УДК 517.589, 517.926.4

©2013 р. Т.П. Гой, Р.А. Заторський

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ

НОВІ ФУНКЦІЇ, ПОРОДЖЕНІ ЗРОСТАЮЧИМИ ФАКТОРІАЛАМИ, ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Запропоновані нові функції, означені при допомозі зростаючих факторіальних степенів. Побудовані графіки цих функцій, встановлені деякі властивості та формули, що їх пов'язують. Виведені звичайні диференціальні рівняння, розв'язками яких є введені функції.

We consider new functions defined by increasing factorial powers. We sketch graphs of such functions and find some of their properties and related formulas. It is shown that constructed functions are solutions of ordinary differential equations derived in the paper.

1. Вступ. У комбінаторному аналізі спостерігаємо двоїстість, притаманну зростаючим і спадним факторіальним степеням. Якщо комбінаторна задача приводить до деякої комбінаторної тотожності, побудованої при допомозі спадних факторіальних степенів, то зазвичай існує змістовна двоїста комбінаторна задача, яка приводить до двоїстої комбінаторної тотожності з участю зростаючих факторіальних степенів. Як один з численних прикладів таких двоїстих комбінаторних тотожностей наведемо тотожності Вандермонда та Нерлунда

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}},$$

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}$$

відповідно, де $\binom{n}{k}$ – біноміальні коефіцієнти.

Класичні трансцендентні функції e^x, $\sin x$ та $\cos x$ задаються при допомозі відповідних степеневих рядів з участю факторіалів, які можна подати у вигляді спадного факторіального степеня $n^{\underline{n}}$.

Замінивши у степеневих рядах, що задають ці функції, спадні факторіальні степені відповідними зростаючими факторіальними степенями $n^{\overline{n}}$, ми одержуємо нові функції з дещо аналогічними властивостями.

Задля дотримання аналогії між новими функціями, побудованими при допомозі зростаючих факторіальних степенів, і класичними функціями e^x, $\sin x$, $\cos x$ ми зберігаємо звичні позначення із заміною перших літер на відповідні великі літери.

Таким чином, предметом цієї статті є означення та дослідження властивостей функцій $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$.

2. Основні позначення.

Означення 1. [1] *Для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$* ***факторіальним степенем*** *m з кроком $k \in \mathbb{R}$ називають вираз*

$$x^{m\{k\}} = \\ = x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot\big(x+(m-1)k\big). \quad (1)$$

Вважають, що $x^{0\{k\}} = 1$, а для $k = 0$ маємо звичайний степінь, тобто $x^{m\{0\}} = x^m$.

Найчастіше зустрічаються зростаючі факторіальні степені m з кроком 1 і спадні факторіальні степені m з кроком –1, які позначатимемо відповідно через

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),$$

$$x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Вважають, що $x^{\overline{0}} = x^{\underline{0}} = 1$. Очевидно, що $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

У математичній літературі зустрічаємо й інші позначення факторіальних степенів, наприклад, зростаючий факторіальний степінь m з кроком 1 часто позначають символом Похгаммера $(x)_m$, тобто $(x)_m = x^{\overline{m}}$ [2].

3. Функція Exp(x) та її графік. За аналогією з відомим степеневим рядом $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, який можна трактувати як ряд, побудований при допомозі спадних факторіальних степенів ($n! = n^{\underline{n}}$), розглянемо "двоїсту"функцію, побудовану при допомозі зростаючих факторіальних степенів.

Означення 2. Exp(x) *називатимемо функцію, визначену при допомозі степеневого ряду*

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^n}{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (2n-1)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\overline{n}}}.$$

Очевидно, що

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\, x^n \qquad (2)$$

і ряд у (2) збігається на всій числовій осі.

