(km+kl)^{km+kl}}{e\left(\frac{km}{e}\right)^{km}e\left(\frac{kl}{e}\right)^{kl}}=$$
$$=\left(\frac{e^{1-2/(km+kl)}(m+l)}{m^{m/(m+l)}l^{l/(m+l)}}\right)^{km+kl}\le$$
$$\le\left(\frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)}l^{l/(m+l)}}\right)^{km+kl}.$$

Отже,

$$\|\psi_{km,kl}\|\le\left(\frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)}l^{l/(m+l)}}\right)^{km+kl}\|w\|^k.$$

Позначимо

$$s=\frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)}l^{l/(m+l)}}\|w\|^{1/(m+l)}.$$

Тоді для довільних $p,q\ge0$ буде $\|\psi_{p,q}\|\le s^{p+q}$. Отже, виконуються умови теореми 3, тому ψ – неперервний комплекснозначний гомоморфізм на $\mathcal{W}(X)$. Оцінимо радіус-функцію ψ.

$$R(\psi)=\limsup_{k\to\infty}\|\psi_{km,kl}\|^{1/(km+kl)}\le$$
$$\le\frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)}l^{l/(m+l)}}\|w\|^{1/(m+l)}=$$
$$=\frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)}l^{l/(m+l)}}\|\phi_{m,l}\|^{1/(m+l)}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *R. Alencar, R. Aron, P. Galindo and A. Zagorodnyuk.* Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 55-64.

2. *R. M. Aron, B. J. Cole and T. W. Gamelin.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51-93.

3. *R. M. Aron, B. J. Cole and T. W. Gamelin.* Weak-star continuous analytic functions // Can. J. Math. **47** (1995), 673-683.

4. *A. M. Davie and T. W. Gamelin.* A theorem on polynomial-star approximation // Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 351-356.

5. *Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V.* Polarization formula for (p, q)-polynomials on a complex normed space // Methods of Functional Analysis and Topology. **17** (2011), no. 1, 75-83.

6. *A. Zagorodnyuk.* Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces // Contemporary Math. **435** (2007), 381-394.

7. *A. Zagorodnyuk.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2559-2569.