УДК 123.456

©2013 р. **В.В. Городецький, А.О. Широковських**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З АНАЛІТИЧНИМИ СИМВОЛАМИ

Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за аналітичними символами, з граничною умовою у просторі узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

We establish the well-posedness of a non-locally multi-point with respect to time problem for evolution equations with pseudo-differential operators constructed by analytic characters, with a boundary condition in the space of generalized functions of ultra-sharing type.

Нелокальні крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними виникають при побудові загальної теорії крайових задач, описуванні всіх коректних задач для конкретного оператора, математичному моделюванні різноманітних природничих процесів [1-3]. Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи (О.О. Дезін, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, Б.Й. Пташник, М.І. Матійчук, В.І. Чесалін та ін.). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, досліджені питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за символами, які допускають аналітичне продовження у певну область комплексної площини (клас таких операторів містить і оператори Бесселя дробового диференціювання; нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних рівнянь з такими операторами на теперішній час не вивчені). Встановлена структура та властивості фундаментального розв'язку, коректна розв'язність задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментально розв'язку з граничною функцією; встановлено, що розв'язок володіє властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності).

1. Властивості фундаментального розв'язку багатоточкової задачі. Нехай $\omega \in (1,+\infty)\backslash\{2,4,6,...\}$, $\mu \in (-\infty,0]$ - фіксовані параметри. Символом P_ω^μ позначимо сукупність функцій a: $\mathbb{R} \to [0,\infty)$, які задовольняють наступні умови: 1) функція a нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$, при цьому

$$\exists B = B(a) > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall m \in \mathbb{Z}_+$$
$$\forall x \in \mathbb{R}: \ |D_x^m a(x)| \leq c_\varepsilon B^m m^m e^{\varepsilon|x|^\omega},$$
$$\exists b_0 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : a(x) \geq b_0|x|^\omega;$$

2) функція $a \in P_\omega^\mu$ допускає аналітичне продовження в область $G_\mu := \{z = x+iy \in \mathbb{C} : |y| \leq K(1+|x|)^\mu$, $x \in \mathbb{R}, K > 0\}$ комплексної площини; функція $e^{-a(z)}$, $z \in G_\mu$, задовольняє нерівність

$$|e^{-a(x+iy)}| \leq \tilde{L}_0 e^{-\tilde{\alpha}_0|x|^\omega}, \ \ z = x+iy \in G_\mu,$$

з деякими сталими $\tilde{L}_0, \tilde{\alpha}_0 > 0$, залежними лише від функції a. З теореми типу Фрагмена-Ліндельофа [4, с. 264] випливає, що похідні функції e^{-a} на дійсній осі задовольняють нерівності

$$|D_x^m e^{-a(x)}| \leq L_0 A_0^m m^{m(1-\mu/\omega)} \exp\{-\alpha_0|x|^\omega\},$$

$$m \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $L_0, A_0, \alpha_0 > 0$. Звідси дістаємо, що e^{-a} є елементом простору $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$, який відноситься до просторів типу S (просторів S_α^β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$), введених І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим в [4]. Простори типу S складаються з нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k\varphi^{(m)}(x)| \le c_{km}$, $x \in \mathbb{R}$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{km}\}$ - деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження (тобто c_{km} можуть змінюватися довільно разом з функцією φ), то маємо, очевидно, простір $S \equiv S(\mathbb{R})$ Л. Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Зокрема, для довільних фіксованих $\alpha, \beta > 0$

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \mid \exists c > 0 \ \exists A > 0$$
$$\exists B > 0 \ \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : |x^k\varphi^{(m)}(x)| \le cA^kB^mk^{k\alpha}m^{m\beta}\}.$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще так [4]: S_α^β складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \le c_1B_1^m m^{m\beta} \exp\{-c_2|x|^{1/\alpha}\},$$
$$m \in \mathbb{Z}_+, \, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, B_1, c_2, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність $|\varphi(x + iy)| \le c_3 \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}$, $c_3 > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall \bar{A} > A \ \forall \bar{B} > B :$$

$$|x^k\varphi^{(m)}(x)| \le c\bar{A}^k\bar{B}^mk^{k\alpha}m^{m\beta}, \ \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється в повний злічено нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k\varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^mk^{k\alpha}m^{m\beta}},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \dots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Отже, в S_α^β можна ввести топологію індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ [4].

У просторах S_α^β визначена і є неперервною операція зсуву аргументу $T_x : \varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [4]) у тому розумінні, що граничне співвідношення

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \to \varphi'(x), h \to 0,$$

справджується для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [4] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні), вони тісно пов'язуються між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильними є формули: $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$, де

$$F[S_\alpha^\beta] := \{\psi : \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{i\sigma x}dx, \ \varphi \in S_\alpha^\beta\}.$$

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю. Оскільки при $\beta > 1$ в $S_\alpha^\beta (\alpha > 0)$ є й фінітні функції [4], то має сенс наступне означення: узагальнена функція $f \in (S_\alpha^\beta)'$ ($\alpha > 0$, $\beta > 1$) дорівнює нулеві на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$, якщо $< f, \varphi >= 0$ для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$, носій якої міститься в (a, b) (тут $< f, \varphi >$ позначає значення функціоналу f на основній функції φ). Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву аргументу T_x, то згортку узагальненої функції функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$

з основною функцією φ задамо формулою

$$(f*\varphi)(x) =< f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot) >\equiv< f, \varphi(x-\cdot) >,$$
$$\check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргументу в просторі S_α^β випливає, що згортка $f*\varphi$ є звичайною нескінченною диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Оскільки $F^{-1}[S_\beta^\alpha] = S_\alpha^\beta$, а також і $F[S_\beta^\alpha] = S_\alpha^\beta$, бо кожний простір типу S разом з функцією $\varphi(x)$ містить і функцію $\varphi(-x)$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ означимо за допомогою співвідношення $< F[f], \varphi >=< f, F[\varphi] >$, $\varphi \in S_\beta^\alpha$.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f*\varphi \in S_\alpha^\beta$, $\forall \varphi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f*\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається згортувачем у просторі S_α^β. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$ - згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f*\varphi] = F[f]\cdot F[\varphi]$.

Візьмемо функцію a з класу P_ω^μ. Із умови 1) випливає, що функція a є мультиплікатором у просторі $S_{1/\omega}^1$. Оскільки $1-\mu/\omega \geq 1$ ($\mu \leq 0$), то a - мультиплікатор і у просторі $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$. Зокрема, функція $a_\omega(x) = (1+x^2)^{\omega/2}$, $x \in \mathbb{R}$, належить до класу P_ω^0 і є мультиплікатором у просторі $S_{1/\omega}^1$ (а також у просторі $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}, \mu < 0$), $e^{-a_\omega} \in S_{1/\omega}^1$.

