

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

**ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ**

Методом інтегрального перетворення Лапласа у поєднанні з методом функцій Коші одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи еволюційних рівнянь параболічного типу, змодельованих методом гібридного диференціального оператора Фур'є-Лежандра-Лежандра на кусково-однорідній полярній осі  $r \geq R_0 > 0$  з м'якими межами.

Using the method of integral Laplace transform in combination with the method of Cauchy functions, we obtain an integral representation of exact analytical solution of a mixed problem for a system of evolutionary equations of parabolic type modeled by hybrid differential Fourier-Legendre-Legendre operator on the piece-homogeneous polar axis  $r \geq R_0 > 0$  with soft boundary.

Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними - важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при математичному моделюванні різних процесів і явищ фізики, хімії, біології, медицини, економіки, техніки.

Добре відомо, що складність досліджуванних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1, 2].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термодинаміки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинни-

ми похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [3, 4].

Окрім методу відокремлення змінних [5], одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються, або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [6-9].

У теоретичних дослідженнях і прикладних задачах найбільш часто зустрічаються диференціальні оператори 2-го порядку, зокрема, диференціальний оператор Фур'є  $F = \frac{d^2}{dr^2}$ , диференціальний оператор

Ейлера

$$B_\alpha^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2,$$

диференціальний оператор Бесселя

$$B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha + 1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2},$$

диференціальний оператор Лежандра

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr} \right)$$

та диференціальний оператор Конторовича-Лебедева

$$B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2.$$

Якщо  $\theta(x)$  - одинична функція Гевісайда, а  $L_j$  - один із перелічених диференціальних операторів, то завжди можна утворити гібридний диференціальний оператор, що відповідає геометричній структурі кусково-однорідного середовища.

Наприклад, для кусково-однорідного проміжку  $(R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3)$  можна утворити гібридний диференціальний оператор

$$M = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 L_1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 L_2 + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 L_3; a_j^2 = const.$$

При цьому очевидно, що оператор  $L_1$  визначений на проміжку  $(R_0, R_1)$ , оператор  $L_2$  - на проміжку  $(R_1, R_2)$ , а оператор  $L_3$  - на проміжку  $(R_2, R_3)$ . Зрозуміло, що змінивши порядок чергування операторів  $L_1, L_2, L_3$  ми одержимо інший гібридний диференціальний оператор.

У цій статті ми пропонуємо інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи еволюційних рівнянь параболічного типу, змодельованих методом гібридного диференціального оператора Фур'є - Лежандра - Лежандра на

кусково-однорідній полярній осі  $(R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty)$  з м'якими межами.

**1. Постановка задачі.** Розглядається задача про структуру обмеженого на множині  $D_2^+ = \{(t, r) : t \in (0, \infty); r \in I_2^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty); R_0 \geq 0\}$  розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} &= f_1(t, r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)_1}[u_2] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, R_2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)_2}[u_3] = f_3(t, r), \quad r \in (R_2, +\infty)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} u_1(t, r) \Big|_{t=0} &= g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ u_2(t, r) \Big|_{t=0} &= g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ u_3(t, r) \Big|_{t=0} &= g_3(r), \quad r \in (R_2, +\infty), \end{aligned} \quad (2)$$

крайовими умовами

$$L_{11}^0[u_1(t, r)] \Big|_{r=R_0} = g_0(t), \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\partial^k u_3}{\partial r^k} = 0, \quad k = 0, 1 \quad (3)$$

та умовами спряження

$$\left( L_{j1}^k[u_k(t, r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t, r)] \right) \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad (4)$$

$j, k = 1, 2.$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Фур'є  $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$  [10] та Лежандра  $\Lambda_{(\mu)_j} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_{1j}^2}{1 - chr} + \frac{\mu_{2j}^2}{1 + chr} \right)$ ,  $\mu_{1j} \geq \mu_{2j} \geq 0$  [11]. У крайовій умові в точці  $r = R_0$  бере участь диференціальний оператор  $L_{11}^0 = \left( \alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}$ . В умовах спряження (4) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jm}^k = \left( \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t};$$

$j, m, k = 1, 2$ .

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти:  $\gamma_j^2 \geq 0, a_j > 0; \alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0, |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0; \delta_{11}^0 \geq 0, \gamma_{11}^0 \geq 0; \alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, \delta_{jm}^k \geq 0, \gamma_{jm}^k \geq 0; c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0; c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0, \alpha_{11}^k \gamma_{21}^k - \alpha_{21}^k \gamma_{11}^k = \beta_{11}^k \delta_{21}^k - \beta_{21}^k \delta_{11}^k, \alpha_{12}^k \gamma_{22}^k - \alpha_{22}^k \gamma_{12}^k = \beta_{12}^k \delta_{22}^k - \beta_{22}^k \delta_{12}^k, j, m, k = 1, 2$ .

**Зауваження 1.** Найвність оператора диференціювання за часом  $\frac{\partial}{\partial t}$  в крайовій умові у точці  $r = R_0$  та в умовах спряження ми інтерпретуємо, виходячи з фізичних міркувань про теплові хвилі, як м'якість межі середовища щодо відбиття хвиль.

**Зауваження 2.** У випадку, коли межі середовища жорсткі щодо відбиття хвиль ( $\delta_{11}^0 = 0, \gamma_{11}^0 = 0, \delta_{jm}^k = 0, \gamma_{jm}^k = 0$ ), маємо мішану задачу з класичною крайовою умовою та класичними умовами спряження, розв'язок якої одержується з розв'язку задачі (1)-(4) як частковий випадок.

**2. Розв'язок задачі.** Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку параболічної крайової задачі спряження (1)-(4) побудуємо методом інтегрального перетворення Лапласа щодо  $t$  із залученням теорії функцій Коші в припущенні, що задані функції  $f_j(t, r), g_0(t), \omega_{jk}(t)$  та шукана функція  $u(t, r) = \{u_1(t, r), u_2(t, r), u_3(t, r)\}$  є оригіналами за Лапласом [12].

