УДК 517.93

©2013 р. І.М. Грод, В.Л. Кулик

Тернопільський національний педагогічний університет ім.В.Гнатюка, Тернопіль
Сілезький технічний університет, м. Глівіце, Польща

РЕГУЛЯРНІСТЬ МАТРИЧНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вивчається питання існування обмежених інваріантних многовидів для деяких лінійних розширень динамічних систем.

We study the existence of bounded invariant manifolds for some linear extensions of dynamical systems.

Одним із важливих питань в якісній теорії диференціальних рівнянь є знаходження умов збереження інваріантних многовидів при збуреннях [1]. Ця задача тісно зв'язана з властивостями певного виду систем лінеаризованих по частині змінних. Такі системи диференціальних рівнянь в теперішній час прийнято називати лінійним розширенням динамічної системи. Одним із завдань для таких систем є вивчення питання існування обмежених інваріантних многовидів. Дослідженню цього питання присвячено багато робіт, зокрема $[1-6]$. Важливим кроком у розвитку теорії збурення інваріантних многовидів динамічних систем стала робота А.М.Самойленка, де вводиться поняття функції Гріна задачі про інваріантні тори [3]. Дана стаття є продовження досліджень у даному напрямку.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dY}{dt} = A\,(t)\,Y - Y B\,(t) + H\,(t)\,, \qquad (1)$$

де $Y = Y\,(t)$ - невідома прямокутна матриця, $A\,(t)$- n-вимірна квадратна матриця, елементами якої є дійсні скалярні функції $a_{ij}\,(t)$ неперервні і обмежені на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Коротко будемо позначати $A\,(t) \in \mathbf{C}^0\,(\mathbb{R})$, де $\mathbf{C}^0\,(\mathbb{R})$- простір дійсних функцій (скалярних, матричних, або векторних) неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$. Також $B\,(t) \in \mathbf{C}^0\,(\mathbb{R})$ є квадратною p-вимірною матрицею, а матриця $H\,(t)$ є прямокутною матрицею розмірів таких же як і матриця Y, тобто складається із n рядків і p стовпчиків, $H\,(t) \in \mathbf{C}^0\,(\mathbb{R})$.

Основна наша задача полягає в тому, щоб знайти достатні умови на матриці $A\,(t)\,, B\,(t)$, при яких рівняння (1) для кожної фіксованої матриці $H\,(t) \in \mathbf{C}^0\,(\mathbb{R})$ має обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок $Y = Y\,(t)$.

Позначимо через $\Omega^t_\tau\,(A)\,, \Omega^t_\tau\,(B)$ нормовані фундаментальні матриці розв'язків відповідно лінійних систем

$$\begin{array}{l} \dot{y} = A\,(t)\,y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{z} = B\,(t)\,z, \quad z \in \mathbb{R}^p, \end{array} \qquad (2)$$

$\Omega^t_\tau\,(A)\,|_{t=\tau} = I_n$, $\Omega^t_\tau\,(B)\,|_{t=\tau} = I_p$, I_n, I_p– одиничні матриці.

Зауважимо також , що ми норму $n \times n$ мірної матриці A будемо розуміти як операторну норму $\|A\| = \max\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай одночасно для двох матрицантів* $\Omega^t_\tau\,(A)\,, \Omega^t_\tau\,(B)$ *виконується оцінка*

$$\|\Omega^t_\tau\,(A)\| \cdot \|\Omega^\tau_t\,(B)\| \leq K \exp\left\{\gamma\,(t-\tau)\right\}, \quad t \leq \tau, \qquad (3)$$

з додатними сталими K, γ *незалежними від* $t, \tau \in \mathbb{R}$, *тоді рівняння* (1) *при кожній фіксованій матриці* $H\,(t) \in \mathbf{C}^0\,(\mathbb{R})$ *має єдиний обмежений на* $\mathbb{R}$ *розв'язок і його можна подати в наступному вигляді:*

$$Y = \bar{Y}\,(t) = -\int\limits_t^{+\infty} \Omega^t_\tau\,(A)\,H\,(\tau)\,\Omega^\tau_t\,(B)\,d\tau. \qquad (4)$$