Із властивостей функції $a \in P_\omega^\mu$ випливає, що в просторі $S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}$ визначений, є лінійним і неперервним оператор A, побудований за функцією a як за символом за правилом: $A\varphi = F^{-1}[aF[\varphi]]$, $\varphi \in S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}$. Якщо $a = a_\omega$, то, як відомо [5, с. 395], оператор $A \equiv A_\omega$ представляє собою конструктивну реалізацію оператора $(I-D_x^2)^{\omega/2}$, $\omega \neq 2,4,6,...$: $A_\omega\varphi = (I-D_x^2)^{\omega/2}\varphi$, який (див. [5]) називається оператором Бесселя дробового диференціювання.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0, \tag{1}$$
$$(t,x) \in (0,T]\times\mathbb{R} \equiv \Omega,$$

де A - оператор, побудований раніше, розглянемо нелокальну (m-точкову) за часом задачу: знайти розв'язок $u \in C^1((0,T], S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega})$ рівняння (1), який задовольняє умову:

$$\mu u(t,\cdot)\mid_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)\mid_{t=t_1} - ... - \tag{2}$$
$$-\mu_m u(t,\cdot)\mid_{t=t_m} = \varphi,$$

де $\varphi \in S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1,...,t_m\} \subset (0,T]$ - фіксовані числа, $\mu > \mu_0 \cdot 2^m$, $\mu_0 = \max\{\mu_1,...,\mu_m\}$, $0 < t_1 < ... < t_m \leq T$.

Скориставшись методом перетворення Фур'є знайдемо, що розв'язок задачі (1), (2) має вигляд:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = \Gamma(t,x)*\varphi(x),$$

$(t,x) \in \Omega$, де $\Gamma(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$,

$$Q(t,\sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}\times$$
$$\times\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\},$$
$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Тоді $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$. Із обмежень, накладених на символ a та теореми 4 з [4, с. 264] випливає, що $Q_1(t,\sigma) \in S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$, $\mu \leq 0$, при кожному $t > 0$. Проаналізувавши доведення вказаної теореми (див. [4, с. 264-265]), безпосередньо переконуємося в тому, що для функції $Q_1(t,\sigma)$ та її похідних (за змінною σ) справджуються оцінки:

$$|D_\sigma^k Q_1(t,\sigma)| \leq cA^k t^{\alpha k} k^{k(1-\mu/\omega)} e^{-c_0 t|\sigma|^\omega}, \tag{3}$$
$$k \in \mathbb{Z}_+,\ (t,\sigma) \in \Omega,$$

де сталі $c, A, c_0 > 0$ не залежать від t,

$$\alpha = \begin{cases} \mu/\omega, & \text{якщо } \mu < 0, \\ 0, & \text{якщо } \mu = 0. \end{cases}$$

Оскільки

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} =$$

$$= \mu \left(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} \right),$$

причому

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} \le \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k < 1,$$

то, скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{-t_k a(\sigma)} \right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \Bigg(\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} \times$$

$$\times (\mu_1 e^{-t_1 a(\sigma)})^{r_1} \ldots (\mu_m e^{-t_m a(\sigma)})^{r_m} \Bigg) = \qquad (4)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} \times$$

$$\times \mu_1^{r_1} \, \ldots \, \mu_m^{r_m} \; Q_1(\lambda, \sigma),$$

де $\lambda := t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m$, $Q_1(\lambda, \sigma) = e^{-\lambda a(\sigma)}$. Звідси та з (4) випливають нерівності

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le c A^s s^{s(1-\mu\omega)} \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \times$$

$$\times \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} \; \mu_0^r \lambda^{\alpha s} \cdot e^{-\lambda c_0 |\sigma|^\omega} \le$$

$$\le c A^s t_1^{\alpha s} s^{s(1-\mu/\omega)} \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \mu_0^r \times$$

$$\times \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}, \;\; s \in \mathbb{N}.$$

Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} = m^r \le 2^{rm}.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le c' \tilde{A}^s s^{s(1-\mu/\omega)} \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{\mu}^r =$$

$$= \tilde{c} \tilde{A}^s s^{s(1-\mu/\omega)}, \;\; s \in \mathbb{N}, \qquad (5)$$

$c' = c\mu^{-1}$, $\tilde{\mu} = \mu_0 \mu^{-1} 2^m < 1$, $\tilde{c} = c' \sum\limits_{r=1}^{\infty} \tilde{\mu}^r$.

Урахувавши (3), (5) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| = \left| \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l Q_1(t,\sigma) \cdot D_\sigma^{s-l} Q_2(\sigma) \right| \le$$

$$\le c\tilde{c} \sum_{l=0}^{s} C_s^l A^l t^{\alpha l} l^{l(1-\mu/\omega)} \tilde{A}^{s-l} \times \qquad (6)$$

$$\times (s-l)^{(s-l)(1-\mu/\omega)} e^{-c_0 t |\sigma|^\omega} \le$$

$$\le \tilde{b} \tilde{B}^s (\beta(t))^s s^{s(1-\mu/\omega)} e^{-c_0 t |\sigma|^\omega},$$

$$\tilde{b} = c\tilde{c}, \;\; \tilde{B} = 2\max\{A, \tilde{A}\}, \;\; s \in \mathbb{N},$$

де сталі $\tilde{b}, \tilde{B}, c_0 > 0$ не залежать від t,

$$\beta(t) = \begin{cases} t^\alpha, & \text{якщо } 0 < t \le 1, \\ 1, & \text{якщо } t > 0. \end{cases}$$

Із оцінок (6) випливає, що функція $Q(t,\cdot)$, як функція σ, є елементом простору $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$ (при кожному фіксованому $t > 0$). Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega} = F^{-1}[S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}]$ отримуємо, що $\Gamma(t,\cdot) \in S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}$ при кожному $t \in (0,T]$. Виділимо в оцінках функції Γ та її похідних (за змінною x) залежність від параметра $t \in (0, T^*]$ ($T^* = T$, якщо $T \le 1$, $T^* = 1$, якщо $T \ge 1$). Для цього скористаємося співвідношенням

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)}] =$$

$$= i^{k+s} \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma,$$

$$\{k, s\} \subset \mathbb{Z}_+, \;\; \varphi \in S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s \Gamma(t,x) =$$

$$= (2\pi)^{-1} i^{k+s}(-1)^s \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma.$$

У книзі [4] доведено твердження: якщо функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ задовольняє нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le cA^k B^n a_k b_n, \;\; \{k,n\} \in \mathbb{Z}_+, \;\; x \in \mathbb{R},$$

де числа a_k та b_n такі, що

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \ge ck^{1-\chi}, \;\; \frac{b_n}{b_{n-1}} \ge cn^{1-\lambda}, \;\; \chi+\lambda=\theta \le 1,$$

то подвійна послідовність $m_{kn} = a_k b_n$ задовольняє нерівність

$$kn\frac{m_{k-1,n-1}}{m_{kn}} \le \gamma(k+n)^\theta, \;\; \gamma > 0.$$

Для послідовності $a_k = k^{k(1-\mu/\omega)}$ маємо

$$\lambda = \max\left(1-\left(1-\frac{\mu}{\omega}\right)\right) = \max\left(\frac{\mu}{\omega},0\right) = 0,$$