У зображенні за Лапласом параболічній задачі (1)-(4) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині  $I_2^+$  розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right)u_1^*(p, r) &= -F_1^*(p, r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ (\Lambda_{(\mu)_1} - q_2^2)u_2^*(p, r) &= -F_2^*(p, r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ (\Lambda_{(\mu)_2} - q_3^2)u_3^*(p, r) &= -F_3^*(p, r), \quad r \in (R_2, +\infty) \end{aligned} \quad (5)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \left(\bar{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^0\right)u_1^*(p, r) \Big|_{r=R_0} &= \bar{g}_0^*(p), \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{d^k u_3^*}{dr^k} &= 0; \quad k = 0, 1 \end{aligned} \quad (6)$$

та умовами спряження

$$\begin{aligned} &\left[\left(\bar{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*(p, r) - \right. \\ &\left. - \left(\bar{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p, r)\right] \Big|_{r=R_k} = \bar{\omega}_{jk}^*. \end{aligned} \quad (7)$$

У рівностях (5)-(7) беруть участь функції:  $q_j^2 = a_j^{-2}(p + \gamma_j^2), F_j^*(p, r) = [f_j^*(p, r) + g_j(r)]a_j^{-2}, \bar{g}_0^* = g_0^*(p) + \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0),$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{jm}^k &= \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p, \quad \bar{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k p, \\ \bar{\alpha}_{11}^0 &= \alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 p, \quad \bar{\beta}_{11}^0 = \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 p, \quad u_j^*(p, r) = \\ &\int_0^\infty u_j(t, r)e^{-pt} dt, \quad f_j^*(p, r) = \int_0^\infty f_j(t, r)e^{-pt} dt, \end{aligned}$$

$$g_0^*(p) = \int_0^\infty g_0(t)e^{-pt} dt, \quad \bar{\omega}_{jk}^* = \omega_{jk}^*(p) + \psi_{jk},$$

$$\begin{aligned} \psi_{jk} &= \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - \left[\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \right. \\ &\left. \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)\right], \quad \omega_{jk}^*(p) = \int_0^\infty \omega_{jk}(t) \exp(-pt) dt, \end{aligned}$$

$p = \sigma + is, \sigma > \sigma_0, s \in (-\infty, +\infty), i = \sqrt{-1}, \operatorname{Re} q_j > 0, j = \overline{1, 3}.$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є  $\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right)v = 0$  утворюють функції  $chq_1 r$  та  $shq_1 r$  [10]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра  $(\Lambda_{(\mu)_j} - q_m^2)v = 0$  утворюють функції  $P_{\nu_m}^{(\mu)_j}(chr)$  та  $L_{\nu_m}^{(\mu)_j}(chr)$  [11],  $\nu_m = -1/2 + q_m, m = 2, 3, j = 1, 2$ .

Найвність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (5)-(7) методом функцій Коші [10, 13]:

$$u_1^*(p, r) = A_1 chq_1 r + B_1 shq_1 r +$$

$$+ \int_{R_0}^{R_1} E_1^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) d\rho,$$

$$u_2^*(p, r) = A_2 P_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chr) +$$

$$+ B_2 L_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chr) + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) sh\rho d\rho, \quad (8)$$

$$u_3^*(p, r) = B_3 L_{\nu_3}^{(\mu)2}(chr) + \int_{R_2}^{\infty} E_3^*(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) sh\rho d\rho.$$

У рівностях (8)  $E_j^*(p, r, \rho)$  - функції Коші:

$$E_j^*(p, r, \rho) \Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p, r, \rho) \Big|_{r=\rho-0} = 0, \\ \frac{dE_j^*(p, r, \rho)}{dr} \Big|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j^*(p, r, \rho)}{dr} \Big|_{r=\rho-0} = -[\varphi_j]^{-1}, \quad (9)$$

де  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = sh\rho$ ,  $\varphi_3 = sh\rho$ .

Припустимо, що функція Коші

$$E_1^*(p, r, \rho) = \begin{cases} \bar{E}_1^* \equiv C_1 chq_1 r + D_1 shq_1 r, \\ R_0 < r < \rho < R_1, \\ \bar{E}_1^* \equiv C_2 chq_1 r + D_2 shq_1 r, \\ R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Властивості (9) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_2 - C_1) chq_1 \rho + (D_2 - D_1) shq_1 \rho = 0,$$

$$(C_2 - C_1) shq_1 \rho + (D_2 - D_1) chq_1 \rho = -q_1^{-1}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = q_1^{-1} shq_1 \rho, D_2 - D_1 = -q_1^{-1} chq_1 \rho. \quad (10)$$

Доповнимо рівності (10) алгебраїчними рівняннями

$$\left( \bar{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^0 \right) \bar{E}_1^* \Big|_{r=R_0} = 0 :$$

$$V_{11}^{01}(q_1 R_0) C_1 + V_{11}^{02}(q_1 R_0) D_1 = 0, \quad (11)$$

$$\left( \bar{\alpha}_{11}^1 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^1 \right) \bar{E}_1^* \Big|_{r=R_1} = 0 :$$

$$V_{11}^{11}(q_1 R_1) C_2 + V_{11}^{12}(q_1 R_1) D_2 = 0.$$

Алгебраїчна система (11) внаслідок співвідношень (10) набуває вигляду:

$$V_{11}^{01}(q_1 R_0) C_1 + V_{11}^{02}(q_1 R_0) D_1 = 0, \quad (12)$$

$$V_{11}^{11}(q_1 R_1) C_1 + V_{11}^{12}(q_1 R_1) D_1 = q_1^{-1} \Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 \rho).$$

Із алгебраїчної системи (12) знаходимо, що

$$C_1 = -\frac{V_{11}^{02}(q_1 R_0)}{q_1 \Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1)} \Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 \rho),$$

$$D_1 = \frac{V_{11}^{01}(q_1 R_0)}{q_1 \Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1)} \Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 \rho).$$

Цим функція Коші  $E_1^*(p, r, \rho)$  визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі  $r = \rho$  має структуру:

$$E_1^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{q_1 \Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1)} \times \begin{cases} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r) \Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 \rho), \\ R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho) \Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 r), \\ R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \quad (13)$$

Нехай функція Коші

$$E_2^*(p, r, \rho) = \begin{cases} \bar{E}_2^* \equiv C_1 P_{\nu_2}^{(\mu)1}(chr) + D_1 L_{\nu_2}^{(\mu)1}(chr), \\ R_1 < r < \rho < R_2, \\ \bar{E}_2^* \equiv C_2 P_{\nu_2}^{(\mu)1}(chr) + D_2 L_{\nu_2}^{(\mu)1}(chr), \\ R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases}$$

Властивості (9) функції Коші дають алгебраїчну систему рівнянь

$$(C_2 - C_1) P_{\nu_2}^{(\mu)1}(ch\rho) + (D_2 - D_1) L_{\nu_2}^{(\mu)1}(ch\rho) = 0,$$

$$(C_2 - C_1) P_{\nu_2}^{(\mu)1'}(ch\rho) + (D_2 - D_1) L_{\nu_2}^{(\mu)1'}(ch\rho) = -(sh\rho)^{-2}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -B_{(\mu)1}(q_2) L_{\nu_2}^{(\mu)1}(ch\rho),$$

$$D_2 - D_1 = B_{(\mu)1}(q_2) P_{\nu_2}^{(\mu)1}(ch\rho). \quad (14)$$

Доповнимо систему (14) алгебраїчними рівняннями

$$\left( \bar{\alpha}_{12}^1 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{12}^1 \right) \bar{E}_2^* \Big|_{r=R_1} = 0 :$$

$$Z_{\nu_2;12}^{(\mu)1;11}(chR_1) C_1 + Z_{\nu_2;12}^{(\mu)1;12}(chR_1) D_1 = 0, \quad (15)$$

$$\left( \bar{\alpha}_{11}^2 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^2 \right) \bar{E}_2^* \Big|_{r=R_2} = 0 :$$

$$Z_{\nu_2;11}^{(\mu)1;21}(chR_2) C_2 + Z_{\nu_2;11}^{(\mu)1;22}(chR_2) D_2 = 0.$$

