УДК 517.983

©2013 р. **Лінчук Ю.С.**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДЕРИВАЦІЙНІ ПАРИ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Описано всі пари лінійних операторів, що діють у просторі цілих функцій і задовольняють співвідношення, яке є операторним аналогом рівняння Рубела в класі функціоналів.

We describe all pairs of linear operators that act in the spaces of entire functions and satisfy a relation that is an operator analog of the Rubel equation in the class of functionals.

Питання зображення лінійних функціоналів та операторів, що діють у різних просторах аналітичних функцій і задовольняють співвідношення, які в певному сенсі узагальнюють формулу диференціювання добутку двох функцій, вивчалися в роботах багатьох математиків.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [1]. В [2] Л.А. Рубел поставив і розв'язав задачу, про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f) \qquad (1)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше Н.Р. Нандакумар в [3] та Л. Зальцман в [4] різними способами розв'язали задачу Рубела в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Подальші дослідження стосовно опису пар лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення, подібні до (1), здійснені в [5]–[6]. Ці результати та їх узагальнення систематизовані в [7]. Узагальнене рівняння Рубела було досліджене в [8].

Надалі в різних роботах розглядалися операторні модифікації співвідношення (1) в певних класах операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В працях [9]-[10] доведено, що кожна деривація $D : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, тобто адитивний на $\mathcal{H}(G)$ оператор, який задовольняє співвідношення

$$D(fg) = fD(g) + gD(f)$$

для довільних двох функцій $f, g \in \mathcal{H}(G)$, має вигляд: $(Df)(z) = \varphi(z)f'(z)$, де φ – довільна функція з простору $\mathcal{H}(G)$. Зазначимо, що лінійним дериваціям на просторі неперервних функцій $C[0, 1]$ присвячена робота [11].

Наступним етапом досліджень став розгляд певних мультиплікативних співвідношень для різних класів операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В [12] Р. Баркел та С. Саекі описали всі адитивні оператори $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, які для деякої відмінної від сталої функції $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$ задовольняють співвідношення

$$T(zf) = \varphi T(f)$$

для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$.

В роботі [13] Н.Р. Нандакумар описав всі адитивні оператори $M : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, які задовольнять співвідношення

$$M(fg) = M(f)M(g),$$

при цьому довівши, що кожен з таких операторів необхідно є лінійним і неперервним. В [14] він продовжив дослідження мультиплікативних співвідношень у випадку, коли $M : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$.

Природним узагальненням наведених аспектів досліджень дериваційних співвідношень для функціоналів та операторів, що діють в різних просторах аналітичних функцій, є збільшення кількості невідомих операторів в операторних рівняннях. У зв'язку з цим виникає питання про знаходження всіх пар лінійних операторів A та B, які діють у просторі цілих функцій $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ і задовольняють операторне рівняння Рубела

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Bg)(z) + (Ag)(z)(Bf)(z) \quad (2)$$

для довільних цілих функцій f та g. Зазначимо також, що всі розв'язки рівняння (2) в класі лінійних неперервних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$ були описані у [15].

Надалі нам знадобиться допоміжне твердження стосовно опису мультиплікативних лінійних операторів на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (див., наприклад, [13]). Заради повноти, ми сформулюємо і наведемо нове доведення цього твердження.

Лема. *Для того, щоб лінійний на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператор A задовольняв співвідношення*

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Ag)(z)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ при $z \in \mathbb{C}$, необхідно і достатньо, щоб $A = 0$, або $Af = f \circ \psi$ для $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Доведення. Нехай лінійний на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператор A задовольняє співвідношення леми. Надалі через $e(z)$ позначатимемо функцію $e(z) = z$. Для довільної точки $z \in \mathbb{C}$ формулою $L_z(f) = (Af)(z)$ визначається лінійний мультиплікативний функціонал L_z на $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Використовуючи опис лінійних мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, (див., наприклад, [6]) одержуємо, що $L_z = 0$, або $L_z(f) = f(z_0)$, де $z_0 = L_z(e)$. Нехай $L_z \neq 0$ і $A(e) = \psi$. Тоді $z_0 = \psi(z)$, і тому $L_z(f) = f(\psi(z))$, тобто $(Af)(z) = f(\psi(z))$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Нехай $U = \{z \in \mathbb{C} : L_z = 0\}$. Якщо $U = \mathbb{C}$, то $A = 0$. У випадку $U = \varnothing$ маємо, що $(Af)(z) = (f \circ \psi)(z)$ при $z \in \mathbb{C}$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Покажемо, що множина U може набувати лише два наведені вище значення. Дійсно, якби $U \neq \mathbb{C}$ і $U \neq \varnothing$, то для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ми мали б, що

$$(Af)(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \in U; \\ f(\psi(z)), \text{ якщо } z \in \mathbb{C} \setminus U. \end{cases}$$

Якщо позначити $h(z) = A(1)$, то ми одержуємо, що функція $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ набуває лише два значення: 0 та 1, що неможливо. Необхідність умов леми доведено, а їх достатність є очевидною.