тому $\chi = \theta = 1$ для послідовності $b_n = n^{n/\omega}$. Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (6) похідних функцій $Q(t,\sigma)$ та останню нерівність знайдемо, що

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \left|\sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\right| \le$$

$$\le |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| +$$

$$+\frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \ldots \le$$

$$\le cA^sB^k k^{k(1-\mu/\omega)} t^{\mu k/\omega} s^{s/\omega} t^{-s/\omega} e^{\frac{-c_0'}{2}t|\sigma|^\omega} \times$$

$$\times\left(1+\frac{ks}{(A/t^{1/\omega})B}\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}} + \right.$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{ks}{(A/t^{1/\omega})^2B^2}\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}} \times$$

$$\left.\times(k-1)(s-1)\frac{m_{s-2,k-2}}{m_{s-1,k-1}} + \ldots\right) \le$$

$$\le cA^sB^k t^{\mu k/\omega} t^{-s/\omega} k^{k(1-\mu/\omega)} s^{s/\omega} e^{\frac{-c_0'}{2}t|\sigma|^\omega} \times$$

$$\times\left(1+\frac{\gamma}{(A/t^{1/\omega})B}(k+s) + \right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\frac{\gamma^2}{(A/t^{1/\omega})^2B^2}(k+s)^2 + \ldots\right) \le$$

$$\le cA^sB^k t^{\mu k/\omega} t^{-s/\omega} k^{k(1-\mu/\omega)} s^{s/\omega} \times$$

$$\times e^{\frac{\gamma t^{1/\omega}}{AB}(k+s)} e^{\frac{-c_0'}{2}t|\sigma|^\omega} \le$$

$$\le cA_1^s B_1^k t^{\mu k/\omega} t^{-s/\omega} k^{k(1-\mu/\omega)} s^{s/\omega} e^{-\bar{c}_0 t|\sigma|^\omega},$$

$$A_1 = Ae^{\frac{\gamma T^{1/\omega}}{AB}}, \;\; B_1 = Be^{\frac{\gamma T^{1/\omega}}{AB}}, \;\; \bar{c}_0 = \frac{c_0'}{2}.$$

Отже,

$$|x^k D_x^s \Gamma(t,x)| \le c_1 A_1^s B_1^s t^{-(s+1)/\omega} t^{\mu k/\omega} k^{k(1-\mu/\omega)} s^{s/\omega},$$

$$\{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+, \;\; t \in (0,T^*], \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$|D_x^s \Gamma(t,x)| \le c_1 B_1^s s^{s/\omega} t^{-(s+1)/\omega} \inf_k \frac{A_1^k k^{k(1-\mu/\omega)}}{(t^{-\mu/\omega}|x|)^k} \le$$

$$\le \tilde{c} B_1^s s^{s/\omega} t^{-(s+1)/\omega} \exp\{-a_0(t^{-\mu/\omega}|x|)^{1/(1-\mu/\omega)}\},$$

$$s \in \mathbb{Z}_+, \;\; t \in (0,T^*].$$

Таким чином, правильним є наступне твердження.

Лема 1. *Для функції $\Gamma(t,x)$, $t \in (0,T^*]$, $x \in \mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D_x^s \Gamma(t,x)| \le \tilde{c} B_1^s s^{s/\omega} t^{-(s+1)/\omega} \times$$

$$\times \exp\{-a_0 t^{-\mu/(\omega-\mu)} |x|^{1/(1-\mu/\omega)}\},$$

$$\mu \le 0, \;\; s \in \mathbb{Z}_+,$$

сталі $a_0, \tilde{c}, B_1 > 0$ не залежать від t.

Лема 2. *Функція $\Gamma(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (як прямого, так і оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення леми досить показати, що функція $F[\Gamma(t,x)] = Q(t,\sigma)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F[S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}] = S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\sigma) -$$

$$-Q(t,\sigma)] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma),\ \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що
1) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D^s_\sigma(-a(\sigma)Q(t,\sigma)),\ m \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;
2) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \le \bar{c}\bar{B}^s s^{s(1-\mu/\omega)} \exp\{-\bar{a}|\sigma|^\omega\},\ s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}, \bar{a}, \bar{B} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma), (t,\sigma) \in \Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому, внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости,

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -a(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma),$$

$$0 < \theta < 1,\ \ t+\theta\Delta t \le T.$$

Отже,

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\sum_{l=o}^{s} C^l_s D^l_\sigma a(\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{7}$$

і

$$D^s_\sigma\left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right) =$$

$$= -\sum_{l=o}^{s} C^l_s D^l_\sigma a(\sigma)[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) -$$

$$-D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) =$$

$$= D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t,\ \ 0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (6) випливає, що

$$D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0,\ \ \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D^s_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right)$ при $\Delta t \to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Врахувавши (7), оцінки, які задовольняють похідні функцій $a(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$, знайдемо, що

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \tilde{b}c_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C^l_s B^l l^{l(1-\mu/\omega)} \tilde{B}^{s-l} \times$$

$$\times (s-l)^{(s-l)(1-\mu/\omega)} \times$$

$$\times (t+\theta\Delta t)^{\mu(s-l)/\omega} e^{-c_0(t+\theta\Delta t)|\sigma|^\omega} e^{\varepsilon|\sigma|^\omega}$$

(тут $\varepsilon > 0$ - довільно фіксований параметр). Візьмемо $\varepsilon = t/2$ і врахуємо, що $t+\theta\Delta t \le T$. Тоді

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar{c}\bar{B}^s s^{s(1-\mu/\omega)} e^{-\bar{a}|\sigma|^\omega},$$

$\bar{c} = \tilde{b}c_\varepsilon,\ \ \bar{B} = 2\max\{B, \tilde{B}\},\ \ \bar{a} = c_0 t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt. Лема доведена.

Наслідок 1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * \Gamma(t,\cdot)) = f * \frac{\partial \Gamma(t,\cdot)}{\partial t},$$

$$\forall f \in (S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})',\ \ t \in (0,T].$$

Лема 3. *У просторі $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} \Gamma(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} \Gamma(t,\cdot) = \delta. \tag{8}$$

(тут δ - дельта-функція Дірака)

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції $\Gamma(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями у просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, співвідношення (8) змінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t \to +0} F[\Gamma(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} F[\Gamma(t,\cdot)] = F[\delta] \tag{9}$$

у просторі $(S^{1-\mu/\omega}_{1/\omega})'$. Урахувавши зображення функції Γ, (9) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t \to +0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} Q(t,\cdot) = 1. \tag{10}$$

Для доведення (10) візьмемо довільну функцію $\varphi \in S^{1-\mu/\omega}_{1/\omega}$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега знайдемо, що

$$\mu \lim_{t \to +0} < Q(t,\cdot), \varphi > -$$

$$-\sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l} < Q(t,\cdot),\varphi >=$$

$$=\mu \lim_{t\to +0}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma -$$

$$-\sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\left[\mu Q(0,\sigma)-\sum_{l=1}^{m}\mu_l Q(t_l,\sigma)\right]\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{\mu}{\mu-\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=1}^{m}\mu_l\frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu-\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\right]\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu-\sum\limits_{l=1}^{m}\mu_l Q_1(t_l,\sigma)}{\mu-\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\sigma)d\sigma =< 1,\varphi > .$$

Звідси випливає, що співвідношення (10) виконується у просторі $(S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega})'$, а, отже, правильним є співвідношення (8). Лема доведена.