В силу рівностей (14) алгебраїчна система (15) набуває вигляду:

$$Z_{\nu_2;12}^{(\mu)1;11}(chR_1) C_1 + Z_{\nu_2;12}^{(\mu)1;12}(chR_1) D_1 = 0, \quad (16)$$

$$Z_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;21}(chR_2)C_1 + Z_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;22}(chR_2)D_1 = \\ = B_{(\mu)_1}(q_2)F_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;2}(chR_2, ch\rho).$$

Розв'язком системи (16) є

$$C_1 = -\frac{B_{(\mu)_1}(q_2)Z_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;12}(chR_1)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2)} \times \\ \times F_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;2}(chR_2, ch\rho), \\ D_1 = \frac{B_{(\mu)_1}(q_2)Z_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;11}(chR_1)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2)} \times \\ \times F_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;2}(chR_2, ch\rho).$$

Цим функція Коші  $E_2^*(p, r, \rho)$  визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі  $r = \rho$  має структуру:

$$E_2^*(p, r, \rho) = -\frac{B_{(\mu)_1}(q_2)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2)} \times \\ \times \begin{cases} F_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;1}(chR_1, chr)F_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;2}(chR_2, ch\rho), \\ R_1 < r < \rho < R_2, \\ F_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;1}(chR_1, ch\rho)F_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;2}(chR_2, chr), \\ R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases} \quad (17)$$

Аналогічно одержуємо, що функція Коші (при  $C_2 = 0$ )

$$E_3^*(p, r, \rho) = -\frac{B_{(\mu)_2}(q_2)}{Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;22}(chR_2)} \times \\ \times \begin{cases} F_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;2}(chR_2, chr)L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(ch\rho), \\ R_2 < r < \rho < +\infty, \\ F_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;2}(chR_2, ch\rho)L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr), \\ R_2 < \rho < r < +\infty. \end{cases} \quad (18)$$

У рівностях (13)-(18) беруть участь функції:

$$V_{jk}^{m1}(q_s R_m) = \left( \bar{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{jk}^m \right) chq_s r \Big|_{r=R_m}, \\ V_{jk}^{m2}(q_s R_m) = \left( \bar{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{jk}^m \right) shq_s r \Big|_{r=R_m}, \\ \Phi_{jk}^m(q_s R_m, q_s r) = V_{jk}^{m2}(q_s R_m) chq_s r - \\ - V_{jk}^{m1}(q_s R_m) shq_s r, \\ \Delta_{j1}(q_1 R_0, q_1 R_1) = V_{11}^{01}(q_1 R_0) V_{j1}^{12}(q_1 R_1) -$$

$$-V_{11}^{02}(q_1 R_0) V_{j1}^{11}(q_1 R_1); j = 1, 2;$$

$$Z_{\nu;jk}^{(\mu);m1}(chR_m) = \left( \bar{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{jk}^m \right) P_{\nu}^{(\mu)}(chr) \Big|_{r=R_m};$$

$$Z_{\nu;jk}^{(\mu);m2}(chR_m) = \left( \bar{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{jk}^m \right) L_{\nu}^{(\mu)}(chr) \Big|_{r=R_m};$$

$$F_{\nu;jk}^{(\mu);m}(chR_m, chr) = Z_{\nu;jk}^{(\mu);m1}(chR_m) L_{\nu}^{(\mu)}(chr) - \\ - Z_{\nu;jk}^{(\mu);m2}(chR_m) P_{\nu}^{(\mu)}(chr);$$

$$\Delta_{\nu_2;jk}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2) = Z_{\nu_2;j2}^{(\mu)_1;11}(chR_1) \times$$

$$\times Z_{\nu_2;k1}^{(\mu)_1;22}(chR_2) - Z_{\nu_2;j2}^{(\mu)_1;12}(chR_1) \times$$

$$\times Z_{\nu_2;k1}^{(\mu)_1;21}(chR_2); j, k = 1, 2.$$

Повернемося до формул (8). Крайова умова в точці  $r = R_0$  та умови спряження (7) для визначення п'яти величин  $A_j$  ( $j = 1, 2$ ) й  $B_k$  ( $k = \bar{1}, \bar{3}$ ) дають неоднорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$V_{11}^{01}(q_1 R_0) A_1 + V_{11}^{02}(q_1 R_0) B_1 = \bar{g}_0^*(p), \\ V_{j1}^{11}(q_1 R_1) A_1 + V_{j1}^{12}(q_1 R_1) B_1 - \\ - Z_{\nu_2;j2}^{(\mu)_1;11}(chR_1) A_2 - Z_{\nu_2;j2}^{(\mu)_1;12}(chR_1) B_2 = \\ = \bar{\omega}_{j1}^* + \delta_{j2} G_{12}^*, j = 1, 2, \quad (19)$$

$$Z_{\nu_2;j1}^{(\mu)_1;21}(chR_2) A_2 + Z_{\nu_2;j1}^{(\mu)_1;22}(chR_2) B_2 -$$

$$- Z_{\nu_3;j2}^{(\mu)_2;22}(chR_2) B_3 = \bar{\omega}_{j2}^* + \delta_{j2} G_{23}^*.$$

У системі (19) беруть участь функції:

$$G_{12}^* = -c_{11}^* \int_{R_0}^{R_1} \frac{\Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho)}{\Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1)} F_1^*(p, \rho) d\rho - \\ - \frac{c_{21}^*}{shR_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{F_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;2}(chR_2, ch\rho)}{\Delta_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2)} \times \\ \times F_2^*(p, \rho) sh\rho d\rho, \\ G_{23}^* = \frac{c_{12}^*}{shR_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{F_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;1}(chR_1, ch\rho)}{\Delta_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2)} F_2^*(p, \rho) \times \\ \times sh\rho d\rho + \frac{c_{22}^*}{shR_2} \int_{R_2}^{\infty} \frac{L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(ch\rho)}{Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;22}(chR_2)} \times \\ \times F_3^*(p, \rho) sh\rho d\rho$$

