УДК 517.51

©2013 р. Г.А. Волошин

Буковинський державний фінансово-економічний університет
Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича

ПОШАРОВЕ НАБЛИЖЕННЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ МНОГОЧЛЕНІВ БЕРНШТЕЙНА ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Показано, що послідовність операторів Бернштейна B_n від багатьох змінних є *pu*-апроксимуючою послідовністю для підпростору P всіх поліномів на кубі $[0,1]^s$, і з допомогою цих операторів отримано теорему про пошарове рівномірне наближення нарізно неперервних функцій на $X \times [0,1]^s$.

We show that the sequence of Bernstein's operators B_n of several variables is a *pu*-approximating sequence for the subspace P of all polynomials on the cube $[0,1]^s$. Using these operators, we obtain a theorem on the layer-wise uniform approximation of separately continuous functions on $X \times [0,1]^s$.

1. **Вступ**. У праці [1] з допомогою класичних многочленів Бернштейна [2, с.100] для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ було вказано явні формули для послідовності сукупно неперервних функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, які є поліноміальними відносно другої змінної і для яких вертикальні x-розрізи $f_n^x = f_n(x,\cdot)$ рівномірно на $[0,1]$ збігаються до x-розрізу $f^x = f(x,\cdot)$ для кожного x з $[0,1]$. Ця побудова дістала розвиток у серії наступних праць [3 - 5]. Виникає природна потреба узагальнити отримані результати на випадок функцій багатьох змінних. Тут ми робимо перший крок у цьому напрямку, розглянувши многочлени Бернштейна від багатьох змінних. Зауважимо, що многочлени Бернштейна від багатьох змінних вивчалися в дипломній роботі [6], яка була написана під керівництвом І.Ф.Григорчука. В даній замітці для кожної нарізно неперервної функції $f : X \times [0,1]^s \to \mathbb{R}$ заданої на добутку довільного топологічного простору X і s-вимірного куба $[0,1]^s$ ми наводимо явну конструкцію сукупно неперервних функцій $f_n : X \times [0,1]^s \to \mathbb{R}$, які поліноміальні відносно другої сукупної змінної $y = (y_1, \dots, y_s) \in [0,1]^s$ і такі, що для кожного x з X послідовність x-розрізів f_n^x рівномірно прямує до x-розрізу f^x на $[0,1]^s$.

2. **Многочлени Бернштейна від багатьох змінних**. Нехай $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ – множина натуральних чисел і $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для кожного $s \in \mathbb{N}$ розглянемо s-вимірний куб

$$[0,1]^s = \{x = (x_1,\dots,x_s) \in \mathbb{R}^s : (\forall k = 1,\dots,s)(0 \le x_k \le 1)\}.$$

Многочленами Бернштейна для функції f від s змінних називаються поліноми виду

$$B_{n_1,\dots,n_s} f(x) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} C_{n_1}^{k_1} \dots C_{n_s}^{k_s} \times$$
$$\times f(\frac{k_1}{n_1}, \dots \frac{k_s}{n_s}) x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s} (1-x_1)^{n_1-k_1} \dots (1-x_s)^{n_s-k_s}$$

Введемо такі позначення: $x = (x_1,\dots,x_s)$ $k = (k_1,...,k_s) \in \mathbb{N}_0^s$, $n = (n_1,...,n_s) \in \mathbb{N}^s$, $\frac{k}{n} = (\frac{k_1}{n_1},...,\frac{k_s}{n_s})$ і $\varphi_{n,k}(x) = C_{n_1}^{k_1} ... C_{n_s}^{k_s} x_1^{k_1} ... x_s^{k_s} (1 - x_1)^{n_1-k_1} ... (1-x_s)^{n_s-k_s}$. Далі покладемо $0 = (0,\dots,0) \in \mathbb{N}_0^s$. Для мультиіндексів $k' = (k'_1,\dots,k'_s)$ і $k'' = (k''_1,\dots,k''_s)$ будемо писати $k' \le k''$, якщо $k'_i \le k''_i$ для кожного $i = 1,\dots,s$. Введемо у розгляд множину $K_n^s = \prod_{i=1}^s \overline{0,n_i} = \{k \in \mathbb{N}_0^s : 0 \le k \le n\}$, де $\overline{0,n_i} = \{0,1,\dots,n_i\}$ при $i = 1,\dots,s$. З допомогою цих скорочень многочлен Бернштейна $B_n f$ можна записати коротко так:

$$B_n f(x) = \sum_{k \in K_n^s} f(\frac{k}{n}) \varphi_{n,k}(x).$$

Лема 1. $\sum\limits_{k\in K_n^s}\varphi_{n,k}(x) = 1$ *для кожного* $x\in\mathbb{R}^s$.