Символом $(S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega},*)'$ позначатимемо клас узагальнених функцій з $(S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega})'$, які є згортувачами в просторі $S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}$.

Наслідок 2. *Нехай*

$$\omega(t,x)=f*\Gamma(t,x),$$

$$f\in (S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega},*)',\ \ (t,x)\in\Omega.$$

Тоді в просторі $(S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to +0}\omega(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\omega(t,\cdot)=f.$$

Функція Γ є розв'язком рівняння (1). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[Q(t,\sigma)]=F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right].$$

З іншого боку,

$$A\Gamma(t,x)=\underset{\sigma\to x}{F^{-1}}\left[a(\sigma)\underset{x\to\sigma}{F}[\Gamma(t,x)]\right]=$$

$$=F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)]=-F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right].$$

Звідси вже випливає, що функція Γ задовольняє рівняння (1).

Надалі функцію Γ називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової (m - точкової) задачі для рівняння (1) (позначення: ФРБЗ).

2. Коректна розв'язність m - точкової задачі. Властивість локалізації.

З наслідку 2 випливає, що для рівняння (1) m - точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u\in C^1\left((0,T],S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}\right)$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to +0}u(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}u(t,\cdot)=f, \quad (11)$$

$$f\in (S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega},*)',$$

де граничне співвідношення (11) розглядається в просторі $(S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega})'$ (обмеження на параметри $\mu,\mu_1,...,\mu_m,\ t_1,...,t_m$ такі ж, як у випадку задачі (1), (2)).

Теорема 1. *Задача (1), (11) коректно розв'язна. Розв'язок зображається формулою:* $u(t,x)=f*\Gamma(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, *де* Γ *- фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння (1).*

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1). Справді (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(f*\Gamma(t,x))=f*\frac{\partial\Gamma(t,x)}{\partial t},$$

$$Au(t,x)=F^{-1}[a(\sigma)F[f*\Gamma(t,x)](\sigma)](x).$$

Оскільки f - згортувач у просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, то

$$F[f*\Gamma(t,x)](\sigma)=F[f](\sigma)\cdot F[\Gamma(t,x)](\sigma)= \\ =F[f](\sigma)Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$Au(t,x)=F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)F[f](\sigma)](x)= \\ =-F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\right](x)= \\ =-F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}\Gamma\right](t,\sigma)\cdot F[f](\sigma)\right](x)= \\ =-F^{-1}\left[F\left[f*\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right]\right](x)=-f*\frac{\partial\Gamma(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (1). З наслідку 2 випливає, що u задовольняє граничну умову (11) у вказаному сенсі.

Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f\in(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*)'$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (1), (11) має єдиний розв'язок. Для цього, розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t}-A^*v=0,\ \ (t,x)=[0,t_0)\times\mathbb{R}\equiv\Omega',\ \ (12)$$
$$0\le t<t_0\le T,$$
$$v(t,\cdot)|_{t=t_0}=\psi,\ \ \psi\in(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*)' \qquad (13)$$

де $A^*g=F[aF^{-1}[g]]$, $\forall g\in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, A^* - звуження спряженого оператора до оператора A на простір $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\subset(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$. Умову (13) розуміємо в слабкому сенсі.

Із результатів, отриманих в [6, розділ 5] випливає, що задача Коші (12), (13) є розв'язною; при цьому $v(t,\cdot)\in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$ при кожному $t\in[0,t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0}:(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*)'\to S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$ - оператор, який зіставляє функціоналу $\psi\in(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*)'$ розв'язок задачі (12), (13). Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0\le t<t_0\le T$ і володіє властивостями:

$$\forall\psi\in(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*)':\frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt}-A^*Q^t_{t_0}\psi=0,$$

$$\lim_{t\to t_0}Q^t_{t_0}\psi=\psi$$

(границя розглядається в просторі $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задачі (1), (11), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*)'\supset S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$. Доведемо, що задача (1), (11) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*)'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій граничній умові може бути лише функціонал $u(t,x)\equiv 0$ (при кожному $t\in(0,T]$). Застосуємо функціонал u до функції $Q^t_{t_0}\psi\in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, де ψ -довільно фіксований елемент з простору $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\subset(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (1), (12) знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}<u(t,\cdot),Q^t_{t_0}\psi>= \\ =<\frac{\partial u}{\partial t},Q^t_{t_0}\psi>+<u,\frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}>= \\ =-<Au,Q^t_{t_0}\psi>+<u,A^*Q^t_{t_0}\psi>= \\ =-<Au,Q^t_{t_0}\psi>+<Au,Q^t_{t_0}\psi>=0, \\ t\in[0,t_0).$$

Звідси випливає, що $<u(t,\cdot),Q^t_{t_0}\psi>$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}<u(t,\cdot),Q^t_{t_0}\psi>= \\ =<u(t_0,\cdot),\psi>=\mathrm{const}\equiv c$$

у довільній точці $t_0\in(0,T]$. Отже, якщо в (11) $f=0$, то

$$\mu\lim_{t\to+0}<u(t,\cdot),\psi>- \\ -\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}<u(t,\cdot),\psi>= \\ =c\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)=0,$$

тобто $c=0$. Таким чином, $<u(t_0,\cdot),\psi>=0$ для довільного $\psi\in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, тобто $u(t_0,x)$ -

нульовий функціонал з простору $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}, *)'$. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,\cdot) = 0$ для всіх $t \in (0,T]$. Теорема доведена.

Оскільки узагальнена функція f - згортувач у просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, а функція $\Gamma(t,\cdot)$ - ФРБЗ для рівняння (1), є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, то граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = f * \Gamma(t,\cdot) \underset{t\to t_k}{\longrightarrow} f * \Gamma(t_k,\cdot) = u(t_k,\cdot),$$

$$t_k \in (0,T], \ \ k \in \{1,...,m\},$$

справджуються в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$. Звідси, зокрема, дістаємо, що $u(t,\cdot) \to u(t_k,\cdot)$ при $t \to t_k$, $k \in \{1,...,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Вказану збіжність в (11) погіршує перший доданок, оскільки для функції $\Gamma(t,\cdot)$ точка $t=0$ є особливою. Однак, якщо граничну функцію f брати з класу $(S^{\beta}_{1-\mu/\omega})' \subset (S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$, де $\beta > 1$, то можна отримати локальне посилання збіжності згортки $f * \Gamma(t,\cdot)$ при $t \to +0$. Це пояснюється тим, що клас $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$ при $\beta > 1$ містить фінітні функції і в цьому випадку коректним є поняття збіжності узагальненої функції f з гладкою функцією на деякій відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$ (див. п.1). При обґрунтуванні властивості локалізації будемо використовувати наступне допоміжне твердження.