та символ Кронекера  $\delta_{j2}$  ( $\delta_{12} = 0, \delta_{22} = 1$ ).  
Введемо до розгляду функції:

$$\begin{aligned} A_{(\mu)_1;j}(p) &= \Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1) \times \\ &\times \Delta_{\nu_2;2j}^{(\mu)_1}(ch R_1, ch R_2) - \Delta_{21}(q_1 R_0, q_1 R_1) \times \\ &\times \Delta_{\nu_2;1j}^{(\mu)_1}(ch R_1, ch R_2), \\ B_{(\mu);j}(p) &= Z_{\nu_3;22}^{(\mu)_2;22}(ch R_2) \Delta_{\nu_2;j1}^{(\mu)_1}(ch R_1, ch R_2) - \\ &- Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;22}(ch R_2) \Delta_{\nu_2;j2}^{(\mu)_1}(ch R_1, ch R_2); \\ &j = 1, 2; \quad (\mu) = ((\mu)_1; (\mu)_2); \\ \Theta_{(\mu)_1;1}(p, r) &= \Delta_{21}(q_1 R_0, q_1 R_1) F_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;1}(ch R_1, chr) - \\ &- \Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1) F_{\nu_2;22}^{(\mu)_1;1}(ch R_1, chr), \\ \Theta_{(\mu);2}(p, r) &= Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;22}(ch R_2) F_{\nu_2;21}^{(\mu)_1;2}(ch R_2, chr) - \\ &- Z_{\nu_3;22}^{(\mu)_2;22}(ch R_2) F_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;2}(ch R_2, chr). \end{aligned}$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (5)-(7): для  $p = \sigma + is$  з  $Re p = \sigma > \sigma_0$ , де  $\sigma_0$  - абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та  $Im p = s \in (-\infty, +\infty)$  визначник алгебраїчної системи (19) відмінний від нуля:

$$\begin{aligned} \Delta_{(\mu)}(p) &\equiv A_{(\mu)_1;1}(p) Z_{\nu_3;22}^{(\mu)_2;22}(ch R_2) - \\ &- A_{(\mu)_1;2}(p) Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;22}(ch R_2) = \Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1) \times \\ &\times B_{(\mu);2}(p) - \Delta_{21}(q_1 R_0, q_1 R_1) B_{(\mu);1}(p) \neq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (5)-(7):

1) породжені крайовою умовою в точці  $r = R_0$  функції Гріна

$$\begin{aligned} W_{(\mu);11}^*(p, r) &= \frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)} \times \\ &\times \left[ B_{(\mu);2}(p) \Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 r) - \right. \\ &\left. - B_{(\mu);1}(p) \Phi_{21}^1(q_1 R_1, q_1 r) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} W_{(\mu);12}^*(p, r) &= -\frac{c_{11}^* q_1}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu);2}(p, r), \\ W_{(\mu);13}^*(p, r) &= -\frac{c_{11}^* q_1 c_{12}^*}{\Delta_{(\mu)}(p) B_{(\mu)_1}(q_2) sh R_2} L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr); \end{aligned}$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\begin{aligned} R_{(\mu);11}^{*1}(p, r) &= -\frac{B_{(\mu);2}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r), \\ R_{(\mu);21}^{*1}(p, r) &= \frac{B_{(\mu);1}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r), \\ R_{(\mu);12}^{*1}(p, r) &= -\frac{c_{21}^* Z_{\nu_3;22}^{(\mu)_2;22}(ch R_2)}{B_{(\mu)_1}(q_2) sh R_1 \Delta_{(\mu)}(p)} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r), \\ R_{(\mu);22}^{*1}(p, r) &= \frac{c_{21}^* Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;22}(ch R_2)}{B_{(\mu)_1}(q_2) sh R_1 \Delta_{(\mu)}(p)} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r), \\ R_{(\mu);11}^{*2}(p, r) &= \frac{\Delta_{21}(q_1 R_0, q_1 R_1)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu);2}(p, r), \\ R_{(\mu);21}^{*2}(p, r) &= -\frac{\Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu);2}(p, r), \\ R_{(\mu);12}^{*2}(p, r) &= -\frac{Z_{\nu_3;22}^{(\mu)_2;22}(ch R_2)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu)_1;1}(p, r), \\ R_{(\mu);22}^{*2}(p, r) &= \frac{Z_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;22}}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu)_1;1}(p, r), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} R_{(\mu);11}^{*3}(p, r) &= \frac{c_{12}^* \Delta_{21}(q_1 R_0, q_1 R_1)}{B_{(\mu)_1}(q_2) sh R_2 \Delta_{(\mu)}(p)} L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr), \\ R_{(\mu);21}^{*3}(p, r) &= -\frac{c_{12}^* \Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1)}{B_{(\mu)_1}(q_2) sh R_2 \Delta_{(\mu)}(p)} L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr), \\ R_{(\mu);12}^{*3}(p, r) &= \frac{A_{(\mu)_1;2}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)} L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr), \\ R_{(\mu);22}^{*3}(p, r) &= -\frac{A_{(\mu)_1;1}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)} L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr); \end{aligned}$$

3) породжені неоднорідністю системи (5) функції впливу

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(\mu);11}^*(p, r, \rho) &= \\ &= -\frac{1}{q_1} \begin{cases} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r) W_{(\mu);11}^*(p, \rho), \\ R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho) W_{(\mu);11}^*(p, r), \\ R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \\ \mathcal{H}_{(\mu);12}^*(p, r, \rho) &= \frac{c_{21}^*}{sh R_1} \frac{\Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu);2}(p, \rho), \\ \mathcal{H}_{(\mu);13}^*(p, r, \rho) &= \frac{c_{21}^* c_{22}^*}{B_{(\mu)_1}(q_2) sh R_1 sh R_2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r) L_{\nu_3}^{(\mu)2}(chr), \\
\mathcal{H}_{(\mu);21}^*(p, r, \rho) &= \frac{c_{11}^*}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho) \Theta_{(\mu);2}(p, r), \\
\mathcal{H}_{(\mu);22}^*(p, r, \rho) &= \frac{B_{(\mu)1}(q_2)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \times \\
& \times \begin{cases} \Theta_{(\mu)1;1}(p, r) \Theta_{(\mu);2}(p, \rho), R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Theta_{(\mu)1;1}(p, \rho) \Theta_{(\mu);2}(p, r), R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \quad (23) \\
\mathcal{H}_{(\mu);23}^*(p, r, \rho) &= \frac{c_{22}^*}{shR_2} \frac{L_{\nu_3}^{(\mu)2}(chr)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu)1;1}(p, r), \\
\mathcal{H}_{(\mu);31}^*(p, r, \rho) &= \frac{c_{11}^* c_{12}^* \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho)}{B_{(\mu)1}(q_2) shR_2 \Delta_{(\mu)}(p)} \times \\
& \times L_{\nu_3}^{(\mu)2}(chr), \quad \mathcal{H}_{(\mu);32}^*(p, r, \rho) = \frac{c_{12}^*}{shR_2} \frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)} \times \\
& \times \Theta_{(\mu)1;1}(p, \rho) L_{\nu_3}^{(\mu)2}(chr), \\
\mathcal{H}_{(\mu);33}^*(p, r, \rho) &= \frac{B_{(\mu)2}(q_3)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \times \\
& \times \begin{cases} L_{\nu_3}^{(\mu)2}(chr) \left[ A_{(\mu)1;2}(p) F_{\nu_3;12}^{(\mu)2;2}(chR_2, chr) - \right. \\ \left. L_{\nu_3}^{(\mu)2}(chr) \left[ A_{(\mu)1;2}(p) F_{\nu_3;12}^{(\mu)2;2}(chR_2, chr) - \right. \right. \\ \left. \left. - A_{(\mu)1;1}(p) F_{\nu_3;22}^{(\mu)2;2}(chR_2, chr) \right], \right. \\ R_2 < r < \rho < +\infty, \\ \left. - A_{(\mu)1;1}(p) F_{\nu_3;22}^{(\mu)2;2}(chR_2, chr) \right], \\ R_2 < \rho < r < +\infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (19), підстановки отриманих виразів величин  $A_j$ ,  $B_k$  у рівності (8) та низки елементарних перетворень, маємо єдиний розв'язок крайової задачі (5)-(7):