Нехай лінійні на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператори A та B задовольняють співвідношення (2). Позначимо $a(z) = A(1)$, $b(z) = B(1)$. Покладаючи в (2) $f = g = 1$, одержимо, що $a(z)(1 - 2b(z))) = 0$ при $z \in \mathbb{C}$. Оскільки функції $a(z)$ та $b(z)$ є цілими, то за теоремою єдиності для аналітичних функцій звідси випливає, що $b(z) \equiv \frac{1}{2}$ або $a(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $a(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Тоді $b(z) \equiv \frac{1}{2}$ при $z \in \mathbb{C}$. Покладаючи в (2) $g(z) = 1$, одержимо, що $(Af)(z) = 2a(z)(Bf)(z)$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ при $z \in \mathbb{C}$. Тоді з (2) отримуємо, що $a(z)(2(B(fg)(z) - 4(Bf)(z)(Bg)(z)) = 0$ для довільних цілих функцій f та g при $z \in \mathbb{C}$. Оскільки $a(z) \not\equiv 0$ в G, то звідси випливає, що $2(B(fg))(z) = 2(Bf)(z)2(Bg)(z)$, $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$. Тоді $2B$ є ненульовим мультиплікативним оператором, який діє в просторі цілих функцій. За лемою одержуємо, що $B(f) = \frac{1}{2}(f \circ \psi)$, де ψ – деяка ціла функція. Тому $A(f) = a \cdot (f \circ \psi)$. Таким чином, у випадку, коли $a(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$, пара операторів A та B визначається наступними формулами: $A(f) = a \cdot (f \circ \psi)$, $B(f) = \frac{1}{2}(f \circ \psi)$ де $a, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Нехай тепер $a(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Підставляючи у (2) $g = 1$, одержуємо, що $A = 0$ або $b(z) \equiv 1$ в $\mathbb{C}$. Якщо $A = 0$, то для будь-якого лінійного на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператора B пара операторів $A = 0$, B задовольняє співвідношення (2). Надалі вважатимемо, що $A \neq 0$. Тоді $b(z) \equiv 1$ в $\mathbb{C}$.

Отже, нехай $a(z) \equiv 0$ і $b(z) \equiv 1$ в $\mathbb{C}$. Візьмемо довільне $z \in \mathbb{C}$ і нехай $L_z(f) = (A(f))(z)$ і $M_z(f) = (B(f))(z)$. Тоді з (2) випливає, що пара лінійних функціоналів L_z та M_z задовольняє співвідношення

$$L_z(fg) = L_z(f)M_z(g) + L_z(g)M_z(f) \quad (3)$$

для довільних цілих функцій f та g. Крім того, $L_z(1) = 0$ і $M_z(1) = 1$. Тоді з [3] (див.

також [8]) випливає, що пара функціоналів L_z та M_z визначається однією із наступних трьох умов:

1) $L_z = 0$, M_z – довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(\mathbb{C})$;

2) $L_z(f) = C\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$, $M_z(f) = \frac{1}{2}(f(z_1) + f(z_2))$, де $C, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, причому $z_1 \neq z_2$;

3) $L_z(f) = Cf'(z_1)$, $M_z(f) = f(z_1)$, де $C, z_1 \in \mathbb{C}$.

Через S позначимо множину тих точок $z \in \mathbb{C}$, для яких пара функціоналів L_z та M_z визначаються формулами 1). Тоді $(Af)(z) = 0$ для довільної цілої функції f і для довільної точки $z \in S$. Через $Im(A)$ позначимо множину значень оператора A. Оскільки $A \neq 0$, то існує функція $\alpha \in Im(A)$, яка не дорівнює тотожному нулеві в $\mathbb{C}$. Тоді множина S є підмножиною множини нулів функції $\alpha(z)$ в $\mathbb{C}$. Тому множина S є не більш ніж зліченною і не має скінченних граничних точок. Для довільної точки z із S позначимо $m_z = \min\{m \in \mathbb{N} : g(z) = g'(z) = \ldots = g^{(m-1)}(z) = 0, \forall g \in Im(A)\}$. З визначення числа m_z випливає, що для кожної точки $z \in S$ існує функція $g_z \in Im(A)$, для якої $g_z^{(m_z)}(z) \neq 0$. Нехай h – довільна ціла функція, множина нулів якої збігається з множиною S, причому кратність довільного нуля $z \in S$ функції $h(z)$ дорівнює m_z. Функція h існує за теоремою Вейєрштраса (див. [16], стор. 272). Для довільної цілої функції f функція $\frac{1}{h(z)}(Af)(z)$ є також цілою, оскільки кожна скінченна особлива точка цієї функції є усувною. Тому формулою $(A_1f)(z) = \frac{1}{h(z)}(Af)(z)$ визначається лінійний оператор A_1 на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Рівність (2) можна записати у вигляді

$$h(z)(A_1(fg))(z) =$$

$$= h(z)(A_1f)(z)(Bg)(z)+h(z)(A_1g)(z)(Bf)(z),$$

$f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$. При $z \in \mathbb{C}\backslash S$ звідси випливає, що

$$(A_1(fg))(z) =$$

$$= (A_1f)(z)(Bg)(z) + (A_1g)(z)(Bf)(z) \quad (4)$$

для $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Оскільки кожна точка з множини S є ізольованою, то співвідношення (4) є правильним для довільних функцій f та g із $H(\mathbb{C})$ при $z \in \mathbb{C}$. Для довільної точки $z \in G$ позначимо $L'_z(f) = (A_1(f))(z)$. Тоді з (4) випливає, що пара лінійних функціоналів L'_z та M_z задовольняє співвідношення виду (3), в якому L_z замінене на L'_z. Крім того, $L'_z(1) = 0$ і $M_z(1) = 1$. Оскільки для довільної точки $z \in \mathbb{C}$ функціонал $L'_z \neq 0$, то пара функціоналів L'_z та M_z визначаються однією з вищенаведених формул типу 2) або 3).

Через V позначимо множину тих точок $z \in \mathbb{C}$, для кожної з яких пара функціоналів L'_z та M_z визначається формулами виду 2). Нехай $V \neq \varnothing$ і $z \in V$. Тоді $L'_z(f) = C\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$, $M_z(f) = \frac{1}{2}(f(z_1) + f(z_2))$, де $C, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Позначимо $A_1(e) = a_1$, $a_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Тоді $C = L'_z(e) = a_1(z)$. Нехай $B(e) = b$ і $B(e^2) = b_1$, $b, b_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Тоді $M_z(e) = b(z) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ і $M_z(e^2) = b_1(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)$. З цих рівностей знаходимо, що $z_1 = b(z) + \sqrt{b_1(z) - b^2(z)}$, $z_2 = b(z) - \sqrt{b_1(z) - b^2(z)}$, де розглядається одне із значень кореня $\sqrt{b_1(z) - b^2(z)}$. Нехай цілі функції u та v визначаються наступними формулами: $u(z) = b(z)$ і $v(z) = b_1(z) - b^2(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Таким чином, одержуємо, що

$L'_z(f) = a_1(z)\frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)-f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}}$,

$M_z(f) = \frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)+f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2}$.