Лема 4. *Якщо $x \neq 0$, то для функції $\Gamma(t,x)$ та її похідних справджуються оцінки*

$$|D^m_x \Gamma(t,x)| \le c\beta_0^q q^{q(1-\mu/\omega)} B^m m^{m/\omega} \times$$

$$\times t^{(q-m-1)/\omega} |x|^{-q}, \ \ t \in (0,1], \ \ m \in \mathbb{Z}_+ \qquad (14)$$

де сталі $c, \beta_0, B > 0$ не залежать від t, $q \in \mathbb{N}$ - довільно фіксоване.

Доведення. Оскільки

$$\Gamma(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma,$$

то покладемо $\sigma = t^{-\gamma} y$, де $\gamma > 0$ - фіксований параметр, конкретне значення якого вкажемо пізніше. Тоді

$$\Gamma(t,x) = (2\pi)^{-1} t^{-\gamma} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t, t^{-\gamma} y) Q_2(t^{-\gamma} y) e^{-it^{-\gamma} xy} dy =$$

$$= (2\pi)^{-1} t^{-\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t, t^{-\gamma} y) e^{-it^{-\gamma} xy} dy. \qquad (15)$$

За умови $x \neq 0$ зінтегруємо q разів частинами інтеграл (15), у результаті знайдемо, що

$$\Gamma(t,x) = i^q (2\pi)^{-1} t^{\gamma(q-1)} x^{-q} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} D^q_y Q(t, t^{-\gamma} y) e^{-it^{-\gamma} xy} dy,$$

$$D^m_x \Gamma(t,x) = (-1)^q (2\pi)^{-1} i^{q+m} t^{\gamma(q-1)-\gamma m} x^{-q} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} y^m D^q_y Q(t, t^{-\gamma} y) e^{-it^{-\gamma} xy} dy, \ \ m \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$|D^m_x \Gamma(t,x)| \le (2\pi)^{-1} t^{\gamma(q-1)-\gamma m} |x|^{-q} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} |y|^m |D^q_y Q(t, t^{-\gamma} y)| dy.$$

Оскільки $Q(t, t^{-\gamma} y) = Q_1(t, t^{-\gamma} y) Q_2(t^{-\gamma} y)$, то, внаслідок формули Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінка $|D^q_y Q|$ зводиться до оцінок функцій $|D^q_y Q_1|$ та $|D^q_y Q_2|$.

Із властивостей функції $a(y)$ випливає, що функція $a(t^{-\gamma} y)$ допускає аналітичне продовження в область

$$\tilde{G}_\mu = \{z = y + i\omega :$$

$$|t^{-\gamma}\omega| \le K(1 + |t^{-\gamma} y|)^\mu, \ \ y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{z = y + i\omega : |\omega| \le K(t^\gamma + |y|)^\mu, \, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mu \le 0.$$

Якщо $t \in (0,1]$, то $t^\gamma + |y| \le 1 + |y|$, $(t^\gamma + |y|)^\mu \ge (1 + |y|)^\mu$, $\mu \le 0$. Отже, функція $a(t^{-\gamma} y)$, $t \in (0,1]$, $y \in \mathbb{R}$, допускає аналітичне продовження і в область

$$G_\mu = \{z = y + i\omega : |\omega| \le K(1 + |y|)^\mu, \ \ y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mu \le 0;$$

при цьому функція $Q_1(t, t^{-\gamma}z) = \exp\{-ta(t^{-\gamma}z)\}$ в області G_μ задовольняє нерівність

$$|Q_1(t, t^{-\gamma}z)| \leq e^{-Lt|t^{-\gamma}y|^\omega}, \ \ t \in (0, 1], \quad (16)$$

де стала $L > 0$ не залежить від t. Урахувавши (16) та доведення теореми 4 з [4, с. 265] знайдемо, що для функції $Q_1(t, t^{-\gamma}y)$ та її похідних (за змінною y) справджуються оцінки:

$$|D_y^q Q_1(t, t^{-\gamma}y)| \leq cB^q q^{q(1-\mu/\omega)} \times$$

$$\times t^{-(\omega\gamma-1)\mu q/\omega} e^{-at^{1-\gamma\omega}|y|^\omega}, \quad (17)$$

$$(t, y) \in \Omega, \ \ q \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі $c, a, B > 0$ не залежать від t.

Оцінимо тепер $|D_y^q Q_2(t^{-\gamma}y)|$, $q \in \mathbb{Z}_+$, скориставшись при цьому співвідношенням (4), з якого випливає, що

$$Q_2(t^{-\gamma}y) = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{-t_k a(t^{-\gamma}y)} \right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+...+r_m=r} \frac{r!}{r_1!...r_m!} \times$$

$$\times \mu_1^{r_1}...\mu_m^{r_m} Q_1(\lambda, t^{-\gamma}y),$$

де $\lambda := t_1 r_1 + ... + t_m r_m$. Повторивши міркування, проведені при оцінюванні функції $|D_y^q Q_1(t, t^{-\gamma}y)|$, $q \in \mathbb{Z}_+$, знайдемо, що

$$|D_y^q Q_1(\lambda, t^{-\gamma}y)| \leq c_1 A^q q^{q(1-\mu/\omega)} \lambda^{\mu q/\omega} t^{-\mu\gamma q},$$

$$(t, y) \in \Omega, \quad (18)$$

де сталі $c_1, A > 0$ не залежать від t.

Далі, врахувавши (18), як і при встановлені оцінок (5) знаходимо, що

$$|D_y^q Q_2(t^{-\gamma}y)| \leq bL_1^q q^{q(1-\mu/\omega)} t^{-\mu\gamma q}, \ \ q \in \mathbb{Z}_+, \quad (19)$$

сталі $b, L_1 > 0$ не залежать від t. Тоді, скориставшись оцінками (17), (19) прийдемо до нерівностей

$$|D_y^q Q(t, t^{-\gamma}y)| = |D_y^q(Q_1(t, t^{-\gamma}y)Q_2(t^{-\gamma}y))| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{q} C_q^k |D_y^k Q_1(t, t^{-\gamma}y)| \cdot |D_y^{q-k} Q_2(t^{-\gamma}y)| \leq$$

$$\leq cb \sum_{k=0}^{q} C_q^k B^k k^{k(1-\mu/\omega)} t^{-(\omega\gamma-1)\mu k/\omega} L_1^{q-k} \times$$

$$\times (q-k)^{(1-\mu/\omega)(q-k)} t^{-\mu\gamma(q-k)} \exp\{-at^{1-\gamma\omega}|y|^\omega\}.$$

Покладемо тепер $\gamma = 1/\omega$. Тоді для $t \in (0, 1]$ справджуються оцінки:

$$|D_y^q Q(t, t^{-1/\omega}y)| \leq \alpha\beta_0^q q^{q(1-\mu/\omega)} e^{-a|y|^\omega}, \quad (20)$$