$$\begin{aligned}
u_j^*(p, r) &= W_{(\mu);1j}^*(p, r) \bar{g}_0^*(p) + \\
& + \sum_{m,k=1}^2 R_{(\mu);mk}^{*j}(p, r) \bar{\omega}_{mk}^* + \\
& + \int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{(\mu);j1}^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) d\rho + \\
& + \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{(\mu);j2}^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) sh\rho d\rho +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{(\mu);j3}^*(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) sh\rho d\rho, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (24)$$

Переходячи в (24) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок параболічної крайової задачі (1)-(4):

$$\begin{aligned}
u_j(t, r) &= \int_0^t W_{(\mu);1j}(t - \tau, r) \bar{g}_0(\tau) d\tau + \\
& + \sum_{m,k=1}^2 \int_0^t R_{(\mu);mk}^j(t - \tau, r) \bar{\omega}_{mk}(\tau) d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{(\mu);j1}(t - \tau, r, \rho) \left[ f_1(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_1(\rho) \right] \times \\
& \times a_1^{-2} d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{(\mu);j2}(t - \tau, r, \rho) \times \\
& \times \left[ f_2(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_2(\rho) \right] a_2^{-2} sh\rho d\rho d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{(\mu);j3}(t - \tau, r, \rho) \left[ f_3(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_3(\rho) \right] \times \\
& \times a_3^{-2} sh\rho d\rho d\tau, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (25)
\end{aligned}$$

У рівностях (25) прийнято, що  $\bar{g}_0(\tau) = g_0(\tau) + \delta_+(\tau)(\delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0))$ ,  $\bar{\omega}_{mk}(\tau) = \omega_{mk}(\tau) + \psi_{mk} \delta_+(\tau)$ , де  $\delta_+(\tau)$  - дельта-функція, зосереджена в точці  $\tau = 0+$  [13].

У рівностях (25) за означенням [12] маємо, що головні розв'язки

$$W_{(\mu);1j}(t, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} W_{(\mu);1j}^*(p, r) e^{pt} dp; \quad (26)$$

$$j = \overline{1, 3},$$

$$\begin{aligned}
R_{(\mu);mk}^j(t, r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} R_{(\mu);mk}^{*j}(p, r) e^{pt} dp; \\
m, k &= 1, 2, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t, r, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \mathcal{H}_{(\mu);jk}^*(p, r, \rho) e^{pt} dp; \quad (28)$$

$j, k = \overline{1, 3}$ .

### 3. Аналіз головних розв'язків (функцій Гріна та функцій впливу).

Одержимо вираз для функцій  $W_{(\mu);1j}(t, r)$ ,  $R_{(\mu);mk}^j(t, r)$  та  $\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t, r, \rho)$  зручний як для теоретичних досліджень, так і для інженерних розрахунків.

Знайдемо власні елементи (спектр і спектральну функцію) гібридного диференціального оператора (ГДО)

$$M_{(\mu)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 \Lambda_{(\mu)1} + \theta(r - R_2)a_3^2 \Lambda_{(\mu)2}. \quad (29)$$

Оскільки ГДО  $M_{(\mu)}$  самоспряжений (як сума самоспряжених диференціальних операторів) і має на множині  $I_2^+$  одну особливу точку  $r = +\infty$ , то його спектр неперервний [14]. Можна вважати, що спектральний параметр  $\beta \in (0, +\infty)$ . Йому відповідає дійсна спектральна функція

$$V_{(\mu)}(r, \beta) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)V_{(\mu);1}(r, \beta) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{(\mu);2}(r, \beta) + \theta(r - R_2)V_{(\mu);3}(r, \beta). \quad (30)$$

При цьому функції  $V_{(\mu);j}(r, \beta)$  повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} (a_1^2 \frac{d^2}{dr^2} + b_1^2)V_{(\mu);1}(r, \beta) &= 0, r \in (R_0, R_1), \\ (a_2^2 \Lambda_{(\mu)1} + b_2^2)V_{(\mu);2}(r, \beta) &= 0, r \in (R_1, R_2), \\ (a_3^2 \Lambda_{(\mu)2} + b_3^2)V_{(\mu);3}(r, \beta) &= 0, r \in (R_2, +\infty), \end{aligned} \quad (31)$$

крайові умови

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0)V_{(\mu);1}(r, \beta) \Big|_{r=R_0} &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{d^k V_{(\mu);3}(r, \beta)}{dr^k} &= 0, k = 0, 1 \end{aligned} \quad (32)$$

та умови спряження

$$\begin{aligned} \left[ \left( \tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k \right) V_{(\mu);k}(r, \beta) - \left( \tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k \right) \times \right. \\ \left. \times V_{(\mu);k+1}(r, \beta) \right] \Big|_{r=R_k} = 0; j, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (33)$$

Тут прийняті позначення:  $b_j^2 = \beta^2 + k_j^2$ ,  $k_j^2 \geq 0$ ,  $j = \overline{1, 3}$ ;  $\tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2)\delta_{jk}^m$ ,  $\tilde{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2)\gamma_{jk}^m$ ,  $\gamma^2 = \max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\}$ ,  $j, k = 1, 2$ ;  $m = 0, 1, 2$ . У подальшому позначимо  $\bar{b}_j = a_j^{-1}b_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ).

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є  $(\frac{d^2}{dr^2} + \bar{b}_1^2)v = 0$  утворюють функції  $\cos \bar{b}_1 r$  та  $\sin \bar{b}_1 r$  [10]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра  $(\Lambda_{(\mu)1} + \bar{b}_2^2)v = 0$  утворюють функції  $A_{\nu_2^*}^{(\mu)1}(chr)$  та  $B_{\nu_2^*}^{(\mu)1}(chr)$ ,  $\nu_2^* = -1/2 + i\bar{b}_2$  [11]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра  $(\Lambda_{(\mu)2} + \bar{b}_3^2)v = 0$  утворюють функції  $A_{\nu_3^*}^{(\mu)2}(chr)$  та  $B_{\nu_3^*}^{(\mu)2}(chr)$  [11],  $\nu_3^* = -1/2 + i\bar{b}_3$ .