Оскільки

$$\frac{(n-1)!}{(2\,n-1)!}\, x^n =$$

$$= \frac{x^n}{4^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!\,\big(2(n-k)+1\big)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{4^{k-1}(k-1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k} x^{n-k+1}}{(n-k)!\big(2(n-k)+1\big)4^{n-k}},$$

то з (2) за правилом множення рядів маємо

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n!(2n+1)4^n}. \quad (3)$$

Враховуючи тепер, що

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \Phi(x),$$

де $\Phi(x)$ – функція ймовірностей (функція помилок), з (3) для $x \geq 0$ маємо

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + \sqrt{\pi}\sqrt{x}\, e^{\frac{x}{4}} \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right). \qquad (4)$$

Очевидно, що $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{Exp}(x) = +\infty$, а якщо $x < 0$, то

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + i\sqrt{\pi}\sqrt{|x|}\, e^{\frac{x}{4}}\, \Phi\left(\frac{i\sqrt{|x|}}{2}\right). \qquad (5)$$

Використовуючи асимптотичний розклад ($x \to \infty$) [3]

$$\Phi(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2x^2)^n} + \ldots \right),$$

з (4) одержуємо асимптотичну формулу при великих $|x|$:

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + \sqrt{\pi}\sqrt{x} e^{\frac{x}{4}} -$$

$$-2\left(1 - 2\frac{1}{x} + 2^2 \frac{1 \cdot 3}{x^2} + (-2)^n \frac{(2n-1)!!}{x^n} + \ldots\right),$$

з якої випливає, що $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{Exp}(x) = -1$.

Графік функції $y = \mathrm{Exp}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, наведений на рис. 1.

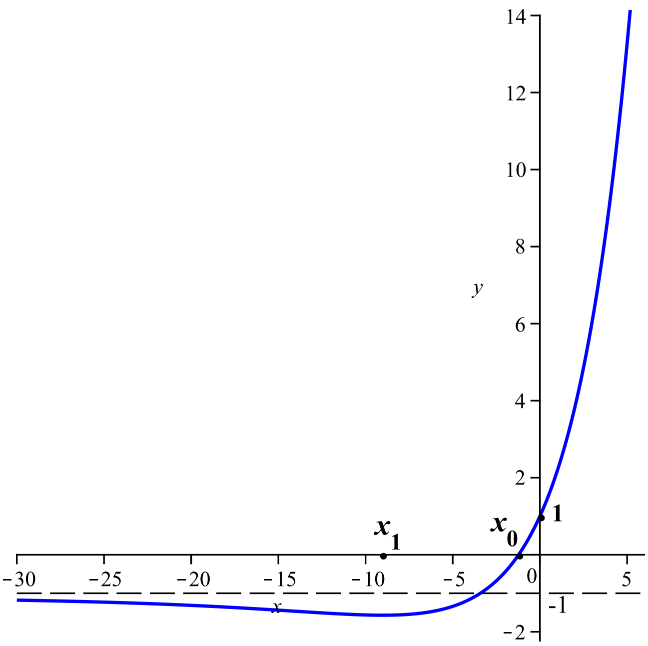

Рис.1. Графік функції $y = \mathrm{Exp}(x)$

Єдиним нулем функції $\mathrm{Exp}(x)$ є число

$$E_0 = -1,2204100845963337151\ldots,$$

а у точці $E_1 = -9,02371882596227\ldots$ вона досягає свого найменшого значення.

4. Функція $\mathbf{Cos}(x)$ та її графік. За аналогією з відомим степеневим розвиненням

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\underline{2n}}}\, x^{2n}$$

розглянемо функцію, побудовану при допомозі зростаючих факторіальних степенів.

Означення 3. $\mathrm{Cos}(x)$ *називатимемо функцію, визначену рівністю*

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n\cdot(2n+1)\cdot\ldots\cdot(4n-1)} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}}\, x^{2n}.$$

Очевидно, що функція $\mathrm{Cos}(x)$ парна,

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(4n-1)!}\, x^{2n} \qquad (6)$$

і ряд у правій частині (6) збігається абсолютно та рівномірно на всій числовій осі.