Зауважимо, що $v(z) \neq 0$, оскільки $z \in V$.

Нехай $V \neq \mathbb{C}$ і $z \in \mathbb{C} \setminus V$. Тоді $L'_z(f) = Cf'(z_1)$ і $M_z(f) = f(z_1)$, де $z_1 \in \mathbb{C}$. Тому

$$L'_z(f) = a_1(z)f'(u(z)),$$

$$M_z(f) = f(u(z)),$$

де $a_1 = A_1(e)$, $u = B(e)$.

Позначимо $\varphi(z) = h(z)a_1(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Враховуючи визначення функціоналів L'_z та M_z і те, що $(Af)(z) = h(z)(A_1f)(z)$, $z \in \mathbb{C}$, одержуємо, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$(Af)(z) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(z)\frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)-f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}}, \text{при } z \in V, \\ \varphi(z)f'(u(z)), \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus V; \end{cases} \quad (5)$$

$$(Bf)(z) =$$

$$= \begin{cases} \frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)+f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2}, \text{ при } z \in V, \\ f(u(z)), \text{ при } z \in \mathbb{C} \setminus V. \end{cases} \tag{6}$$

Оскільки $B(e^2) = b_1$, то з формули (6) випливає, що

$$b_1(z) = \begin{cases} u^2(z) + v(z), \text{ якщо } z \in V, \\ u^2(z), \text{ якщо } z \in \mathbb{C} \setminus V. \end{cases} \tag{7}$$

Функція b_1 є цілою, тому з (7) випливає, що множина $\mathbb{C} \setminus V$ збігається з множиною нулів функції $v(z)$.

Якщо ж $V = \varnothing$, то $v \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, і з формул (5) та (6) випливає, що $A(f) = \varphi \cdot (f' \circ u)$, $B(f) = f \circ u$, де $\varphi, u \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Таким чином, ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема. *Для того, щоб лінійні на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператори A та B задовольняли співвідношення (2), необхідно і достатньо, щоб пара цих операторів визначалася однією з наступних умов:*

1) $A = 0$, B *– довільний лінійний оператор на $\mathcal{H}(\mathbb{C})$;*

2) $A(f) = \varphi \cdot (f \circ \psi)$; $B(f) = \frac{1}{2} f \circ \psi$, *де* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$;

3) $A(f) = \varphi \cdot (f' \circ \psi)$, $B(f) = f \circ \psi$, *де* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$;

4) *оператори A та B визначаються формулами* (5) *та* (6), *в яких $\varphi, u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, причому $v \not\equiv 0$, а множина $\mathbb{C} \setminus V$ збігається з множиною нулів функції $v(z)$.*

Доведення. Достатність. Якщо оператори A та B визначаються однією з умов 1)–3) то вони лінійно діють у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ і задовольняють співвідношення (2). Нехай тепер оператори A та B визначаються умовою 4). Покажемо спочатку, що ці оператори діють в $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Доведення проведемо для оператора A. Для довільної цілої функції f при $z \in V$ маємо

$$(Af)(z) = \frac{\varphi(z)}{2\sqrt{v(z)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times$$

$$\times \left(\left(u(z) + \sqrt{v(z)} \right)^n - \left(u(z) - \sqrt{v(z)} \right)^n \right) =$$

$$= \frac{\varphi(z)}{2\sqrt{v(z)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{v(z)} \right)^k \times$$

$$\times u(z)^{n-k} (1 + (-1)^{k+1}) = \varphi(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \left(v(z)\right)^l \left(u(z)\right)^{n-2l-1}.$$

При $z \in \mathbb{C} \setminus V$ отримуємо, що

$$(Af)(z) = \varphi(z) f'(u(z)) =$$

$$= \varphi(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} \left(u(z)\right)^{n-1}.$$

Оскільки $v(z) = 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus V$, то з цих рівностей одержуємо, що для довільної цілої функції f при $z \in \mathbb{C}$ маємо

$$(Af)(z) = \varphi(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \left(v(z)\right)^l \left(u(z)\right)^{n-2l-1}. \tag{8}$$

Покажемо, що оператор A діє в просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Для цього достатньо перевірити, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ функція

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \left(v(z)\right)^l \left(u(z)\right)^{n-2l-1} \tag{9}$$

є цілою. Нехай r – довільне додатнє число. Позначимо $\max\limits_{|z| \le r} |v(z)| = a$, $\max\limits_{|z| \le r} |u(z)| = b$. Виберемо число c таким, щоб $c > a + b$. За нерівностями Коші для тейлорівських коефіцієнтів цілої функції $f(z)$, маємо що $\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \le \frac{M(c)}{c^n}$, $n = 0, 1, \ldots$, де $M(c) = \max\limits_{|z|=c} |f(z)|$. Тому

$$\max_{|z| \le r} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \left(v(z)\right)^l \left(u(z)\right)^{n-2l-1} \right| \le$$

$$\le \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} a^l b^{n-2l-1} \le$$

$$\leq \frac{M(c)}{c^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = M(c)\left(\frac{a+b}{c}\right)^n,$$

$n = 1, 2, \ldots$. Оскільки $c > a+b$, то звідси випливає, що ряд в правій частині формули (9) збігається рівномірно в крузі $|z| \leq r$. В силу довільності r, одержуємо, що цей ряд збігається рівномірно на довільній компактній підмножині з $\mathbb{C}$. Оскільки u та v є цілими функціями, то за теоремою Вейєрштрасса про ряди з аналітичних функцій одержуємо, що функція $F(z)$, яка визначається формулою (9), є цілою. Тому оператор A діє в просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Подібним чином переконуємося в тому, що оператор B також діє в $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Оператори A та B є лінійними. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що вони задовольняють співвідношення (2). Теорема доведена.