Доведення. Справді, використавши формулу бінома Ньютона $(a+b)^m = \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j a^j b^{m-j}$ і зробивши заміну $a = x_i$, $b = 1-x_i$, $j = k_i$, $m = n_i$, $i = 1,\dots,s$, отримаємо

$$1 = 1^{n_i} = (x_i+1-x_i)^{n_i} = \sum_{k_i=0}^{n_i} C_{n_i}^{k_i} x^{k_i}(1-x_i)^{n_i-x_i}.$$

Тому

$$\sum_{k\in K_n^s}\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\dots\sum_{k_s=0}^{n_s} C_{n_1}^{k_1}...C_{n_s}^{k_s}\times$$

$$\times x_1^{k_1}...x_s^{k_s}(1-x_1)^{n_1-k_1}...(1-x_s)^{n_s-k_s} =$$

$$= \prod_{i=1}^{s}\sum_{k_i=0}^{n_i} C_{n_i}^{k_i} x^{k_i}(1-x_i)^{n_i-k_i} = 1.$$

Ми будемо використовувати відому нерівність [2, с.100].

Лема 2. $\sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j (j-mt)^2 t^j (1-t)^{m-j} \le \frac{m}{4}$ *при* $0\le t\le 1$.

Позначимо символом $C(X)$ простір всіх неперервних функцій $f : X\to\mathbb{R}$ на топологічному просторі X.

Теорема 1. *Нехай* $f\in C[0,1]^s$. *Тоді* $B_n f \rightrightarrows f$ *на* $[0,1]^s$, *якщо* $n_i\to\infty$ *для кожного* $i = 1,\dots,s$.

Доведення. Для точки $x = (x_1,\dots,x_s)\in\mathbb{R}^s$ покладемо $|x| = \max\{|x_1|,\dots,|x_s|\}$. Нехай ε – довільне додатне число.

Оскільки функція f є неперервною на $[0,1]^s$, а $[0,1]^s$ є компактом, то за теоремою Кантора f є рівномірно неперервною на $[0,1]^s$. Тому існує таке $\delta > 0$, що для довільних x' і x'' з $[0,1]^s$, таких, що $|x'-x''| < \delta$, виконується нерівність $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$.

З леми 1 випливає, що

$$f(x) = \sum_{k\in K_n^s} f(x)\varphi_{n,k}(x)$$

для кожного $x\in[0,1]^s$. Тому

$$|f(x)-B_n f(x)| = |\sum_{k\in K_n^s}(f(x)-f(\frac{k}{n}))\varphi_{n,k}(x)| \le$$

$$\le \sum_{k\in K_n^s}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\varphi_{n,k}(x) = S(x)$$

для кожного $x\in[0,1]^s$, адже $\varphi_{n,k}(x)\ge 0$ на $[0,1]^s$. Розглянемо дві суми

$$\Sigma_1 = \sum_{|\frac{k}{n}-x|<\delta}|f(\frac{k}{n})-f(x)|\varphi_{n,k}(x)$$

і

$$\Sigma_2 = \sum_{|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}|f(\frac{k}{n})-f(x)|\varphi_{n,k}(x).$$

Зрозуміло, що $S(x) = \Sigma_1+\Sigma_2$, отже,

$$|f(x)-B_n(x)| \le \Sigma_1+\Sigma_2.$$

Для $|\frac{k}{n}-x| < \delta$ будемо мати, що $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon$, отже

$$\Sigma_1 \le \varepsilon\sum_{|\frac{k}{n}-x|<\delta}\varphi_{n,k}(x) \le \varepsilon\sum_{k\in K_n^s}\varphi_{n,k}(x) = \varepsilon.$$

Для оцінки Σ_2 використаємо те, що кожна неперервна функція на кубі $[0,1]^s$ є обмеженою, отже, існує таке число $M > 0$, що $|f(x)|\le M$ на $[0,1]^s$. Тоді

$$\Sigma_2 = \sum_{|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}|f(\frac{k}{n})-f(x)|\varphi_{n,k}(x) \le$$

$$\le 2M\sum_{|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}\varphi_{n,k}(x).$$

