УДК 517.983

©2013 р. Лінчук С.С.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗАСТОСОВНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ВІДНОСНО Q-ПОХІДНОЇ

Одержано необхідні та достатні умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q-похідної до просторів функцій, аналітичних в кругових областях.

We obtain necessary and sufficient conditions for the applicability of differential operators of infinite order with respect to the q-derivative to the spaces of analytic functions in circular domains.

Нехай q – довільне фіксоване комплексне число, яке відмінне від 1. q-похідною функції f називається функція $(D_q f)(z) = \frac{f(qz)-f(z)}{qz-z}$. q-похідна є певним різницевим аналогом звичайної похідної, причому $\lim\limits_{q\to 1}(D_q f)(z) = f'(z)$. Поняття q - похідної визначене в праці [1] і тому цю похідну іноді називають також похідною Джексона. Починаючи з 80-х років минулого століття значно активізувалися дослідження властивостей q – похідної та її застосувань у різних розділах математики [2].

Через A_R, $0 < R \le \infty$, позначимо простір усіх аналітичних в крузі $|z| < R$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності. При $|q| > 1$ оператор D_q лінійно та неперервно діє в просторі цілих функцій A_∞, а при $|q| < 1$ – в просторах A_R, де $0 < R \le \infty$. Нехай $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ – послідовність функцій з простору A_R. В цій статті вивчаються умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q - похідної виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) \left(D_q^n f\right)(z) \tag{1}$$

до простору A_R. Нагадаємо [3],[4], що оператор нескінченного порядку (1) називається застосовним до простору A_R, якщо для довільної функції $f \in A_R$ ряд (1) збігається за топологією простору A_R. Оператор D_q є частинним випадком оператора узагальненого диференціювання. Нехай $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність ненульових комплексних чисел. Оператор узагальненого диференціювання D_α діє на степені z за правилом: $D_\alpha z^n = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$, $n \ge 1$ і $D_{\alpha_1} = 0$. В [4], [5] вивчені умови застосовності до простору A_R диференціальних операторів нескінченного порядку виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) \left(D_\alpha^n f\right)(z). \tag{2}$$

Зокрема, в [4] доведене наступне твердження.

Теорема А [4]. *Нехай оператор узагальненого диференціювання D_α лінійно та неперервно діє в просторі A_R. Для того, щоб диференціальний оператор нескінченного порядку (2) був застосовним до простору A_R необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall r_2 < R\ \exists r_1 < R\ \exists C > 0\ \forall n = 0, 1, \ldots\ \forall k \ge n$$

$$||\psi_n||_{r_2} \le C \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k-n}|} \frac{r_1^k}{r_2^{k-n}}. \tag{3}$$

Тут $||f||_r = \max\limits_{|z|\le r} |f(z)|$ для $f \in A_R$ і $0 < r < R$. Оскільки $D_q z^n = [n]_q z^{n-1}$, де $[n]_q = \frac{q^n-1}{q-1}$, $n \ge 1$, то $D_q = D_\alpha$ з $\alpha_n = \frac{1}{[n]_q!}$, де $[n]_q! = [1]_q[2]_q \ldots [n]_q$. Надалі вважатимемо, що $[0]_q! = 1$. Тому для застосовності оператора нескінченного порядку (1) до простору A_R необхідно і достатньо, щоб

$$\forall r_2 < R\ \exists r_1 < R\ \exists C > 0\ \forall n = 0, 1, \ldots\ \forall k \ge n$$

$$||\psi_n||_{r_2} \le C \frac{|[k-n]_q!|}{|[k]_q!|} \frac{r_1^k}{r_2^{k-n}}. \tag{4}$$

Вивчимо тепер умови застосовності оператора (1) до простору цілих функцій.