З доведеної теореми, наприклад, випливає, що для довільної цілої функції φ та довільної цілої функції v, яка не має нулів в $\mathbb{C}$, формулами

$$(Af)(z) = \varphi(z)\frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)-f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}}$$

$$(Bf)(z) = \frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)+f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2}$$

визначаються лінійні на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператори A та B, які задовольняють (2).

Зауваження. *Оператори A та B, які визначаються однією з умов 2)–4) доведеної теореми, неперервно діють у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Тому множина розв'язків рівняння (2) в класі ненульових лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, описується однією із формул 2)–4). В іншій формі та іншим методом всі лінійні неперервні оператори A та B, що діють у просторі цілих функцій і задовольняють рівність (2), описані в [15].*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math.–1953.–**191**.– P.30-49.

2. *L. A. Rubel* Derivation pairs on the holomorphic functions // Funk. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 225-227.

3. *N. R. Nandakumar* A Note on Derivation Pairs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – №21. – P. 535–539.

4. *L. Zalcman* Derivation pairs on algebras of analytic functions // J. Func. Anal. – 1970. – **5**. – №3. – P. 329–333.

5. *N. R. Nandakumar* A note on the functional equation $M(fg) = M(f)M(g) + L(f)L(g)$ on $H(G)$ // Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari. – 1998. – **68**. – P. 13–17.

6. *Pl. Kannappan, N. R. Nandakumar* On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain // Aequationes Mathematicae – 2001.– **61.** – №3. – P. 233-238.

7. *Pl. Kannappan* Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009. – 810 p.

8. *Лінчук Ю.С.* Узагальнене рівняння Рубела // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2011. – **1**. – №4. – С. 88-90.

9. *J. Becker* A note on derivations of algebras of analytic functions // J. Reine Angew. Math. – 1978. – **297**. – P. 211-213.

10. *N.R. Nandakumar* An application of Nienhuys-Thiemann s theorem to ring derivations on H(G) // Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch – 1988. – **91**. – P. 199-203

11. *Y. Watatani* Derivations on continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **79**. – №2. – P. 206

12. *R. B. Burckel, S. Saeki* Additive mappings on rings of holomorphic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – **89**. – №1. – P. 79-85

13. *N.R. Nandakumar* Ring homomorphisms on H(G) // Int. J. Math. Math. Sci. – 1990. – **13**. – №2. – P. 393-396.

14. *N.R. Nandakumar* Ring homomorphisms on algebras of analytic functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. – 1990. – **44**. – P. 37-43.

15. *Лінчук Ю.С.* Операторне узагальнення одного результата Рубела // Укр. мат. журнал.– 2011. – **63**. – №12.– С 1710-1716.

16. *А.И. Маркушевич* Теория аналитических функций. Том 2. – М.: Наука, 1968.– 624 с.

УДК 517.51

©2013 р. В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинський державний фінансово-економічний університет

ІНДУКТИВНІ ГРАНИЦІ, ПОРОДЖЕНІ ПАРОЮ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРІВ

Введені індуктивні границі $[E, F]$, породжені парою нормованих просторів, таких, що тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, і досліджено коли індуктивна границя $[E, F]$ буде не майже регулярною чи строгою та коли $[E, F]$ буде сильно σ-метризовним простором.

We introduce inductive limits $[E, F]$ generated by a pair of normed spaces, such that the identity embedding $F \hookrightarrow E$ is continuous. We also investigate in what cases an inductive limit $[E, F]$ is not either almost regular or strict and in what cases $[E, F]$ is a strongly σ-metrizable space.

1. Вступ. За останні 25 років з'явилося багато робіт (див. [1-5] і вказану там літературу), в яких досліджувалася множина $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ та їх аналогів зі значеннями в просторах, близьких до метризовних, зокрема, в σ-метризовних і сильно σ-метризовних просторах, у просторах Мура, вичерпних та напіввичерпних просторах, тощо.

Ці дослідження розпочалися в працях [6,7], де вивчалися нарізно неперервні відображення зі значеннями в строгих індуктивних границях. Основним інструментом у доведеннях там виступала теорема Д'єдонне-Шварца [8, с. 54] про те, що за певних умов кожна обмежена множина в індуктивній границі обов'язково міститься у деякому дограничному просторі і обмежена в ньому. Такі індуктивні границі називають регулярними. Між тим, у праці [9] було введено один клас індуктивних границь Z, побудованих на основі пари (E, F) таких нормованих просторів, що F – це лінійний підпростір E і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, які ми тут позначатимемо символом $[E, F]$, і вказано певні умови на E і F, щоб індуктивна границя $[E, F]$ була нерегулярною. Оскільки нарізно неперервні відображення зі значеннями в нерегулярних індуктивних границях досі не вивчалися, то постає природне питання: з'ясувати, за яких умов індуктивні границі $[E, F]$ будуть належати до тих чи інших класів просторів, близьких до метризовних, і якими можуть бути множини $C(f)$ у нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to [E, F]$.

Тут ми подамо перші результати, отримані в цьому напрямку, які були анонсовані в тезах [10].

2. Основні означення. Нагадаємо, що множина A в топологічному векторному просторі (коротко – ТВП) X називається *обмеженою* [11, с. 45], якщо вона поглинається будь-яким околом нуля в X. Відомо [11, тв. 2, с. 45], що множина A в ТВП X буде обмеженою тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності точок x_n з A і довільної нескінченно малої послідовності скалярів λ_n послідовність точок $\lambda_n x_n$ прямує до нуля в X.

Легко перевірити, що образ $f(A)$ обмеженої в X множини A при кожному лінійному неперервному відображенні $f : X \to Y$ залишається обмеженою множиною у просторі Y, а також, що замикання $\overline{A}$ обмеженої множини в просторі X буде знову обмеженою в X множиною.