Оскільки $|\cdot|$ – максимум-норма, то $|\frac{k}{n}-x| = \max\limits_{i=1,\dots,s}|\frac{k_i}{n_i}-x_i|$. Тому нерівність $|\frac{k}{n}-x|\ge\delta$ рівносильна тому, що існує такий номер $i = 1,\dots,s$, для якого виконується нерівність $|\frac{k_i}{n_i}-x_i|\ge\delta$. В такому разі

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}\varphi_{n,k}(x) \le$$

$$\le \sum_{|\frac{k_1}{n_1}-x_1|\ge\delta}\varphi_{n,k}(x)+\dots+\sum_{|\frac{k_s}{n_s}-x_s|\ge\delta}\varphi_{n,k}(x)$$

для кожного $x\in[0,1]^s$, адже $\varphi_{n,k}(x)\ge 0$ на $[0,1]^s$.

Для подальшої оцінки Σ_2 використаємо лему 2 та той факт, що нерівність $|\frac{k_i}{n_i} -$

$x_i| \geq \ \delta$ рівносильна нерівності $\frac{(k_i-n_ix_i)^2}{\delta^2 n_i^2} \geq 1$. Тоді

$$\Sigma_2 \leq \frac{2M}{\delta^2}(\frac{1}{n_1^2} \sum_{|\frac{k_1}{n_1}-x_1|\geq\delta} (k_1-n_1x_1)^2\varphi_{n,k}(x)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n_s^2} \sum_{|\frac{k_s}{n_s}-x_s|\geq\delta} (k_s-n_sx_s)^2\varphi_{n,k}(x)) \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2}(\frac{1}{n_1^2} \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_s=1}^{n_s} (k_1-n_1x_1)^2\varphi_{n,k}(x)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n_s^2} \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_s=1}^{n_s} (k_s-n_sx_s)^2\varphi_{n,k}(x)).$$

Але

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_s=0}^{n_s} (k_1-n_1x_1)^2\varphi_{n,k} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} (k_1-n_1x_1)^2 C_{n_1}^{k_1} x_1^{k_1}(1-x_1)^{n_1-k_1} \times$$

$$\sum_{k_2=0}^{n_2} C_{n_2}^{k_2} x_2^{k_2}(1-x_2)^{n_2-k_2} \times \ldots \times$$

$$\sum_{k_s=0}^{n_s} C_{n_s}^{k_s} x_s^{k_s}(1-x_s)^{n_s-k_s} \leq \frac{n_1}{4}\cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = \frac{n_1}{4}.$$

Аналогічно

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_s=0}^{n_s} (k_i-n_ix_i)^2\varphi_{n,k}(x) \leq \frac{n_i}{4}$$

при $i = 2, \ldots, s$.

Тому

$$\Sigma_2 \leq \frac{2M}{4\delta^2}(\frac{n_1}{n_1^2}+\cdots+\frac{n_s}{n_s^2}) =$$

$$= \frac{M}{2\delta^2}(\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_s}) = A_{n_1,\ldots,n_s}.$$

Ясно, що $A_{n_1,\ldots,n_s} \to 0$ при $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$, $\ldots$, $n_s \to \infty$, тому існує такий номер N, що $A_{n_1,\ldots,n_s} < \varepsilon$, як тільки $n_i \geq N$ при $i = 1, \ldots, s$. Тому і $\Sigma_2 < \varepsilon$ при $n_i \geq N$ для $i = 1, \ldots, s$.

Таким чином, для будь-якого $x \in [0,1]^s$ виконується нерівність $|f(x) - B_nf(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ при $n_i \geq N$ для $i = 1, \ldots, s$. Тому $B_nf \rightrightarrows f$ на $[0,1]$ при $n_i \to \infty$ для $i = 1, \ldots, s$.

3. **Пошарове рівномірне наближення функцій** $f : X \times [0,1]^s \to \mathbb{R}$.