де $\alpha = cb$, $\beta_0 = 2\max\{B, L_1\}$, сталі $\alpha, \beta_0 > 0$ не залежать від t. Урахувавши (20) знайдемо, що

$$|D_x^m \Gamma(t, x)| \leq \alpha(2\pi)^{-1} \beta^q q^{q(1-\mu/\omega)} t^{(q-m-1)/\omega} \times$$

$$\times |x|^{-q} \int_{\mathbb{R}} |y|^m \exp\{-a|y|^\omega\} dy.$$

Оскільки

$$\int_{\mathbb{R}} |y|^m \exp\{-a|y|^\omega\} dy =$$

$$= 2\omega^{-1} a^{-(m+1)/\omega} \Gamma\left(\frac{m+1}{\omega}\right),$$

то, скориставшись формулою Стірлінга для гамма-функції знайдемо, що

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{\omega}\right) \leq \tilde{c}\tilde{B}^m m^{m/\omega},$$

$\tilde{c} = \tilde{c}(\omega) > 0$, $\tilde{B} = \tilde{B}(\omega) > 0$. Тоді

$$|D_x^m \Gamma(t, x)| \leq c_2 \tilde{\beta}_0^q q^{q(1-\mu/\omega)} \times$$

$$\times \tilde{B}^m m^{m/\omega} t^{(q-m-1)/\omega} |x|^{-q},$$

$$m \in \mathbb{Z}_+, \ \ t \in (0, 1], \ \ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

сталі $c_2, \tilde{\beta}_0, \tilde{B} > 0$ не залежать від t. Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай $f \in (S_{1-\mu/\omega}^\beta)'$, де $\beta \geq 1 + (1-\mu)/\omega$, $u(t, x)$ - розв'язок задачі (1), (11) з граничною функцією f. Якщо $f = 0$ на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$, то $u(t, x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на довільному відрізку $[c, d] \subset (a, b)$.*

Доведення. Нехай $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$. Побудуємо функцію $\varphi \in S_{1-\mu/\omega}^\beta$ з носієм в (a, b) таку, що $\varphi = 1$ на $[a_1, b_1]$ (така функція існує, бо при $\beta > 1$ у просторі

$S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$ є фінітні функції [4]). Оскільки функції $\varphi(\cdot)T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot)$, $(1-\varphi(\cdot))T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot)$ при кожному $t>0$ і $x\in\mathbb{R}$ є елементами простору $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$, то має місце співвідношення

$$u(t,x)=< f,\varphi(\cdot)T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot)>+$$

$$+< f,(1-\varphi(\cdot))T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot)>,\ \ (t,x)\in\Omega.$$

Оскільки узагальнена функція f дорівнює нулеві на (a,b), а $supp(\varphi(\cdot)T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot))\subset(a,b)$, з останнього співвідношення випливає, що

$$u(t,x)=t^{1/\omega}< f,t^{-1/\omega}\gamma(\cdot)T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot)>,$$

$(t,x)\in\Omega$, де $\gamma=1-\varphi$.

Для доведення теореми досить встановити, що сім'я функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{-1/\omega}\gamma(\xi)T_{-x}\check{\Gamma}(t,\xi)$ обмежена в просторі $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$ рівномірно по t (для малих значень t) та $x\in[c,d]$, тобто, що

$$|\xi^k D^m_\xi \Phi_{t,x}(\xi)|\le cA^kB^mk^{k(1-\mu/\omega)}m^{m\beta},$$

$$\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+,\ \ \xi\in\mathbb{R}, \qquad (21)$$

де сталі $c,A,B>0$ не залежать від t,x,ξ, які змінюються вказаним способом. Оскільки $\Phi_{t,x}(\xi)=0$ для $\xi\in[a_1,b_1]$, то оцінку (21) досить довести для $\xi\in\mathbb{R}\backslash[a_1,b_1]$.

Функція φ є елементом простору $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$. Отже,

$$|\xi^k D^m_\xi\varphi(\xi)|\le c_1A_1^kB_1^mk^{k(1-\mu/\omega)}m^{m\beta},$$

$$\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+,\ \ \xi\in\mathbb{R}.$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$|\xi^kD^m_\xi\Phi_{t,x}(\xi)|=$$

$$=t^{-1/\omega}\left|\xi^k\sum_{l=0}^{m}C^l_mD^l_\xi\gamma(\xi)\cdot D^{m-l}_\xi\Gamma(t,x-\xi)\right|\le$$

$$\le\Psi^1_{t,x}(\xi)+\Psi^2_{t,x}(\xi),$$

де

$$\Psi^1_{t,x}(\xi):=t^{-1/\omega}\sum_{l=0}^{m}C^l_m|\xi^kD^l_\xi\varphi(\xi)|\times$$

$$\times|D^{m-l}_\xi\Gamma(t,x-\xi)|,$$

$$\Psi^2_{t,x}(\xi):=t^{-1/\omega}|\xi^kD^m_\xi\Gamma(t,x-\xi)|.$$

Оцінимо $\Psi^1_{t,x}(\xi)$. Для цього скористаємося нерівностями (14): при оцінці функції $|D^{m-l}_\xi\Gamma(t,x-\xi)|$ в (14) візьмемо $q=m-l+2$. Врахуємо також те, що $|x-\xi|\ge a_0>0$, де $a_0=\min\{|a_1-c|,|b-b_1|\}$. Отже,

$$\Psi^1_{t,x}(\xi)\le cc_1t^{-1/\omega}A_1^{k_1}k^{k(1-\mu/\omega)}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{m}C^l_mB^l_1l^{l\beta}\beta^q_0q^{q(1-\mu/\omega)}\times$$

$$\times B^{m-l}(m-l)^{(m-l)/\omega}t^{(q-(m-l)-1)/\omega}|x-\xi|^{-q}.$$

Оскільки

$$t^{(q-(m-l)-1)/\omega}=t^{1/\omega},\ \ q=m-l+2,$$

$$t\in(0,1],\ \ 0\le l\le m,$$

$$q^{q(1-\mu/\omega)}=(m-l+2)^{(m-l+2)(1-\mu/\omega)}\le$$

$$\le bM^{m-l}(m-l)^{(m-l)(1-\mu/\omega)},$$

$$\beta^q_0=\beta^2_0\cdot\beta^{m-l}_0,\ \ |x-\xi|^{-q}\le a_0^{-q}=\left(\frac{1}{a_0}\right)^{m-l+2},$$

де b,M - додатні сталі, то

$$\Psi^1_{t,x}(\xi)\le\tilde{c}A_1^kk^{k(1-\mu/\omega)}M_1^m\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{m}C^l_ml^{l\beta}(m-l)^{(m-l)/\omega}(m-l)^{(m-l)(1-\mu/\omega)}=$$

$$=\tilde{c}A^k_1\tilde{B}^m_1k^{k(1-\mu/\omega)}m^{m\beta}, \qquad (22)$$

$$\beta\ge1+\frac{1-\mu}{\omega},$$

де сталі $\tilde{c},A_1,\tilde{B}_1>0$ не залежать від t,x,ξ, які змінюються вказаним способом.