Розглянемо зростаючу послідовність лінійних підпросторів X_n простору X над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел, таку, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Припустимо, що на кожному просторі X_n задано локально опуклу топологію $\mathcal{T}_n$, причому всі тотожні вкладення $(X_n, \mathcal{T}_n) \hookrightarrow (X_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1})$ неперервні. Нагадаємо [8, с. 46], що локально опукла топологія $\mathcal{T}$ на просторі X називається *топологією індуктивної границі* послідовності локально опуклих просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$, якщо $\mathcal{T}$ – це індуктивна топологія на X, що породжена послідовністю тотожних вкладень $j_n : X_n \hookrightarrow X$, тобто найсильніша з локально опуклих топологій $\mathcal{S}$ на X, для яких усі вкладення $j_n : (X_n, \mathcal{T}_n) \hookrightarrow (X, \mathcal{S})$ неперервні. Локально опуклий простір $(X, \mathcal{T})$ називається *індуктивною границею* послідовності локально опуклих просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$, коротко:

$$(X, \mathcal{T}) = \liminf\operatorname{ind}(X_n, \mathcal{T}_n) \text{ або } X = \lim\operatorname{ind} X_n.$$

Індуктивна границя $X = \lim\operatorname{ind} X_n$ називається *строгою*, якщо для кожного n звуження $\mathcal{T}_{n+1}|_{X_n}$ топології $\mathcal{T}_{n+1}$ на простір X_n збігається з топологією $\mathcal{T}_n$, тобто всі тотожні вкладення $g_n : (X_n, \mathcal{T}_n) \hookrightarrow (X_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1})$ є ізоморфними. Нагадаємо добре відомий результат, що належить Ж. Д'єдонне і Л. Шварцу: *у строгій індуктивній границі $X = \lim\operatorname{ind} X_n$, для якої кожний простір X_n замкнений в X_{n+1}, множина B буде обмеженою тоді і тільки тоді, коли вона міститься у деякому допграничному просторі X_n і є там обмеженою.* Індуктивні границі, що мають властивість, висловлену у теоремі Д'єдонне-Шварца, називають *регулярними*. Регулярні індуктивні границі вивчалися в серії робіт багатьох авторів [12-20]. Індуктивну границю $X = \lim\operatorname{ind} X_n$ ми назвемо *майже регулярною*, якщо кожна обмежена в X множина міститься в деякому допграничному просторі X_n. Зрозуміло, що кожна регулярна індуктивна границя є і майже регулярною.

Теорема 1. *Нехай $X = \lim\operatorname{ind} X_n$ – індуктивна границя, яка не є майже регулярною. Тоді існує така збіжна до нуля в X послідовність точок a_m з X, що множина $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ не міститься в жодному допграничному просторі X_n.*

Доведення. За умовою існує обмежена в X множина B, така, що $B \not\subseteq X_n$ для кожного n. Тоді для кожного n існує точка $x_n \in B \setminus X_n$. Візьмемо довільну послідовність скалярів $\lambda_n \neq 0$, таку, що $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ (наприклад, $\lambda_n = \frac{1}{n}$), і покладемо $a_n = \lambda_n x_n$. З обмеженості множини B випливає, що $a_n \to 0$ в X. Разом з тим, $a_n \notin X_n$ для кожного n, бо $x_n = \frac{1}{\lambda_n} a_n \notin X_n$ за побудовою. Тому $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\} \not\subseteq X_n$ для кожного n. $\square$

3. Індуктивні границі $[E, F]$. Нехай E і F – нормовані простори над полем $\mathbb{K}$ з нормами $\|\cdot\|_E$ і $\|\cdot\|_F$ відповідно, причому F – це лінійний підпростір E і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, тобто існує така константа $\gamma > 0$, що $\|z\|_E \leq \gamma \|z\|_F$ для кожного $z \in F$. Для кожного номера n розглянемо нескінченний добуток

$$\widetilde{Z}_n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ разів}} \times F \times \ldots,$$

який є векторним простором над $\mathbb{K}$, і його лінійний підпростір

$$Z_n = \{z = (z_k)_{k=1}^{\infty} \in \widetilde{Z}_n : \|z\|_n = \sup\{\|z_1\|_E, \ldots, \|z_n\|_E, \|z_{n+1}\|_F, \ldots\} < +\infty\}.$$

Легко перевірити, що функція $\|\cdot\|_n$ – це норма на Z_n, $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ і $\|z\|_{n+1} \leq \gamma_0 \|z\|_n$, де $\gamma_0 = \max\{\gamma, 1\}$, отже, тотожні вкладення $Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ неперервні. Позначимо через $\mathcal{T}_n$ локально опуклу топологію на Z_n, що породжена нормою $\|\cdot\|_n$. Нехай $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$. Оскільки всі Z_n – це лінійні підпростори векторного простору $E^{\mathbb{N}}$, причому $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ для кожного n, то і Z буде лінійним підпростором $E^{\mathbb{N}}$, а простори Z_n – лінійними підпросторами простору Z. Індуктивну границю

$$(Z, \mathcal{T}) = \lim\operatorname{ind}(Z_n, \mathcal{T}_n)$$

ми будемо позначати символом $[E, F]$.

Почнемо з встановлення деяких достатніх умов, щоб введена індуктивна границя не була майже регулярною.

Теорема 2. *Нехай існує елемент $a \in E$, який належить до замикання $[B]_E$ одиничної кулі $B = \{b \in F : \|b\|_F \leq 1\}$ простору F у просторі E, і не належить до F. Тоді множина $A = \{z^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$,* *де* $z^{(m)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{m\ \text{разів}}, a, 0, ...)$ *буде обмеженою в просторі* $Z = [E, F]$, $A \not\subseteq Z_n$ *для кожного* n, *послідовність* $\frac{1}{m}z^{(m)} \to 0$ *в* Z *і* $\{\frac{1}{m}z^{(m)} : m \in \mathbb{N}\} \not\subseteq Z_n$ *для кожного* n.