Доведення. Запишемо загальний розв'язок рівняння (1)

$$Y(t) = \Omega_0^t(A)\, C\Omega_t^0(B) + \int_0^t \Omega_\tau^t(A)\, H(\tau)\, \Omega_t^\tau(B)\, d\tau, \tag{5}$$

де C - довільна стала прямокутна матриця. Припустимо, що цю сталу матрицю можна вибрати такою $C = \bar{C}$, що відповідний розв'язок

$$\bar{Y}(t) = \Omega_0^t(A)\, \bar{C}\Omega_t^0(B) + \int_0^t \Omega_\tau^t(A)\, H(\tau)\, \Omega_t^\tau(B)\, d\tau \tag{6}$$

буде обмеженим на $\mathbb{R}$. Тоді, враховуючи добре відому властивість матрицантів $\Omega_\tau^t(A) \equiv \Omega_0^t(A) \cdot \Omega_\tau^0(A)$, рівність (6) запишемо у вигляді

$$\Omega_t^0(A)\, \bar{Y}(t)\, \Omega_0^t(B) = \bar{C} + \int_0^t \Omega_\tau^0(A)\, H(\tau)\, \Omega_0^\tau(B)\, d\tau \tag{7}$$

і перейдемо до границі при $t \to +\infty$, отримуємо

$$\bar{C} = -\int_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(A)\, H(\tau)\, \Omega_0^\tau(B)\, d\tau. \tag{8}$$

Таким чином, якщо існує обмежений розв'язок $Y = \bar{Y}(t)$ рівняння (1), то початкова матриця $Y(t)|_{t=0} = \bar{C}$ записується рівністю (8). Підставляючи інтегральний вигляд постійної матриці (8) в загальний розв'язок (6), приходимо до рівності (4). Тепер переконаємося, що рівність (4) визначає єдиний, обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок рівняння (1). Обмеженість розв'язку (4) випливає з оцінки (3) і наступних нерівностей:

$$\left\|\bar{Y}(t)\right\| \le \int_t^{+\infty} \left\|\Omega_\tau^t(A)\right\| \cdot \left\|H(\tau)\right\| \cdot \left\|\Omega_t^\tau(B)\right\| d\tau \le$$

$$\le K \sup_{t\in\mathbb{R}} \|H(t)\| \int_t^{+\infty} \exp\{\gamma(t-\tau)\}\, d\tau =$$

$$= \frac{K}{\gamma} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|H(t)\|.$$

А в тому, що такий розв'язкок єдиний для рівняння (1), переконаємося, показавши, що відповідне однорідне рівняння

$$\frac{dY}{dt} = A(t)\, Y - YB(t) \tag{9}$$

не має нетривіальних обмежених розв'язків. Запишемо загальний розв'язок цього рівняння

$$Y(t) = \Omega_0^t(A)\, C\Omega_t^0(B) \tag{10}$$

і припустимо, що при деякій сталій матриці $C = \tilde{C}$ відповідний розв'язок

$$\tilde{Y}(t) = \Omega_0^t(A)\, \tilde{C}\Omega_t^0(B) \tag{11}$$

є обмеженим на $\mathbb{R}$. Тоді з останньої рівності маємо

$$\Omega_t^0(A)\, \tilde{Y}(t)\, \Omega_0^t(B) = \tilde{C}$$

і на підставі (3), записуємо нерівності

$$\left\|\tilde{C}\right\| \le \left\|\Omega_t^0(A)\right\| \cdot \left\|\tilde{Y}(t)\right\| \cdot \left\|\Omega_0^t(B)\right\| \le$$

$$\le \left\|\tilde{Y}(t)\right\| \cdot K\exp\{-\gamma t\} \;\;,\;\; t \ge 0\;.$$

Звідси, перейшовши до границі при $t \to +\infty$, отримуємо, що $\left\|\tilde{C}\right\| = 0$. Отже, розв'язок (10) рівняння (9) буде обмеженим на $\mathbb{R}$ тільки у випадку $\tilde{C} = 0$. Таким чином, розв'язок (4) є єдиним обмеженим розв'язком для неоднорідного рівняння (1). На цьому і завершується доведення теореми 1.