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!}{(4n-1)!}\, x^{2n} = \frac{x^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2n}}{(2j)!\big(2(n-j)+1\big)!\big(4(n-j)+3\big)} -$$

$$- \frac{x^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2n}}{(2j+1)!\big(2(n-j)\big)!\big(4(n-j)+1\big)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}(2n)!}\, x^{2n} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n+1}(4n+3)(2n+1)!}\, x^{2n+2} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}(2n+1)!}\, x^{2n+1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n+1}(2n)!\,(4n+1)}\, x^{2n+1},$$

то з (6) для $x \geq 0$ одержуємо

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + \cos\frac{x}{4}\cdot 2\sqrt{x}\, S\!\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) -$$

$$- \sin\frac{x}{4}\cdot 2\sqrt{x}\, C\!\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right), \qquad (7)$$

де $S(p)$, $C(p)$ – інтеграли Френеля, які визначаються відповідно формулами [3]

$$S(p) = \int_0^p \sin t^2\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}\, p^{4n+3},$$

$$C(p) = \int_0^p \cos t^2\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}\, p^{4n+1}.$$

Отже, з (7) остаточно маємо

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + 2\sqrt{x}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{x}{4}\, S\!\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4}\, C\!\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right),\ x \geq 0. \qquad (8)$$

Якщо $x < 0$, то у формулі (8) потрібно замінити $\sqrt{x}$ на $i\sqrt{|x|}$.

Найменшим додатним нулем функції $\mathrm{Cos}(x)$ є число

$$C_0 = 2,50539603854250\ldots$$

Графік функції $\mathrm{Cos}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, зображений на рис. 2.

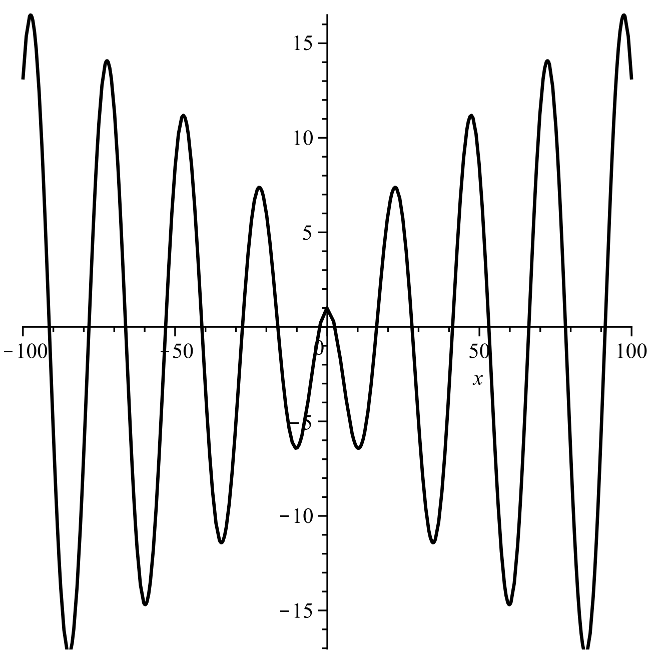

Рис.2. Графік функції $\mathrm{Cos}(x)$

5. Функція $\mathbf{Sin}(x)$ та її графік. За аналогією з відомим степеневим розвиненням

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{\underline{2n-1}}}\, x^{2n-1}$$

розглянемо функцію, означену при допомозі зростаючих факторіальних степенів.

Означення 4. $\mathrm{Sin}(x)$ *називатимемо функцію, визначену рівністю*

$$\mathrm{Sin}(x) =$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^5}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot 2n\cdot \ldots \cdot (4n-3)} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{\overline{2n-1}}}\, x^{2n-1}.$$

Очевидно, що $\mathrm{Sin}(x)$ – непарна функція,

$$\mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!}\, x^{2n-1} \qquad (9)$$

і ряд у (9) абсолютно і рівномірно збігається на всій числовій осі.