Доведення. Оскільки $a \in [B]_E$, то існує така послідовність елементів $a_k \in B$, що $a_k \to a$ в E. Розглянемо елемент

$$z^{(m,k)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{m}, a_k, 0, ...)$$

і множину

$$A_0 = \{z^{(m,k)} : (m, k) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Зрозуміло, що $A_0 \subseteq Z_1$, адже $a_k \in F$ для кожного k. При цьому $\|z^{(m,k)}\|_1 = \|a_k\|_F \le 1$ для довільних m і k, бо $a_k \in B$ для кожного k. Отже, множина A_0 лежить і обмежена у першому просторі Z_1. Оскільки тотожне вкладення $j_1 : Z_1 \hookrightarrow Z$ лінійне і неперервне, то множина $A_0 = j_1(A_0)$ буде обмеженою і в просторі Z.

Покажемо, що $A \subseteq \overline{A}_0$, де замикання береться у просторі Z. Для цього досить з'ясувати, що $z^{(m,k)} \to z^{(m)}$ в Z при $k \to \infty$ для кожного m. Зауважимо, що $z^{(m,k)}$ і $z^{(m)}$ лежать у просторі Z_{m+1}, причому

$$\|z^{(m,k)} - z^{(m)}\|_{m+1} = \|a_k - a\|_E \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Тому $z^{(m,k)} \to z^{(m)}$ у просторі Z_{m+1}, а значить, і у просторі Z, оскільки вкладення $j_{m+1} : Z_{m+1} \hookrightarrow Z$ неперервне.

Оскільки замикання обмеженої множини залишається обмеженою множиною, то множина $\overline{A}_0$ буде обмеженою в Z, а з нею і її підмножина A.

Ясно, що $z^{(m)} \in A \setminus Z_m$ при $m = 1, 2, ...$, адже $a \notin F$, тому $A \not\subseteq Z_n$ для кожного n.

Співвідношення $\frac{1}{m}z^{(m)} \to 0$ випливає з обмеженості множини A. Зрозуміло, що і $\frac{1}{m}z^{(m)} \not\subseteq Z_m$ для кожного $m = 1, 2, ...$, отже, $\{\frac{1}{m}z^{(m)} : m \in \mathbb{N}\} \not\subseteq Z_n$ для кожного n.□

4. Приклади просторів E і F, для яких $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$. Почнемо з першого прикладу таких просторів, який належить Б.М. Макарову [15]. Наша конструкція з попереднього пункту узагальнює його побудови.

Приклад 1. Нехай $F = c$ – банахів простір збіжних числових послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ з нормою $\|x\|_F = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| = \|x\|_\infty$ і c_0 – банахів простір усіх нескінченно малих послідовностей скалярів з тією ж нормою. Символом xy ми позначаємо покоординатний добуток $(\xi_k\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ і $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ з $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Для довільної послідовності $a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ розглянемо простір c_0 з вагою a:

$$c_0(a) = \{x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : ax \in c_0\}.$$

Якщо $\alpha_k \neq 0$ для кожного k, то функція $\|x\|_E = \|ax\|_\infty$ буде нормою на просторі $E = c_0(a)$, нормований простір $(E, \|\cdot\|_E)$ буде банаховим, а відображення $f : E \to c_0$, $f(x) = ax$ – лінійною ізометрією.

Коли $a \in c_0$, то $ax \in c_0$ для кожного $x \in F$, причому

$$\|x\|_E = \|ax\|_\infty \le \|a\|_\infty \|x\|_\infty = \|a\|_\infty \|x\|_F,$$

отже, $F \subseteq E$ і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне.

Припустимо, що $a \in c_0$ і покажемо, що для пари (E, F) будемо мати, що $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$, де $B = \{x \in F : \|x\|_F \le 1\}$.

Розглянемо точку $b = (1, 0, 1, 0, ...)$ і послідовність точок

$$b_n = (\underbrace{1, 0, 1, 0, ..., 1, 0}_{2n\ \text{разів}}, 0, 0, ...).$$

Оскільки $\|b_n\|_F = \|b_n\|_\infty = 1$, то $b_n \in B$ для кожного n. Послідовність $ab = (\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, ..., \alpha_{2n-1}, 0, ...)$, очевидно, належить до c_0, отже, $b \in c_0(a)$. При цьому

$$\|b - b_n\|_E = \|a(b - b_n)\|_\infty = \sup_{k\ge n} |\alpha_{2k+1}| \to 0$$

при $n \to \infty$, отже, $b_n \to b$ в E, а значить, $b \in [B]_E$. При цьому ясно, що $b \notin F$, адже послідовність 1,0,1,0,... розбіжна. Таким чином, $b \in [B]_E \setminus F$.

Зауважимо, що коли $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in [B]_E \cap F$, то існує така послідовність точок $x_n = (\xi_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ з B, що $x_n \to x$ в E. Тоді і $\xi_{n,k} \to \xi_k$ при $n \to \infty$ для кожного k, адже $|\xi_{n,k} - \xi_k| \le \frac{1}{|\alpha_k|}\|x_n - x\|_E$. Оскільки $|\xi_{n,k}| \le 1$

для довільних n і k, то і $|\xi_k| \le 1$ для кожного k, отже, $\|x\|_\infty \le 1$. Але $x \in F$, тому $x \in B$. Ми показали, що у цьому випадку $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B$. У прикладі Макарова $\alpha_k = \frac{1}{k}$ для кожного k.

Приклад 2. Нехай E – це банахів простір l_p, $1 \le p < \infty$, всіх сумовних з p-тим степенем послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty$ скалярів з нормою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_E,$$

а F – це простір $\mathbb{K}^\infty$ всіх фінітних послідовностей скалярів з нормою $\|\cdot\|_F$, індукованою з E, тобто $\|x\|_F = \|x\|_E$ для кожного $x \in F$. Точка $a = (\frac{1}{2^k})_{k=1}^\infty$ належить до $E = l_p$ для кожного $p \ge 1$. Для точок $a_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, 0, ...)$ будемо мати, що $a_n \in B = \{x \in F : \|x\|_F \le 1\}$, адже $a_n \in F$ і

$$\|a_n\|_F = \|a_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2^p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(2^p-1)^{1/p}} \le \frac{1}{(2-1)^{1/p}} = 1,$$

адже $p \ge 1$.