Теорема 1. *Нехай* $|q| > 1$. *Для застосовності оператора* (1) *до простору* A_∞ *необхідно і достатньо, щоб цей оператор мав скінченний порядок.*

Доведення. Припустимо, що оператор (1) є застосовним до простору A_∞. Тоді умова (4) виконується. Зафіксуємо довільне $r_2 < \infty$ і виберемо для нього $r_1 < \infty$ та $C > 0$ за умовою (4). При $k \to \infty$ маємо

$$\sqrt[k]{|[k]_q!|} = \frac{|q|^{\frac{k+1}{2}}}{|q-1|}(1+o(1)). \qquad (5)$$

Візьмемо довільне η таким, щоб $0 < \eta < 1$. Використовуючи (5), одержимо, що існує число $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що при $k \geq k_0$:

$$\frac{|q|^{\frac{k(k+1)}{2}}}{|q-1|^k}(1-\eta)^k \leq |[k]_q!| \leq \frac{|q|^{\frac{k(k+1)}{2}}}{|q-1|^k}(1+\eta)^k.$$

Тоді для довільного $n \geq 0$ при $k \geq n + k_0$ матимемо

$$||\psi_n||_{r_2} \leq Ca_n\left(\frac{r_1}{r_2}\frac{1+\eta}{1-\eta}\frac{1}{|q|^n}\right)^k, \qquad (6)$$

де $a_n = \frac{r_2^n|q|^{\frac{n(n-1)}{2}}|q-1|^n}{(1+\eta)^n}$. Нехай $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{r_1}{r_2}\frac{1+\eta}{1-\eta}\frac{1}{|q|^n} < 1$. Тоді для довільного фіксованого $n \geq n_0$ з використанням (6) матимемо, що

$$||\psi_n||_{r_2} \leq Ca_n \inf_{k \geq k_0+n}\left(\frac{r_1}{r_2}\frac{1+\eta}{1-\eta}\frac{1}{|q|^n}\right)^k = 0.$$

Тому $\psi_n(z) \equiv 0$ при $n \geq n_0$. Необхідність умов теореми 1 доведено, а їх достатність є очевидною.

Наслідок 1. *Нехай* $|q| > 1$. *Для того, щоб оператор* T *лінійно та неперервно діяв у просторі* A_∞ *і був переставним з оператором* D_q *необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді*

$$T = \sum_{n=0}^{n_0} c_n D_q^n,$$

де n_0 *– деяке натуральне число, а* c_n, $n = \overline{0, n_0}$, *– деякі комплексні числа.*

Таким чином, при $|q| > 1$ комутант оператора D_q у просторі A_∞ збігається з множиною многочленів відносно D_q. Тому при $|q| > 1$ оператор D_q у просторі A_∞ є мінімально комутуючим оператором [6].

Розглянемо тепер випадок, коли $|q| < 1$.

Теорема 2. *Нехай* $|q| < 1$ *і* $0 < R \leq \infty$. *Для застосовності диференціального оператора нескінченного порядку відносно* q *– диференціювання* (1) *до простору* A_R *необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:*

$$\forall r_2 < R \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{||\psi_n||_{r_2}} < |q-1|R. \qquad (7)$$

Доведення. Необхідність. Нехай (1) застосовний до простору A_R. Тоді (4) виконується. Візьмемо довільне $r_2 < R$ і нехай $C > 0$ та $r_1 < R$ знайдені для цього r_2 за умовою (4). Покладаючи в (4) $k = n$, одержимо, що при $n \geq 0$

$$||\psi_n||_{r_2} \leq \frac{C}{|[n]_q!|}r_1^n. \qquad (8)$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[n]_q!|} = \frac{1}{|q-1|}, \qquad (9)$$

то з (8) випливає, що $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{||\psi_n||_{r_2}} \leq |q-1|r_1 < |q-1|R$ і умова (7) виконується.

Достатність. Нехай (7) виконується. Візьмемо довільне число $r_2 < R$. Тоді $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|[n]_q!|||\psi_n||_{r_2}} < R$. Виберемо $\tilde{r}_2$ таким, щоб $max\{r_2; \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|[n]_q!|||\psi_n||_{r_2}}\} < \tilde{r}_2 < R$. Тоді існує $C_1 > 0$ таке, що для всіх $n \geq 0$ виконується нерівність $||\psi_n||_{r_2} \leq C_1\frac{\tilde{r}_2^n}{|[n]_q!|}$. Візьмемо $\varepsilon \in (0,1)$ таким, щоб $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\tilde{r}_2 < R$. Тоді з рівності (9) випливає, що існують сталі $C_2, C_3 > 0$ такі, що для довільного $n \geq 0$ виконуються нерівності

$$C_2\frac{(1-\varepsilon)^n}{|1-q|^n} < |[n]_q!| < C_3\frac{(1+\varepsilon)^n}{|1-q|^n}.$$