Для оцінки $\Psi^2_{t,x}(\xi)$ скоритстаємось тим, що виконується наступна умова:

$$\exists L_0>0\ \ \forall x\in[c,d]\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}\backslash[a_1,b_1]:$$

$$[\xi]/|x-\xi|\le L_0.$$

Поклавши в (14) $q=m+2+k$ знайдемо, що

$$\Psi^2_{t,x}(\xi)=t^{-1/\omega}|\xi^kD^m_\xi\Gamma(t,x-\xi)|\le$$

$$\le ct^{-1/\omega}|x-\xi|^{-q}|\xi|^k\beta^q_0q^{q(1-\mu/\omega)}\times$$

$$\times B^mm^{m/\omega}t^{(q-m-1)/\omega},\ \ |x-\xi|\ge a_0>0,$$

при цьому

$$t^{-1/\omega}t^{(q-m-1)/\omega}=t^{-1/\omega}t^{1/\omega}t^{k/\omega}\leq 1,$$

$$t\in(0,1],\ \ k\in\mathbb{Z}_+,$$

$$q^{q(1-\mu/\omega)}=(m+2+k)^{(m+2+k)(1-\mu/\omega)}\leq$$
$$\leq \bar{c}\bar{A}^k\bar{B}^m k^{k(1-\mu/\omega)}m^{m(1-\mu/\omega)},$$

де $\bar{c},\bar{A},\bar{B}$ - додатні сталі,

$$|\xi|^k|x-\xi|^{-q}=|\xi|^k|x-\xi|^{-(m+2+k)}\leq\alpha_0L_0^ka_1^m,$$

$$\alpha_0=a_0^{-2},\ \ a_1=a_0^{-1},$$

$$\beta^q=\beta^{m+2+k}=\beta^2\beta^m\beta^k,\ \ \{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\Psi^2_{t,x}(\xi)\leq c_2A_2^kB_2^mk^{k(1-\mu/\omega)}m^{m/\omega}m^{m(1-\mu/\omega)}\leq$$
$$\leq c_2A_2^kB_2^mk^{k(1-\mu/\omega)}m^{m(1+(1-\mu)/\omega)},\qquad(23)$$

де сталі $c_2,A_2,B_2>0$ не залежать від t,x,ξ, які змінюються вказаним способом. З нерівностей (22), (23) випливає нерівність (21).

Теорема доведена.

Наслідок 3. *Нехай $f\in(S^{\beta}_{1-\mu/\omega})'$, де $\beta\geq 1+(1-\mu)/\omega$, $u(t,x)$ - розв'язок задачі (1), (11) з граничною функцією f. Якщо $f=0$ на інтервалі $(a,b)\subset\mathbb{R}$, то граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,x)-\mu_1\lim_{t\to t_1}u(t,x)-...-$$
$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}u(t,x)=0$$

справджується рівномірно відносно x на довільному відрізку $[c,d]\subset(a,b)$.

Лема 5. *Якщо функція-символ a задовольняє умову $a(0)=0$, то $\Gamma(t,\cdot)\to(\mu-\mu_0)^{-1}\delta$ при $t\to+0$ в просторі $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$ (тут $\tilde{\mu}_0=\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k$).*

Доведення. Якщо $a(0)=0$, то справджується рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\Gamma(t,x)dx=(\mu-\tilde{\mu_0})^{-1},\ \ t\in(0,T].$$

Тоді для довільної основної функції $\varphi\in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$

$$\left|<\Gamma(t,\cdot),\varphi>-\frac{<\delta,\varphi>}{\mu-\tilde{\mu_0}}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\Gamma(t,x)\varphi(x)dx-\frac{\varphi(0)}{\mu-\mu_0}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\Gamma(t,x)\varphi(x)dx-\int\limits_{\mathbb{R}}\Gamma(t,x)\varphi(0)dx\right|\leq$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}}|\Gamma(t,x)|\cdot|\varphi(x)-\varphi(0)|dx\equiv I(t).$$

Для доведення твердження досить показати, що

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists t_0=t_0(\varepsilon)>0$$

$$\forall t:0<t<t_0\Rightarrow I(t)<\varepsilon$$

Застосувавши формулу про скінченні прирости знайдемо, що $|\varphi(x)-\varphi(0)|\leq M|x|$, де $M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|$. Візьмемо ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0=\varepsilon$, $\delta_0=t_0^{1/(2\omega)}$. Тоді $|\varphi(x)-\varphi(0)|<M\varepsilon^{1/(2\omega)}$, якщо лише $|x|<t_0^{1/(2\omega)}$. Отже,

$$I(t)<\varepsilon^{1/(2\omega)}\int\limits_{|x|<\delta_0}|\Gamma(t,x)|dx+$$

$$+\int\limits_{|x|\geq\delta_0}|\Gamma(t,x)||\varphi(x)-\varphi(0)|dx\equiv$$

$$\equiv\varepsilon^{1/(2\omega)}I_1(t)+I_2(t).$$

Оцінимо $I_1(t)$. Легко бачити, що

$$I_1(t)\leq\int\limits_{\mathbb{R}}|\Gamma(t,x)|dx=$$

$$=t^{1/\omega}\int\limits_{\mathbb{R}}|\Gamma(t,t^{1/\omega}y)|dy=$$

$$=t^{1/\omega}\int\limits_{|y|<1}|\Gamma(t,t^{1/\omega}y)|dy+$$

$$+t^{1/\omega}\int\limits_{|y|\geq1}|\Gamma(t,t^{1/\omega}y)|dy\equiv I_1^1(t)+I_1^2(t).$$

Для функції $\Gamma(t,t^{1/\omega}y)$ маємо наступне зображення:

$$\Gamma(t,t^{1/\omega}y)=$$

$$= (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ta(\sigma)}Q_2(\sigma)e^{-it^{1/\omega}y\sigma} \overset{t^{1/\omega}\sigma=\eta}{=}$$

$$= (2\pi)^{-1}t^{-1/\omega}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ta(t^{-1/\omega}\eta)}Q_2(t^{-1/\omega}\eta)e^{-iy\eta}d\eta.$$

Оскільки

$$Q_2(t^{-1/\omega}\eta) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k e^{-t_k a(t^{-1/\omega}\eta)}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-1}, \;\; t>0, \;\; \eta\in\mathbb{R},$$

то

$$|\Gamma(t,t^{1/\omega}y)| \leq c_0 t^{-1/\omega}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-ta(t^{-1/\omega}\eta)\}d\eta \leq$$

$$\leq c_0 t^{-1/\omega}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-b_0|\eta|^{\omega}\}d\eta = c_1 t^{-1/\omega},$$

де $c_0 = (2\pi)^{-1}(\mu-\tilde{\mu}_0)^{-1}$. Отже, $I_1^1(t) \leq c_1$, стала $c_1>0$ не залежить від t.