Якщо розв'язок спектральної задачі (31)-(33) відшукувати у вигляді лінійної комбінації фундаментальної системи розв'язків

$$V_{(\mu);1}(r, \beta) = A_1 \cos \bar{b}_1 r + B_1 \sin \bar{b}_1 r,$$

$r \in (R_0, R_1)$ ,

$$V_{(\mu);2}(r, \beta) = A_2 A_{\nu_2^*}^{(\mu)1}(chr) + B_2 B_{\nu_2^*}^{(\mu)1}(chr), \quad (34)$$

$r \in (R_1, R_2)$ ,

$$V_{(\mu);3}(r, \beta) = A_3 A_{\nu_3^*}^{(\mu)2}(chr) + B_3 B_{\nu_3^*}^{(\mu)2}(chr),$$

$$r \in (R_2, +\infty),$$

то крайова умова в точці  $r = R_0$  та умови спряження (33) для визначення шести величин дають алгебраїчну однорідну систему з п'яти рівнянь:

$$\begin{aligned} v_{11}^{01}(\bar{b}_1 R_0)A_1 + v_{11}^{02}(\bar{b}_1 R_0)B_1 &= 0, \\ v_{j1}^{11}(b_1 R_1)A_1 + v_{j1}^{12}(b_1 R_1)B_1 - Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)1;11}(ch R_1)A_2 - \\ - Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)1;12}(ch R_1)B_2 &= 0, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (35)$$



$$Y_{\nu_2^*;j1}^{(\mu)_1;21}(chR_2)A_2 + Y_{\nu_2^*;j1}^{(\mu)_1;22}(chR_2)B_2 - \\ - Y_{\nu_3^*;j2}^{(\mu)_2;21}(chR_2)A_3 - Y_{\nu_3^*;j2}^{(\mu)_2;22}(chR_2)B_3 = 0.$$

Алгебраїчна система (35) сумісна. Розв'язок системи (35) будується стандартним способом [15].

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (35) й підстановки одержаних виразів для  $A_j$  та  $B_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) у рівності (34) отримуємо функції:

$$V_{(\mu);1}(r, \beta) = q_{(\mu)_1}(\beta)q_{(\mu)_2}(\beta) \left[ v_{11}^{02}(\bar{b}_1 R_0) \cos \bar{b}_1 r - \right. \\ \left. - v_{11}^{01}(\bar{b}_1 R_0) \sin \bar{b}_1 r \right],$$

$$V_{(\mu);2}(r, \beta) = q_{(\mu)_2}(\beta) \left[ \delta_{11}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1) \times \right. \\ \left. \times f_{\nu_2^*;22}^{(\mu)_1;1}(chR_1, chr) - \right. \\ \left. - \delta_{21}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1) f_{\nu_2^*;12}^{(\mu)_1;1}(chR_1, chr) \right], \quad (36)$$

$$V_{(\mu);3}(r, \beta) = \omega_{(\mu);1}(\beta) B_{\nu_3^*}^{(\mu)_2}(chr) - \\ - \omega_{(\mu);2}(\beta) A_{\nu_3^*}^{(\mu)_2}(chr).$$

У рівностях (36) беруть участь функції:

$$q_{(\mu)_1}(\beta) = \frac{c_{21,1}}{s_{(\mu)_1}(\bar{b}_2)shR_1}, \\ q_{(\mu)_2}(\beta) = \frac{c_{21,2}}{s_{(\mu)_2}(\bar{b}_3)shR_2}, \quad (\mu) = ((\mu)_1, (\mu)_2), \\ s_{(\mu)_j}(\bar{b}_m) = \frac{2^{\mu_{1j}-\mu_{2j}} \gamma_{(\mu)_j}(\bar{b}_m) \pi^3}{sh(2\pi\bar{b}_m)} \times \\ \times \frac{|\Gamma(1/2 + i\bar{b}_m + \mu_j^+)|^{-2}}{|\Gamma(1/2 + i\bar{b}_m + \mu_j^-)|^2}, \\ \gamma_{(\mu)_j}(\bar{b}_m) = \cos \frac{\cos \mu_{1j} sh(2\pi\bar{b}_m)}{\cos \mu_{2j} \pi + \cos \mu_{1j} \pi ch(2\pi\bar{b}_m)};$$

$$\mu_j^\pm = \frac{1}{2}(\mu_{1j} \pm \mu_{2j}), \quad j = 1, 2, m = 2, 3;$$

$$\delta_{j1}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1) = v_{11}^{01}(\bar{b}_1 R_0) v_{j1}^{12}(\bar{b}_1 R_1) - \\ - v_{11}^{02}(\bar{b}_1 R_0) v_{j1}^{11}(\bar{b}_1 R_1), \quad j = 1, 2;$$

$$\delta_{\nu_2^*;jk}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2) = Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)_1;11}(chR_1) \times \\ \times Y_{\nu_2^*;k1}^{(\mu)_1;22}(chR_2) - Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)_1;12}(chR_1) Y_{\nu_2^*;k1}^{(\mu)_1;21}(chR_2),$$

$$a_{(\mu)_1;j}(\beta) = \delta_{11}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1) \delta_{\nu_2^*;2j}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2) - \\ - \delta_{21}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1) \delta_{\nu_2^*;1j}^{(\mu)_1}(chR_1, chR_2),$$

$$\omega_{(\mu);j}(\beta) = a_{(\mu)_1;2}(\beta) Y_{\nu_3^*;12}^{(\mu)_2;2j}(chR_2) - \\ - a_{(\mu)_1;1}(\beta) Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)_2;2j}(chR_2), \quad j = 1, 2;$$

$$f_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)_1;1}(chR_1, chr) = Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)_1;11}(chR_1) B_{\nu_2^*}^{(\mu)_1}(chr) - \\ - Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)_1;12}(chR_1) A_{\nu_2^*}^{(\mu)_1}(chr).$$

Розглянемо функції впливу (28):

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t, r, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \mathcal{H}_{(\mu);jk}^*(p, r, \rho) e^{pt} dp;$$

$$j, k = \overline{1,3}.$$

Особливими точками функцій впливу  $\mathcal{H}_{(\mu);jk}^*(p, r, \rho)$  є точки галузження  $p = -\gamma_j^2$ , ( $j = \overline{1,3}$ ) та  $p = \infty$ . Покладемо  $q_j \equiv a_j^{-1}(p + \gamma_j^2)^{1/2} = ia_j^{-1}b_j \equiv ia_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$ . Одержимо, що  $p = -(\beta^2 + k_j^2 + \gamma_j^2)$ . Позначимо  $\gamma^2 = \max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\}$  й виберемо  $k_j^2$  так, щоб  $k_j^2 + \gamma_j^2 = \gamma^2$ , тобто  $k_j^2 = \gamma^2 - \gamma_j^2$ . Якщо  $\gamma^2 = \gamma_1^2 > 0$ , то  $k_1^2 = 0$ ,  $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0$ ,  $k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$ ; якщо  $\gamma^2 = \gamma_2^2 > 0$ , то  $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \geq 0$ ,  $k_2^2 = 0$ ,  $k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \geq 0$ ; якщо  $\gamma^2 = \gamma_3^2 > 0$ , то  $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \geq 0$ ,  $k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \geq 0$ ,  $k_3^2 = 0$ . Отже, маємо  $p = -(\beta^2 + \gamma^2) \equiv e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2)$ ,  $dp = -2\beta d\beta$ .