При цьому

$$\|a_n - a\|_E = \|a_n - a\|_p = \left(\sum_{k>n} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2^{p(n+1)}}}{1-\frac{1}{2^p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2^n(2^p-1)^{1/p}} \to 0,$$

отже, $a_n \to a$ в E при $n \to \infty$, тому $a \in [B]_E$. Зрозуміло, що при цьому $a \notin F$.

Як і в попередньому прикладі, легко показати, використавши перехід до покоординатної границі, що і тут $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B$.

Приклад 3. Міркування попереднього прикладу легко переносяться на випадок $E = c_0$, $F = (\mathbb{K}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Тут також $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B \ne \emptyset$.

Приклад 4. Нехай $E = C[a,b]$ – це банахів простір неперервних функцій $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ з рівномірною нормою $\|f\|_E = \|f\|_\infty = \max\limits_{a \le t \le b} |f(t)|$, а $F = C^1[a,b]$ – банахів простір усіх неперервно диференційовних функцій $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ з нормою $\|f\|_F = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. Зрозуміло, що тут $F \subseteq E$ і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, бо $\|f\|_E = \|f\|_\infty \le \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} = \|f\|_F$ для кожного $f \in F$. Покажемо, що і тут $[B]_E \setminus F \ne \emptyset$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $a = -1$, $b = 1$. Зрозуміло, що функція $g(t) = \frac{|t|}{\sqrt{2}}$ належить до $E \setminus F$, а функції

$$g_n(t) = \sqrt{\frac{t^2 + \frac{1}{n^2}}{2}}$$

належать до F. При цьому

$$\|g_n\|_\infty = \max_{|t| \le 1} |g_n(t)| = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2}} \le 1,$$

$$g_n'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{2(t^2 + \frac{1}{n^2})}}$$

і

$$\|g_n'\|_\infty = \max_{|t| \le 1} |g_n'(t)| \le \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

отже,

$$\|g_n\|_F \le 1 \text{ і } g_n \in B = \{f \in F : \|f\|_F \le 1\}$$

для кожного n. Оскільки

$$|g_n(t) - g(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} n^2 \left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + |t|\right)} \le \frac{1}{\sqrt{2} n}$$

для всіх t, причому при $t = 0$ має місце рівність, то $\|g_n - g\|_E = \|g_n - g\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}n} \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $g_n \to g$ в E. Таким чином, $g \in [B]_E \setminus F$.

З допомогою лінійного перетворення $\varphi : [a,b] \to [-1,1]$ цей приклад легко перенести на випадок довільного відрізка $[a,b]$, де $a < b$.

Рівність $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B$ у цьому випадку для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ легко випливає з такого результату.

Теорема 3. *Нехай* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *– послідовність неперервно диференційовних функцій* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *– неперервно диференційовна функція і* $f_n(t) \to f(t)$ *на деякій щільній на відрізку* $[a,b]$ *множині* T. *Тоді якщо* $f_n'(t) \le \gamma$ *для всіх* $t \in [a,b]$ *і всіх* n, *то і* $f'(t) \le \gamma$ *для всіх* $t \in [a,b]$.

Доведення. Припустимо, що $f'(t_0) > \gamma$ для деякого $t_0 \in [a,b]$. Оскільки похідна f' неперервна і $\overline{T} = [a,b]$, то знайдеться такий невироджений сегмент $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, що $\alpha,\beta \in T$ і $f'(t) > \gamma$ для всіх $t \in [\alpha,\beta]$. З формули Лаґранжа випливає, що

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta-\alpha) > \gamma(\beta-\alpha)$$

для деякого $\xi \in (\alpha,\beta)$. Оскільки $f(\beta) - f(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n(\beta) - f_n(\alpha))$, то і $f_m(\beta) - f_m(\alpha) > \gamma(\beta-\alpha)$ для деякого m. Ще раз використавши формулу Лаґранжа, отримаємо, що

$$f_m(\beta) - f_m(\alpha) = f_m'(\xi_0)(\beta-\alpha)$$

для деякої точки $\xi_0 \in (\alpha,\beta) \subseteq [a,b]$, а тоді для неї $f_m'(\xi_0) > \gamma$, що суперечить умові теореми. $\square$

Зрозуміло, що такий же результат матиме місце, коли нерівність $\le$ замінити на $\ge$.

Якщо тепер $f \in [B]_E \cap F$, де $E = C[a,b]$, $F = C^1[a,b]$, то існує послідовність функцій $f_n \in B$, така, що $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Оскільки $-1 \le f_n'(t) \le 1$ на $[a,b]$, то за теоремою 3 і $-1 \le f'(t) \le 1$ на $[a,b]$. Крім того, зрозуміло, що і $-1 \le f(t) \le 1$ на $[a,b]$, отже, $f \in B$, а тому $[B]_E \setminus F = [B]_E \setminus B$.