Зауваження 1. *У наведеній вище теоремі оцінку* (3) *можна замінити наступною*

$$\left\|\Omega_\tau^t(A)\right\| \cdot \left\|\Omega_t^\tau(B)\right\| \le K\exp\{-\gamma(t-\tau)\}\,, \tau \le t \tag{12}$$

з деякими додатніми сталими K, γ, *тоді рівняння* (1) *також матиме єдиний обмежений на* $\mathbb{R}$ *розв'язок при кожній фіксованій матриці* $H(t) \in \mathbf{C}^0(\mathbb{R})$ *і він записується в інтегральному вигляді*

$$Y = \bar{Y}(t) = \int_{-\infty}^t \Omega_\tau^t(A)\, H(\tau)\, \Omega_t^\tau(B)\, d\tau. \tag{13}$$

В цьому легко переконатися, переходячи в рівності (7) до границі при $t \to -\infty$. Як

результат, для сталої матриці $\bar{C} = Y(t)|_{t=0}$ отримаємо рівність

$$\bar{C} = \int_{-\infty}^{0} \Omega_{\tau}^{0}(A) H(\tau) \Omega_{0}^{\tau}(B) d\tau,$$

підставляючи яку в загальний розв'язок (5) і приходимо до інтегрального зображення (13) обмеженого розв'язку неоднорідного рівняння (1). Аналогічно, як і раніше, легко переконатися, що рівністю (13) визначається єдиний обмежений розв'язок.

Тепер перейдемо до дослідження більш загальних систем нелінійних диференціальних рівнянь. Зокрема, розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \begin{array}{r} \frac{dy_1}{dt} = B(x) y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = F(x) y_1 + A(x) y_2, \end{array} \tag{14}$$

де $y_1 \in \mathbb{R}^p$, $y_2 \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$-вектор-функція визначена при всіх $x \in \mathbb{R}^m$ і локально задовольняє умові Ліпшица. Також припускаємо, що для вектор-функції $f(x)$ має місце нерівність $\|f(x)\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2$ при всіх $x \in \mathbb{R}^m$ з деякими невід'ємними постійними сталими α_1, α_2. Простір таких функцій $f(x)$ коротко будемо позначати через $\mathbf{C}_{Lip}(\mathbb{R}^m)$. Наведені припущення дозволяють стверджувати, що задача Коші $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x|_{t=0} = x_0$ має єдиний розв'язок $x = x(t; x_0)$ для кожного фіксованого $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і цей розв'язок визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$. Матриці $B(x)$, $A(x)$ і $F(x)$ в системі (14) є відповідної розмірності, елементами яких є дійсні скалярні функції, визначені, неперервні і обмежені на $\mathbb{R}^m$, тобто належать простору $\mathbf{C}^0(\mathbb{R}^m)$.

Далі, зауважимо, якщо знайдеться така заміна змінних

$$y_1 = z_1, y_2 = L(x) z_1 + z_2, \tag{15}$$

за допомогою якої система (14) переводиться в систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \begin{array}{r} \frac{dz_1}{dt} = B(x) z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} = A(x) z_2, \end{array} \tag{16}$$

тоді для прямокутної матриці $L(x)$ буде виконуватись тотожність

$$\dot{L}(x) \equiv A(x) L(x) - L(x) B(x) + F(x). \tag{17}$$

Інакше кажучи, можемо стверджувати, що рівністю

$$Y = L(x) \tag{18}$$

визначається обмежений інваріантний многовид системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \frac{dY}{dt} = A(x) Y - Y B(x) + F(x). \end{cases} \tag{19}$$

Нагадаємо деякі визначення.