Враховуючи, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!}\, x^{2n-1} =$$

$$= \frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2n}}{(2j)!\big(2(n-j)+1\big)!\big(4(n-j)+3\big)} +$$

$$+ \frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2n}}{(2j+1)!\big(2(n-j)\big)!\big(4(n-j)+1\big)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}(2n)!}\, x^{2n+1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}(2n)!(4n+1)}\, x^{2n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n+1}(2n+1)!}\, x^{2n+1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n+1}(2n+1)!(4n+3)}\, x^{2n+2},$$

для $x \ge 0$ маємо

$$\mathrm{Sin}(x) = \cos\frac{x}{4} \cdot 2\sqrt{x}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) +$$

$$+ \sin\frac{x}{4} \cdot 2\sqrt{x}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

або

$$\mathrm{Sin}(x) = 2\sqrt{x}\, \times$$

$$\times \left(\cos\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right). \qquad (10)$$

Якщо $x < 0$, то у формулі (10) $\sqrt{x}$ потрібно замінити на $i\sqrt{|x|}$.

Графік функції $\mathrm{Sin}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, зображений на рис. 2.

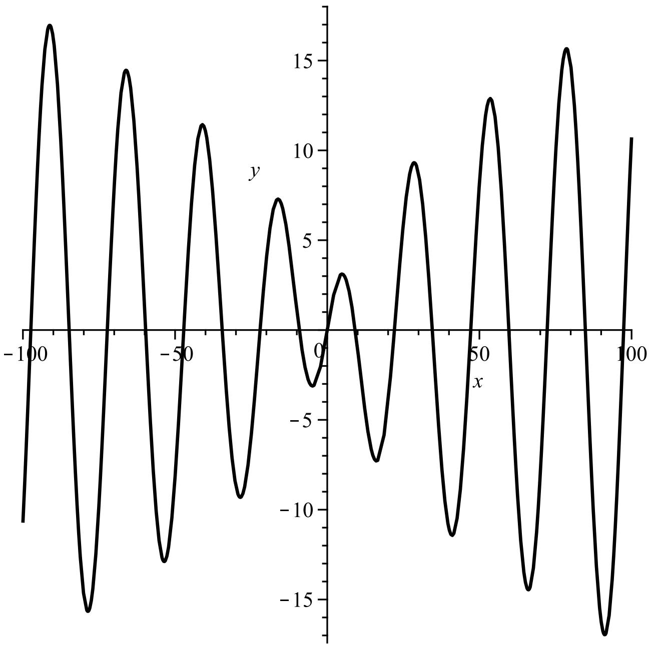

Рис. 3. Графік функції $\mathrm{Sin}(x)$

Найменшим додатним нулем функції $\mathrm{Sin}(x)$ є число

$$S_0 = 9,18975829443256\ldots$$

6. Диференціальні рівняння, породжені функціями $\mathbf{Exp}(x), \mathbf{Cos}(x), \mathbf{Sin}(x)$. Покажемо, що функції $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, означені у пп. 3-5, є розв'язками деяких задач Коші для лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами.

Теорема 1. *Функції* $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$ *є розв'язками відповідно таких задач Коші*:

$$\left.\begin{array}{c} 4xy' - (x+2)y = x-2, \\ y(0) = 1; \end{array}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{c} 16x^2y'' - 16xy' + (x^2+12)y = 12 - x^2, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \end{array}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{array}{c} 16x^2y'' - 16xy' + (x^2+12)y = -4x, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Доведення. Те, що функції $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$ задовольняють відповідні початкові умови з (11), (12), (13), випливає з формул (2), (6), (9).

Доведемо тепер, що ці функції є розв'язками відповідних рівнянь з (11), (12), (13).

а) Оскільки

$$(\mathrm{Exp}(x))' =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\, e^{\frac{x}{4}}\, \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) + \frac{1}{2}, \tag{14}$$

то, виключаючи з (4) і (14) $\Phi(\sqrt{x}/2)$, одержуємо співвідношення

$$(\mathrm{Exp}(x))' - \frac{x+2}{4x}\,\mathrm{Exp}(x) = \frac{x-2}{4x},$$

з якого випливає, що функція $\mathrm{Exp}(x)$ є розв'язком рівняння з (11).