У цьому випадку метод контурного інтегралу із залученням леми Жордана й теорему Коші [12] дозволяє привести формули (28) до розрахункових:

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t, r, \rho) = \\ = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty Im \left\{ \mathcal{H}_{(\mu);jk}^*(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2), r, \rho) \right\} \times \\ \times e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \beta d\beta; \quad j, k = \overline{1,3}. \quad (37)$$

Скористаємося відомими залежностями [16]:

$$V_{jk}^{m1}(i\bar{b}_s R_m) = -\tilde{\alpha}_{jk}^m \bar{b}_s \sin(\bar{b}_s R_m) + \\ + \tilde{\beta}_{jk}^m \cos(\bar{b}_s R_m) \equiv v_{jk}^{m1}(\bar{b}_s R_m),$$

$$V_{jk}^{m2}(i\bar{b}_s R_m) = i \left[ \tilde{\alpha}_{jk}^m b_s \cos(\bar{b}_s R_m) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\tilde{\beta}_{jk}^m \sin(\bar{b}_s R_m) \Big] \equiv i v_{jk}^{m1}(\bar{b}_s R_m), \\
\Delta_{j1}(i\bar{b}_1 R_0, i\bar{b}_1 R_1) &= i \left[ v_{11}^{01}(\bar{b}_1 R_0) v_{j1}^{12}(\bar{b}_1 R_1) - \right. \\
& \left. - v_{11}^{02}(\bar{b}_1 R_0) v_{j1}^{11}(\bar{b}_1 R_1) \right] \equiv i \delta_{j1}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1), \\
\Phi_{jk}^m(i\bar{b}_s x, i\bar{b}_s y) &= i \left[ v_{jk}^{m2}(\bar{b}_s x) \cos(\bar{b}_s y) - \right. \\
& \left. - v_{jk}^{m1}(\bar{b}_s x) \sin(\bar{b}_s y) \right] \equiv i \varphi_{jk}^m(\bar{b}_s x, \bar{b}_s y)
\end{aligned}$$

та співвідношеннями [11]

$$\begin{aligned}
P_{\nu_j^*}^{(\mu)j}(chr) &= \sin(\mu_{1j}\pi) A_{\nu_j^*}^{(\mu)j}(chr) + \\
& + \cos(\mu_{1j}\pi) B_{\nu_j^*}^{(\mu)j}(chr), \quad \nu_j^* = -1/2 + i\bar{b}_j, \\
L_{\nu_j^*}^{(\mu)j}(chr) &= A_{\nu_j^*}^{(\mu)j}(chr) - i\gamma_{(\mu)j}(\bar{b}_j) B_{\nu_j^*}^{(\mu)j}(chr), \\
j &= 1, 2.
\end{aligned}$$

Одержимо:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\nu_2^*;jk}^{(\mu)1}(chR_1, chR_2) &= -z_{(\mu)1}(\bar{b}_2) \times \\
& \times \delta_{\nu_2^*;jk}^{(\mu)1}(chR_1, chR_2); \quad z_{(\mu)1} = \cos(\mu_{11}\pi) + \\
& + i\gamma_{(\mu)1} \sin(\mu_{11}\pi); \quad \delta_{\nu_2^*;jk}^{(\mu)1}(chR_1, chR_2) = \\
& = Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)1;11}(chR_1) Y_{\nu_2^*;k1}^{(\mu)1;22}(chR_2) - \\
& - Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)1;12}(chR_1) Y_{\nu_2^*;k1}^{(\mu)1;21}(chR_2); \\
A_{(\mu)1;j} \left( e^{\pi i(\beta^2 + \gamma^2)} \right) &= -z_{(\mu)1}(\bar{b}_2) i \times \\
& \times \left[ \delta_{11}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1) \delta_{\nu_2^*;2j}^{(\mu)1}(chR_1, chR_2) - \right. \\
& \left. - \delta_{21}(\bar{b}_1 R_0, \bar{b}_1 R_1) \delta_{\nu_2^*;1j}^{(\mu)1}(chR_1, chR_2) \right] \equiv \\
& \equiv -i z_{(\mu)1}(\bar{b}_2) a_{(\mu)1;j}(\beta), \quad j = 1, 2; \\
\Delta_{(\mu)} \left( e^{\pi i(\beta^2 + \gamma^2)} \right) &= -i z_{(\mu)1}(\bar{b}_2) \left[ a_{(\mu)1;1}(\beta) \times \right. \\
& \times \left( Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)2;21}(chR_2) - i\gamma_{(\mu)2}(\bar{b}_3) Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)2;22}(chR_2) \right) - \\
& - a_{(\mu)1;2}(\beta) \left( Y_{\nu_3^*;12}^{(\mu)2;21}(chR_2) - i\gamma_{(\mu)2}(\bar{b}_3) \times \right. \\
& \quad \left. \times Y_{\nu_3^*;12}^{(\mu)2;22}(chR_2) \right) \Big] = \\
& = i z_{(\mu)1}(\bar{b}_2) \left[ \omega_{(\mu)1}(\beta) - i\gamma_{(\mu)2}(\bar{b}_3) \omega_{(\mu)2}(\beta) \right].
\end{aligned}$$

Визначимо числа

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1} c_{11,2}}{c_{21,1} c_{21,2}} shR_1, \quad a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}, \quad a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\begin{aligned}
\sigma(r) &= \theta(r - R_0) \theta(R_1 - r) \sigma_1 \cdot 1 + \\
& + \theta(r - R_1) \theta(R_2 - r) \sigma_2 shr + \theta(r - R_2) \sigma_3 shr
\end{aligned} \tag{38}$$

та спектральну щільність

$$\Omega_{(\mu)}(\beta) = \frac{\beta \gamma_{(\mu)2}(\bar{b}_3) s_{(\mu)2}(\bar{b}_3)}{\left[ \omega_{(\mu);1}(\beta) \right]^2 + \left[ \gamma_{(\mu)2}(\bar{b}_3) \omega_{(\mu);2}(\beta) \right]^2}. \tag{39}$$

У результаті виконання зазначених у рівняннях (37) операцій одержуємо:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t, r, \rho) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} V_{(\mu);j}(r, \beta) \times \\
& \times V_{(\mu);k}(\rho, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta a_k^2 \sigma_k, \quad j, k = \overline{1, 3}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Аналогічно знаходимо, що

$$\begin{aligned}
W_{(\mu);1j}(t, r) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{(\mu);1}(R_0, \beta) \times \\
& \times V_{(\mu);j}(r, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} d\beta a_1^2 \sigma_1, \quad j = \overline{1, 3}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2 \sigma_1 : c_{11,1}, \quad d_2 = a_2^2 \sigma_2 : c_{11,2},$$

$$Z_{(\mu);i2}^k(\beta) = \left( \tilde{\alpha}_{i2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{i2}^k \right) V_{(\mu);k+1}(r, \beta) \Big|_{r=R_k}; \quad i, k = 1, 2.$$