Для топологічного простору Y символом $C_p(Y)$ позначимо простір $C(Y)$ всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$, наділений топологією поточкової збіжності $\mathcal{T}_p$, що породжується сукупністю переднорм

$$q_y(g) = |g(y)|,$$

де y пробігає множину Y [7, с.30]. Для компактного простору Y символом $C_u(Y)$ ми позначаємо банахів простір $(C(Y), \|\cdot\|)$ з рівномірною нормою

$$\|g\| = \max_{y\in Y} |g(y)|,$$

що породжує на просторі $C(Y)$ топологію $\mathcal{T}_u$ рівномірної збіжності. Неперервне відображення $A : C_p(Y) \to C_u(Y)$ ми називаємо *pu-неперервним*. Послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$ називається *pu-апроксимуючою* для L, якщо ці оператори pu-неперервні і $A_ng \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Символом P позначимо підпростір усіх многочленів від s змінних на кубі $[0,1]^s$, тобто функцій $h : [0,1]^s \to \mathbb{R}$, які задаються формулою

$$h(y_1,\ldots,y_s) = \sum_{k\in K_n^s} a_k y^k,$$

де $y^k = (y_1^{k_1},\ldots,y_n^{k_n})$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$, $k = (k_1,\ldots,k_n)$.

Для встановлення наступного результату, нам буде потрібна така лема.

Лема 3. *Нехай $y_j \in Y$ і $\varphi_j \in C(Y)$ при $j = 1,\ldots,m$, Y – компактний простір і оператор $A : C(Y) \to C(Y)$ визначений формулою*

$$(Ag)(y) = \sum_{j=1}^m g(y_j)\varphi_j(y).$$

Тоді A – лінійний pu-неперервний оператор.

Доведення. Для довільного $y \in Y$ маємо:

$$|(Ag)(y)| \leq \sum_{j=1}^m |g(y_j)||\varphi_j(y)| \leq$$

$$\le \sum_{j=1}^{m} q_{y_j}(g)\|\varphi_j\| \le C \max_{j=1,\ldots,n} q_{y_j}(g),$$

де $C = \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|$. Тому

$$\|Ag\| \le C \max_{j=1,\ldots,n} q_{y_j}(g).$$

За критерієм неперервності лінійного оператора в полінормованих просторах [8, с.12] оператор $A : Cp(Y) \to C_u(Y)$ буде неперервним.

Теорема 2. *Нехай* $Y = [0,1]^s$ *і* $B_n g = B_{n,\ldots,n} g$ *– многочлен Бернштейна для функції* $g \in C[0,1]^s$, *який отримується при* $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = n$, *де* n *– довільне натуральне число. Тоді послідовність операторів* B_n *є pu-апроксимуючою для підпростору* P *всіх поліномів на* $[0,1]^s$.

Доведення. З теореми 1 негайно випливає, що $B_n g \to g$ в $C_u[0,1]^s$ при $n \to \infty$. Крім того, $B_n g \in P$ для кожного n. Те, що оператори B_n є *pu*-неперервними отримується з леми 3.

З теоореми 2 випливає теорема про пошарове рівномірне наближення нарізно неперервних функцій $f : X \times [0,1]^s \to \mathbb{R}$. Для функції $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x,y) \in X \times Y$ ми покладаємо

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x,y).$$

Теорема 3. Нехай X – довільний топологічний простір, $f : X \times [0,1]^s \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, $f_n(x,y) = (B_n f^x)(y)$ для кожного номера n і точок $x \in X$ і $y \in [0,1]^s$. Тоді $f_n : X \times [0,1]^s \to \mathbb{R}$ – сукупно неперервні функції, $f_n^x \in P$ для кожного n і довільного $x \in X$ і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]^s$ для кожного $x \in X$.

Доведення. Це негайно випливає з теореми 2 і теореми 3б праці [4].

Висловлюю щиру вдячність Володимиру Кириловичу Маслюченку за постійну допомогу та підтримку при написанні цією статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Власюк Г.А., Маслюченко В.К.* Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 52-59.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т.2. – С.-Петербург-Москва-Краснодар: Лань, 2005. – 464с.

3. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної// Карп. матем. публ. – 2010. – **2**, №1 – С. 4-14.

4. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій // Карп. матем. публ. – 2010. – **2**, №2 – С.11-21.

5. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н.* Про апроксимацію відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій// Карп. матем. публ. – 2012. – **4**, №1 – С.23-27.

6. *Марчук Л.М.* Про наближення функцій багатьох змінних поліномами Бернштейна. Дипломна робота. – Чернівці, 1986. – 36 с.

7. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

8. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.