Для того, щоб здійснити оцінку інтеграла $I_1^2(t)$, скористаємося нерівностями (14), де покладемо $m=0$, $q=2$. Тоді (14) стосовно функції $\Gamma(t,t^{1/\omega}y)$ набуває вигляду:

$$|\Gamma(t,t^{1/\omega}y)| \leq c\tilde{\beta}_0^2 t^{1/\omega}|t^{1/\omega}y|^{-2} =$$

$$= \tilde{\beta}t^{-1/\omega}|y|^{-2}, \;\; y\neq 0, \;\; t>0.$$

Звідси дістаємо, що

$$I_1^2(t) \leq \tilde{\beta}\int\limits_{|y|\geq 1} y^{-2}dy = \beta'.$$

Таким чином, $I_1(t) \leq d_0$, де стала $d_0>0$ не залежить від t.

Оцінимо $I_2(t)$. Передусім зазначимо, що $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leq M_1$, де $M_1 = 2\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$. Тоді

$$I_2(t) \leq M_1\int\limits_{|x|\geq t^{1/(2\omega)}} |\Gamma(t,x)|dx.$$

Знову скориставшись нерівністю (14), де $m=0$, $q=2$, знайдемо, що

$$I_2(t) \leq 2\tilde{\beta}t^{1/\omega}\int\limits_{t_0^{1/(2\omega)}}^{+\infty} x^{-2}dx = \beta' t^{1/\omega}t_0^{-1/(2\omega)} <$$

$$< \beta' t_0^{1/(2\omega)} = \beta'\varepsilon^{1/(2\omega)}.$$

для всіх $t<t_0$. Урахувавши отримані для $I_1(t)$, $I_2(t)$ оцінки знайдемо, що

$$\forall\varepsilon\in(0,T) \;\; \exists t_0=\varepsilon$$

$$\forall t: 0<t<t_0 \Rightarrow I(t) < \text{const}\cdot\varepsilon^{1/(2\omega)},$$

що й потрібно було довести.

Якщо $\varepsilon \geq T$, то за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільно фіксоване число з проміжку $(0,T)$.

Лема доведена.

Надалі вважатимемо, що оператор A в рівнянні (1) побудований за функцією a, яка задовольняє умову $a(0)=0$.

Символом M_s позначатимемо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$, $\beta \geq 1+(1-\mu)/\omega$.

Теорема 3 (властивість локалізації). *Нехай $f\in(S^{\beta}_{1-\mu/\omega})'$, де $\beta\geq 1+(1-\mu)/\omega$, $u(t,x)$ - розв'язок задачі (1), (11) з граничною функцією f. Якщо узагальнена функція f збігається на інтервалі $(a,b)\subset\mathbb{R}$ з функцією $g\in M_s$, то на довільному проміжку $[c,d]\subset(a,b)$ граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,x) - \mu_1\lim_{t\to t_1}u(t,x) - ... -$$

$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}u(t,x) = g(x)$$

виконується рівномірно відносно x.

Доведення. Нехай $[c,d]\subset[a_1,b_1]\subset(a,b)$, φ - основна функція, побудована при доведенні теореми 2. Оскільки $\varphi(f-g)=0$ на (a,b), то $\varphi(f-g)=0$ на $[c,d]$, $(1-\varphi)f=0$ на $[a_1,b_1]$ і за доведеним у теоремі 2 граничні співвідношення

$$\lim_{t\to+0} <\varphi(f-g), T_{-x}\check{\Gamma}(t,\xi)>=0,$$

$$\lim_{t\to+0} <(1-\varphi)f, T_{-x}\check{\Gamma}(t,\xi)>=0 \qquad (24)$$

справджуються рівномірно відносно $x\in[c,d]$.

Внаслідок властивості неперервності $\Gamma(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, граничні співвідношення

$$\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k} <\varphi(f-g), T_{-x}\check{\Gamma}(t,\xi)>=0, \;\; (25)$$

$$\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} < (1-\varphi)f, T_{-x}\check{\Gamma}(t,\xi) >= 0, \quad (26)$$

також справджуються рівномірно відносно $x \in [c,d]$. Крім того,

$$u(t,x) =< f, T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot) >=$$
$$=< \varphi(f-g), T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot) > +$$
$$+ < (1-\varphi)f, T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot) > +$$
$$+ < \varphi g, T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot) >,$$

причому

$$< \varphi g, T_{-x}\check{\Gamma}(t,\cdot) >= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x-\xi)\varphi(\xi)g(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,\xi)\varphi(x-\xi)g(x-\xi)d\xi \equiv I(t,x).$$

Урахувавши співвідношення (24)-(26), лему 5 та теорему 1 робимо висновок, що для доведення твердження досить встановити, що $I(t,x) \to (\mu-\tilde{\mu}_0)^{-1}\varphi(x)g(x)$ при $t \to +0$ рівномірно відносно $x \in [c,d]$, оскільки граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} I(t,x) = \frac{\tilde{\mu_0}}{\mu-\tilde{\mu_0}}(\varphi g)(x)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [c,d]$. Це випливає з того, що $I(t,x)$ подається у вигляді згортки $\Gamma(t,x) * (\varphi g)(x)$, при цьому граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} \Gamma(t,x) = \sum_{k=1}^{m}\mu_k \Gamma(t_k,x)$$

виконується в просторі $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$ (зокрема, рівномірно на відрізку [c,d]), а φg - фінітна функція з простору $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$, яку можна розуміти як фінітний функціонал (згортувач у просторі $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$).

Доведення граничного співвідношення

$$I(t,\cdot) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} (\mu-\tilde{\mu}_0)^{-1}\varphi(\cdot)g(\cdot), \quad t \to +0,$$

яке здійснюємо за схемою, використаною при доведенні леми 5, зводиться до оцінки інтегралів вигляду

$$\int_{|\xi|<\delta} \Psi(t,\xi)d\xi, \quad \int_{|\xi|\geq\delta} \Psi(t,\xi)d\xi,$$

де $\Psi(t,\xi) = |\Gamma(t,\xi)| \cdot |(\varphi g)(x-\xi) - (\varphi g)(x)|$, $\delta > 0$ шукаємо за довільно заданим $\varepsilon > 0$ так, що $|(\varphi g)(x-\xi) - (\varphi g)(x)| < \varepsilon$, якщо лише $|\xi| = |(x-\xi)-x| < \delta$. При оцінці вказаних інтегралів використовуємо нерівність $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma(t,\xi)|d\xi \leq d_0$, де стала $d_0 > 0$ не залежить від t (див. дов. леми 5), а також те, що

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}, x\in[c,d]} |(\varphi g)(x-\xi) - (\varphi g)(x)| < \infty.$$

Зазначимо, що основні результати, наведені в даній роботі, анонсовані в [7].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени"и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – **Т.31**, N1. – С. 61-86.

2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

3. *Майков А.Р., Поезд Ф.Д., Якунин С.А.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – **Т.30**, N8. – С. 1267-1271.

4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.:Физматгиз, 1958. – 307 с.

5. *Самко Г.С., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

6. *Ленюк О.М.* Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Чернівці, 2008. – 142 с.

7. *Городецький В.В., Широковських А.О.* Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Доповіді НАН України. – 2012. – N7. – С. 14-18.