За вищезапропонованою методикою отримуємо, що

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} R_{2k}^{*j}(p, r) e^{pt} dp = \\
& = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} Z_{(\mu);12}^k(\beta) V_{(\mu);j}(r, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta d_k;
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} R_{1k}^{*j}(p, r) e^{pt} dp =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} Z_{(\mu);22}^k(\beta) V_{(\mu);j}(r, \beta) \times$$

$$\times \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta d_k, k = 1, 2.$$

Отже, обернене перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[ \sum_{m,k=1}^2 R_{(\mu);mk}^{*j}(p, r) \right] &= \\ &= L^{-1} \left[ \sum_{k=1}^2 R_{(\mu);1k}^{*j}(p, r) \right] + \\ &+ L^{-1} \left[ \sum_{k=1}^2 R_{(\mu);2k}^{*j}(p, r) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^2 d_k \left[ -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Z_{(\mu);22}^k(\beta) \times \right. \\ &\quad \times V_{(\mu);j}(r, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta + \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Z_{(\mu);12}^k(\beta) V_{(\mu);j}(r, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

У результаті підстановки одержаних виразів функцій Гріна  $W_{(\mu);1j}(t, r)$  згідно формули (41), функцій впливу  $\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t, r, \rho)$  згідно формули (40) та функцій Гріна умов спряження згідно формули (43) у формули (25) одержуємо інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку параболічної крайової задачі спряження (1)-(4):

$$\begin{aligned} u_j(t, r) &= \int_0^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{(\mu);1}(R_0, \beta) \times \right. \\ &\quad \times V_{(\mu);j}(r, \beta) e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \Big] a_1^2 \sigma_1 \times \\ &\quad \times \left[ g_0(\tau) + \delta_+(\tau) (\delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)) \right] d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \int_{R_0}^{R_1} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} V_{(\mu);j}(r, \beta) \times \right. \\ &\quad \times V_{(\mu);1}(\rho, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \Big) \left[ f_1(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_1(\rho) \right] \times \\ &\quad \times \sigma_1 d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\infty V_{(\mu);j}(r, \beta) \times \right. \\ &\quad \times V_{(\mu);2}(\rho, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} d\beta \Big) \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ f_2(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_2(\rho) \right] \sigma_2 d\rho d\tau + \quad (44)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^t \int_{R_2}^\infty \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\infty V_{(\mu);j}(r, \beta) V_{(\mu);3}(\rho, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) \times \right. \\ &\quad \times e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} d\beta \Big) \left[ f_3(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_3(\rho) \right] \sigma_3 d\rho d\tau + \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 d_k \left[ \int_0^t \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} Z_{(\mu);12}^k(\beta) \times \right. \right. \\ &\quad \times V_{(\mu);j}(r, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \Big) \left( \omega_{2k}(\tau) + \psi_{2k} \delta_+(\tau) \right) d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} Z_{(\mu);22}^k(\beta) V_{(\mu);j}(r, \beta) \times \right. \\ &\quad \times \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \Big) \left( \omega_{1k}(\tau) + \psi_{1k} \delta_+(\tau) \right) d\tau \Big]; j = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Підсумком викладеного вище є така теорема.

**Теорема.** Нехай виконуються умови:

- 1) функції  $f_j(t, r)$ ,  $g_0(t)$  та  $\omega_{jk}(t)$  є оригіналами за Лапласом щодо змінної  $t$ ;
- 2) функції  $f_j(t, r)$  та  $g_j(r)$  задовольняють умови спряження;
- 3) функції  $f(t, r) = \{f_1(t, r), f_2(t, r), f_3(t, r)\}$  та  $g(r) = \{g_1(r), g_2(r), g_3(r)\}$  обмежені, неперервні, абсолютно сумовні з ваговою функцією  $\sigma(r)$  і мають обмежену варіацію на множині  $I_2^+$ ;
- 4) функція  $F(t, r) = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} F[f_1(t, r)], \frac{\partial}{\partial r} \Lambda_{(\mu)_1}[f_2(t, r)], \frac{\partial}{\partial r} \Lambda_{(\mu)_2}[f_3(t, r)] \right\}$  неперервно диференційовна за  $t$  й неперервна за  $r$  на множині  $D_2^+$ ;
- 5) справджується нерівність (20).

Тоді в класі неперервно диференційовних за змінною  $t$  і двічі неперервно диференційовних за змінною  $r$  на множині  $D_2^+$  функцій  $u(t, r) = \{u_1(t, r), u_2(t, r), u_3(t, r)\}$ , що задовольняють умови 1), 3), параболічна мішана задача (1)-(4) має єдиний обмежений розв'язок, який визначається за формулою (44).

**Зауваження 3.** Наявність у формулі (44) доданка

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{(\mu);1}(R_0, \beta) V_{(\mu);j}(r, \beta) \times \\ & \times e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta a_1^2 \sigma_1 \left[ \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \right. \\ & \left. + \gamma_{11}^0 g_1(R_0) \right] + \sum_{k=1}^2 d_k \left[ \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \times \right. \right. \\ & \times Z_{(\mu);12}^k(\beta) V_{(\mu);j}(r, \beta) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \Big) \psi_{2k} - \\ & \left. - \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} Z_{(\mu);22}^k(\beta) V_{(\mu);j}(r, \beta) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \right) \psi_{1k} \right], j = \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (45)$$

показує вплив м'якості межі середовища, в якому моделюються еволюційні процеси (поширення тепла, дифузії).

**Зауваження 4.** Доданка (45) можна уникнути, якщо перейти до нових початкових даних  $\varphi_j(r)$  за формулами

$$g_j(r) = \varphi_j(r) + a_j r + b_j, j = \overline{1, 3}, a_3 = 0,$$

і знайти коефіцієнти  $a_j$  ( $j = 1, 2$ ) та  $b_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) із алгебраїчної системи з п'яти рівнянь:

$$\begin{aligned} & (\delta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 R_0) a_1 + \gamma_{11}^0 b_1 = \\ & = \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0) \equiv \psi_0, \quad (46) \\ & \left[ (\delta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k R_k) a_k + \gamma_{j1}^k b_k \right] - \\ & - \left[ (\delta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k R_k) a_{k+1} + \gamma_{j2}^k b_{k+1} \right] = \psi_{jk}; j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

При накладених умовах на коефіцієнти алгебраїчна система (46) завжди має єдиний розв'язок.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В.В. Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
2. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М.І. Матійчук. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

3. *Дейнека В.С.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.

4. *Сергиенко И.В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.

5. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

6. *Конет І.М.* Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.

7. *Конет І.М.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.

8. *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.

9. *Громик А.П.* Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011. – 200 с.

10. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

11. *Конет І.М.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.

12. *Лаврентьев М.А.* Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

13. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

14. *Ленюк М.П.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.

15. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

16. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.