б) З (6) знаходимо першу та другу похідні функції $\mathrm{Cos}(x)$:

$$(\mathrm{Cos}(x))' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{x}}{2}\left(\cos\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \tag{15}$$

$$(\mathrm{Cos}(x))'' = -\frac{1}{8} - \frac{x^2+4}{8x\sqrt{x}} \times$$

$$\times\left(\cos\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right). \tag{16}$$

Виключаючи тепер з (8), (15), (16) вирази

$$\cos\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right),$$

$$\cos\frac{x}{4}\, C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4}\, S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right),$$

одержуємо співвідношення

$$16x^2(\mathrm{Cos}(x))'' - 16x\,(\mathrm{Cos}(x))' +$$

$$+(x^2+12)\mathrm{Cos}(x) = 12 - x^2,$$

звідки випливає, що функція $\mathrm{Cos}(x)$ є розв'язком диференціального рівняння з (12).

в) Використовуючи (10), знаходимо першу та другу похідні функції $\mathrm{Sin}(x)$:

$$(\mathrm{Sin}(x))' =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\left(\cos\frac{x}{4} S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4} C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{4} C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4} S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \tag{17}$$

$$(\mathrm{Sin}(x))'' = \frac{1}{4x} - \frac{x^2+4}{8x\sqrt{x}} \times$$
$$\times\left(\cos\frac{x}{4} C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4} S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{4} S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4} C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right). \tag{18}$$

З (10), (17) і (18) випливає, що

$$16x^2\,(\mathrm{Sin}(x))'' - 16x\,(\mathrm{Sin}(x))' +$$
$$+(x^2+12)\,\mathrm{Sin}(x) = -4x,$$

тобто $\mathrm{Sin}(x)$ – розв'язок диференціального рівняння з (13).

Теорема 2. *Сукупність функцій*

$$y = \mathrm{Cos}(x), \;\; z = \mathrm{Sin}(x)$$

є розв'язком задачі Коші для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{2x} - \frac{z}{4} - \frac{1}{2x}, \\ z' = \frac{y}{4} + \frac{z}{2x} + \frac{1}{4}, \end{cases} \quad y(0) = 1, \; z(0) = 0.$$

Доведення. Доведення теореми безпосередньо випливає з формул (8), (10), (15), (17).

7. Деякі формули, що пов'язують функції $\mathbf{Exp}(x)$ $\mathbf{Cos}(x)$, $\mathbf{Sin}(x)$.

З формули (2), враховуючи, що

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\,(ix)^n =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(4n-1)!}\,(ix)^{2n} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(4n-3)!}\,(ix)^{2n-1} =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!}{(4n-1)!}\,x^{2n} +$$
$$+ i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!}\,x^{2n-1},$$

а також (6), (9), одержуємо формулу, аналогічну до формули Ейлера:

$$\mathrm{Exp}(ix) = \mathrm{Cos}(x) + i\,\mathrm{Sin}(x). \tag{19}$$

З (19) і формули

$$\mathrm{Exp}(-ix) = \mathrm{Cos}(x) - i\,\mathrm{Sin}(x)$$

отримуємо співвідношення

$$\mathrm{Cos}(x) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Exp}(ix) + \mathrm{Exp}(-ix)\big),$$
$$\mathrm{Sin}(x) = \frac{1}{2i}\big(\mathrm{Exp}(ix) - \mathrm{Exp}(-ix)\big),$$

звідки

$$\mathrm{Cos}(ix) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Exp}(x) + \mathrm{Exp}(-x)\big),$$
$$\mathrm{Sin}(ix) = \frac{1}{2i}\big(\mathrm{Exp}(-x) - \mathrm{Exp}(x)\big),$$

а також

$$\mathrm{Cos}^2(x) + \mathrm{Sin}^2(x) = \mathrm{Exp}(ix)\mathrm{Exp}(-ix).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 400 с.

2. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основания информатики. – М. : Мир, 1998. – 703 с.

3. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.