Означення. *Кажуть, що система рівнянь* (19) *має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю*

$$Y = U(x), \tag{20}$$

якщо матриця $U(x) \in \mathbf{C}'(\mathbb{R}^m; f)$ *і виконується тотожність*

$$\dot{U}(x) \equiv A(x) U(x) - U(x) B(x) + F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \tag{21}$$

Тут через $\mathbf{C}'(\mathbb{R}^m; f)$ *позначаємо простір функцій* $u(x)$ *неперервних і обмежених на* $\mathbb{R}^m$ *таких, що суперпозиція* $u(x(t; x))$ *є неперервно диференційовною функцією по* t. *При цьому за означенням* $\dot{u}(x) = \left.\frac{du(x(t;x))}{dt}\right|_{t=0}$. *Якщо функція* $u(x)$ *є неперервно диференційовною, то*

$$\dot{u}(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} f(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x).$$

Зауважимо також, що через $\Omega_{\tau}^{t}(x_0; A)$ будемо позначати фундаментальну матрицю розв'язків лінійної системи $\dot{z}_2 = A(x(t; x_0)) z_2$ з параметром $x_0 \in \mathbb{R}^m$, яка нормована в точці $t = \tau$: $\Omega_{\tau}^{t}(x_0; A)|_{t=\tau} = I_n$.

Має місце наступне твердження:

Теорема 2. *Якщо система* (19) *така, що виконується оцінка*

$$\|\Omega_t^o(x_0; A)\| \cdot \left\|\Omega_0^t(x_0; B)\right\| \leq$$
$$\leq K \exp\{-\gamma t\}, t \geq 0, \gamma = const > 0 \tag{22}$$

тоді при кожній фіксованій матриці $F(x) \in \mathbf{C}^0(\mathbb{R}^m)$ *вона має єдиний обмежений інваріантний многовид і він має таке зображення*

$$Y = U_0(x) = -\int_0^{+\infty} \Omega_{\tau}^{0}(x; A) \times$$
$$\times F(x(\tau; x)) \Omega_0^{\tau}(x; B) d\tau. \tag{23}$$

При виконанні ж наступної оцінки

$$\left\|\Omega_t^o\left(x_0;A\right)\right\|\cdot\left\|\Omega_0^t\left(x_0;B\right)\right\|\le$$
$$\le K\exp\left\{\gamma t\right\},t\le 0,\gamma=const>0 \qquad (24)$$

для системи (19) *існує єдиний обмежений інваріантний многовид при кожній фіксованій матриці* $F\left(x\right)\in\mathbf{C}^0\left(\mathbb{R}^m\right)$ *і задається він наступним чином*

$$Y=U_0\left(x\right)=\int_{-\infty}^{0}\Omega_\tau^0\left(x;A\right)\times$$
$$\times F\left(x\left(\tau;x\right)\right)\Omega_0^\tau\left(x;B\right)d\tau. \qquad (25)$$

Доведення. Зауважимо, що загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dY}{dt}=A\left(x\left(t;x_0\right)\right)Y-YB\left(x\left(t;x_0\right)\right)+$$
$$+F\left(x\left(t;x_0\right)\right), \quad (26)$$

де $x\left(t;x_0\right)$ є розв'язком задачі Коші $\frac{dx}{dt}=f\left(x\right)$, $x|_{t=0}=x_0$, можна записати в наступному вигляді

$$Y=Y\left(t;x_0\right)=\Omega_0^t\left(x_0;A\right)\cdot\{C+$$
$$\int_0^t\Omega_\tau^0\left(x_0;A\right)F\left(x\left(\tau;x_0\right)\right)\times$$
$$\times\Omega_0^\tau\left(x_0;B\right)d\tau\}\cdot\Omega_t^0\left(x_0;B\right). \qquad (27)$$

Згідно з теоремою 1 система має єдиний обмежений розв'язок $Y=Y_0\left(t;x_0\right))$ при кожному фіксованому $x_0\in\mathbb{R}$ і його можна задати як

$$Y=Y_0\left(t;x_0\right))=-\int_t^{+\infty}\Omega_\tau^t\left(x_0;A\right)\times$$
$$\times F\left(x\left(\tau;x_0\right)\right)\Omega_t^\tau\left(x_0;B\right)d\tau. \quad (28)$$

Також відмітимо, що виконується тотожність

$$\Omega_\tau^t\left(x(\theta;x);A\right)\equiv\Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}\left(x;A\right) \qquad (29)$$