Тому при $n \geq 0$ матимемо

$$||\psi_n||_{r_2} \leq \frac{C_1\tilde{r}_2^n}{|[n]_q!|} = \frac{C_1|[k-n]_q!|}{|[k]_q!|}\frac{|[k]_q!|\tilde{r}_2^n}{|[k-n]_q!||[n]_q!|} \leq$$

$$\leq \frac{C_1C_3}{C_2^2}\frac{|[k-n]_q!|}{|[k]_q!|}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^k\frac{\tilde{r}_2^k}{\tilde{r}_2^{k-n}} =$$

$$= C\frac{|[k-n]_q!|}{|[k]_q!|}\frac{r_1^k}{\tilde{r}_2^{k-n}} \leq C\frac{|[k-n]_q!|}{|[k]_q!|}\frac{r_1^k}{r_2^{k-n}},$$

де $C = \frac{C_1C_3}{C_2^2}$ і $r_1 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\tilde{r}_2$. Таким чином, умова (4) виконується. Тому оператор (1) є застосовним до простору A_R.

Наслідок 2. *Нехай $|q| < 1$ і $0 < R \leq \infty$. Тоді лінійний неперервний оператор $T : A_R \longrightarrow A_R$ буде переставним з оператором q – диференціювання D_q тоді і тільки тоді, коли він зображається у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку відносно оператора D_q зі сталими коефіцієнтами виду*

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D_q^n,$$

де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < |q-1|R.$$

Використовуючи умови еквівалентності операторів узагальненого диференціювання у просторі A_R [7] отримуються умови еквівалентності двох різних операторів q – диференціювання у просторі A_R.

Твердження 1. *Нехай $(|q_1|-1)(|q_2|-1) \neq 0$. Для того, щоб оператор D_{q_1} був еквівалентним у просторі A_∞ до оператора D_{q_2} необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з наступних умов:*

1) $|q_1| = |q_2| > 1$;

2) $|q_1| < 1$ *і* $|q_2| < 1$.

Твердження 2. *Нехай $|q_1| < 1$, $|q_2| < 1$ і $0 < R < \infty$. Для того, щоб оператор D_{q_1} був еквівалентним у просторі A_R до оператора D_{q_2} необхідно і достатньо, щоб $|q_1 - 1| = |q_2 - 1|$.*

Цікаво було б вивчити умови еквівалентності у просторі A_R оператора n-го порядку відносно q – диференціювання до оператора D_q^n.

Якщо через $\mathcal{J}_q$ позначити оператор q – інтегрування, який є правим оберненим до оператора D_q, то результати цієї статті легко розповсюджуються також для оператора $\mathcal{J}_q$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *F. H. Jackson* On q-functions and a certain difference operator // Trans. Roy. Soc. Edin. – 1908. – №46. – P. 253-281.

2. *G. Bangerezako* An Introduction to q-Difference Equations. – Preprint, Miramare-Trieste. 2011. – 79 p.

3. *Ю.Ф. Коробейник* Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. – 1983. – 155с.

4. *С.С. Линчук* О применимости дифференциальных и интегральных операторов бесконечного порядка // Деп. в ВИНИТИ 13 апреля 1982, №1799-82. – Черновцы, 1982. – 25 с.

5. *С. С. Линчук* О представлении линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций многих переменных. – 1984. – **35**. – №5. – С.721-727.

6. *I. Rajchinov* On some commutation properties of the algebra of the linear operators acting in spaces of analytic functions I. // God. Vissh. Uchebn. Zaved., Prilozhna Mat. – 1979. – **15**. №3. – P. 27-40.

7. *С.С. Лінчук, Ю.С. Лінчук* Оператори у просторах аналітичних функцій. - Чернівці: Рута, 2011. - 147 с.