для довільних $t,\tau,\theta\in\mathbb{R}$. Дійсно, для цього в тотожності, яка визначає $\Omega_\tau^t\left(x;A\right)$

$$\frac{d\Omega_\tau^t\left(x;A\right)}{dt}=A\left(x\left(x(t;x)\right)\right)\Omega_\tau^t\left(x;A\right), \quad (30)$$

замінимо x на $x(\theta;x)$ і з врахуванням групової властивості для функції $x(t;x)$, яка задається співвідношенням $x(t;x(\theta;x))\equiv x(t+\theta;x)$ одержимо

$$\frac{d\Omega_\tau^t\left(x(\theta;x);A\right)}{dt}=$$
$$=A\left(x(t+\theta;x)\right)\Omega_\tau^t\left(x(t;x(\theta;x));A\right). \quad (31)$$

Остання тотожність правильна для довільних $t,\tau,\theta\in\mathbb{R}$ і задає фундаментальну матрицю розв'язків $\Omega_\tau^t\left(x(\theta;x);A\right)$ системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=A\left(x(t+\theta;x)\right)x, \qquad (32)$$

яка нормована при $t=\tau$. Але матриця $\Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}\left(x;A\right)$ теж має цю властивість. А це можливо тільки тоді, коли ці матриці співпадають, отже виконується рівність (29). Враховуючи той факт, що аналогічна тотожність до (29) виконується і для матриці B з рівності (28), можемо записати

$$Y=Y_0\left(t;x_0\right))=Y_0\left(0;x(t;x)\right)=$$
$$=-\int_0^\infty\Omega_\tau^0\left(x(t;x);A\right)\times$$
$$\times F\left((x(t;x))\right)\cdot\Omega_0^\tau\left(x(t;x);B\right)d\tau. \qquad (33)$$

Ця рівність завершує доведення теореми, оскільки $Y=U_0(x)=Y_0\left(0;x\right)$ задає єдиний обмежений многовид системи (19).

Теорема 2 доведена.

Наслідок. *Припустивши, що система* (19) *записується в наступному вигляді*

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x\right),$$
$$\frac{dY}{dt}=A_1\left(x\right)Y-YB_1\left(x\right)+F_1\left(x\right),$$
$$\frac{dZ}{dt}=A_2\left(x\right)Z-ZB_2\left(x\right)+F_2\left(x\right)$$

і при цьому виконуються оцінки

$$\left\|\Omega_t^o\left(x;A_1\right)\cdot\left\|\Omega_0^t\left(x;B_1\right)\right\|\le K\exp\left\{-\gamma t\right\},t\ge 0,$$
$$\left\|\Omega_t^o\left(x;A_2\right)\right\|\cdot\left\|\Omega_0^t\left(x;B_2\right)\right\|\le K\exp\left\{\gamma t\right\},$$
$$t\le 0\ ,\gamma=const>0.$$

можемо стверджувати, що дана система має єдиний обмежений інваріантний многовид для будь-яких фіксованих матриць $F_i\left(x\right)\in\mathbf{C}^0\left(\mathbb{R}^m\right)(i=1,2)$ *і задається він*

такими рівностями

$$\begin{cases} Y = Y(x) = -\int_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(x; A_1) \cdot F_1(x(\tau; x)) \times \\ \qquad \times \Omega_0^\tau(x; B_1)\, d\tau, \\ Z = Z(x) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(x; A_2) \cdot F_2(x(\tau; x)) \times \\ \qquad \times \Omega_0^\tau(x; B_2)\, d\tau. \end{cases}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. –Киев: Наук.думка, 1990. – 270 с.
2. *Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulik* Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems. place CityTaylor & Francis Inc, placeCityLondon, 2004.
3. *Самойленко А.М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. матем., – 1970. –**34**, №6 . – С. 1219–1240.
4. *Самойленко А.М.* К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Укр.мат.журн., – 2001. – **53**, №4. – С. 513-521.
5. *Бойчук А.А.* Условие существования единственной функции Грина-Самойленко задачи об инвариантном торе // Укр.мат.журн., – 2001. – **53**, №4. – С. 556-559.
6. *Грод І.М., Кулик В.І.* Побудова функцій Ляпунова деяких лінійних розширень динамічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат., – 2010. – Вип. 72. – С. 79-93.