Питання 1. *Чи існує така пара нормованих просторів* (E,F), *що* $F \subseteq E$, *причому тотожне вкладення* $F \hookrightarrow E$ *лінійне і неперервне, що для них*

$$\varnothing = [B]_E \setminus F \subset [B]_E \setminus B \ne \varnothing,$$

де $B = \{x \in F : \|x\|_F \le 1\}$*?*

5. Випадок, коли $[E,F]$ **буде сильно** σ**-метризовним простором.** Якщо $E = \mathbb{K}$ – це поле скалярів зі своєю природною нормою, а $F = \{0\}$ – це нульовий підпростір $\mathbb{K}$, то простір Z_n у цьому випадку складається з усіх фінітних послідовностей $z = (\xi_1,\dots,\xi_n,0,0,\dots)$ скалярів ξ_k, який позначається $\mathbb{K}_n$, при цьому $\|z\|_n = \max\limits_{1\le k\le n}|\xi_k|$. В цьому випадку індуктивна границя $Z = [E,F]$ збігається з простором $\mathbb{K}^\infty = \lim\operatorname{ind}\mathbb{K}_n$ усіх фінітних послідовностей скалярів з топологією індуктивної границі своїх скінченновимірних підпросторів $\mathbb{K}_n$. Ця індуктивна границя задовольняє умови теореми Д'єдонне-Шварца і тому є регулярною. При цьому тут $[B]_E = \{0\} \subseteq F$, отже, $[B]_E \setminus F = \varnothing$. Це показує, що умова $[B]_E \setminus F \ne \varnothing$ в теоремі 2 істотна. У цьому пункті ми узагальнимо це спостереження.

Ми будемо використовувати позначення пункту 3. Почнемо з допоміжних тверджень.

Лема 1. *а). Якщо тотожне вкладення* $J : F \hookrightarrow E$ *ізоморфне, то і всі тотожні вкладення* $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ *будуть ізоморфними.*

б). Якщо для деякого номера n *вкладення* $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ *ізоморфне, то і вкладення* $J : F \hookrightarrow E$ *буде ізоморфним.*

Доведення. а). Нехай $J : F \hookrightarrow E$ – ізоморфне вкладення. Тоді існують такі константи α і β, що $0 < \alpha \le 1 \le \beta$ і

$$\alpha\|x\|_F \le \|x\|_E \le \beta\|x\|_F$$

для кожного $x \in F$. Зафіксуємо номер n і розглянемо довільний елемент $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$ з простору Z_n. Тоді $z_k \in E$ при $k \le n$ і $z_k \in F$ при $k > n$. Для елемента z_{n+1} з простору F будемо мати:

$$\alpha\|z_{n+1}\|_F \le \|z_{n+1}\|_E \le \beta\|z_{n+1}\|_F.$$

Оскільки $\alpha \le 1 \le \beta$, то і

$$\alpha\|z_k\|_E \le \|z_k\|_E \le \beta\|z_k\|_E \text{ при } k \le n,$$

так само як

$$\alpha\|z_k\|_F \le \|z_k\|_F \le \beta\|z_k\|_F \text{ при } k > n+1.$$

Тому

$$\alpha\|z\|_n \le \|z\|_{n+1} \le \beta\|z\|_n,$$

а це означає, що вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ ізоморфне.

б). Нехай вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ ізоморфне для деякого номера n. Розглянемо відображення $T : F \to Z_n$, $Tx =$

$(\underbrace{0,..,0}_{n \text{ разів}}, x, 0, ...)$. Оскільки $\|Tx\|_n = \|x\|_F$, то T – це лінійна ізометрія простору F на підпростір $Y_n = T(F)$ простору Z_n. Розглянемо той же простір $T(F)$, але з нормою, індукованою з простору Z_{n+1}, який ми позначимо символом Y_{n+1}. Оскільки вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ ізоморфне і $J_n(Y_n) = Y_{n+1}$, то звуження $I_n = J_n|_{Y_n} : Y_n \to Y_{n+1}$ буде ізоморфізмом нормованих просторів Y_n і Y_{n+1}. Далі, відображення $S : Y_{n+1} \to E$, $S(Tx) = x$ для кожного $x \in F$ – це лінійне ізометричне вкладення, адже $\|S(Tx)\|_E = \|x\|_E = \|Tx\|_{n+1}$ для кожного $x \in F$. Оскільки $J = SI_nT$, то і $J : F \hookrightarrow E$ буде ізоморфним вкладенням разом з J_n.

Теорема 4. *Індуктивна границя $[E, F]$ буде строгою тоді і тільки тоді, коли вкладення $E \hookrightarrow F$ ізоморфне.*

Доведення. Це негайно випливає з означення строгої індуктивної границі і леми 1.

Лема 2. *а). Якщо F – це замкнений підпростір простору E, то для кожного n простір Z_n буде замкненим підпростором простору Z_{n+1}.*

б). Якщо для деякого номера n простір Z_n буде замкненим підпростором простору Z_{n+1}, то і F – це замкнений підпростір простору E.

Доведення. а). Нехай F – замкнений підпростір E. Оскільки $\|x\|_F = \|x\|_E$ для кожного $x \in F$, то і $\|z\|_n = \|z\|_{n+1}$ для кожного $z \in Z_n$, отже, нормований простір Z_n є підпростором нормованого простору Z_{n+1}. Доведемо, що Z_n замкнений в Z_{n+1}.

Розглянемо підпростори X_n і Y_n простору Z_n, що складаються з усіх наборів $x = (z_1, ..., z_n, 0, z_{n+2}, ...)$ і $y = (\underbrace{0,..,0}_{n \text{ разів}}, z_{n+1}, 0, ...)$ з простору Z_n. Зрозуміло, що для кожної точки $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$ з простору Z_n маємо, що $z = x + y$, де x і y – визначені вище набори з X_n і Y_n відповідно, і таке зображення елемента z у вигляді суми елементів з X_n і Y_n єдине. Тому $Z_n = X_n \oplus Y_n$ – це пряма сума своїх підпросторів X_n і Y_n. Зауважимо, що при цьому

$$\|z\|_n = \max\{\|x\|_n, \|y\|_n\},$$

тому простір Z_n ізометричний добутку $X_n \times Y_n$ нормованих просторів X_n і Y_n з максимум-нормою.

Так само простір Z_{n+1} ізометричний добутку $X_n \times \widetilde{Y}_n$, де простір $\widetilde{Y}_n$ – це підпростір простору Z_{n+1}, що складається з усіх наборів $y = (\underbrace{0,..,0}_{n \text{ разів}}, z_{n+1}, 0, ...)$ з простору Z_{n+1}. Крім того, існують природні лінійні ізометрії $T : F \to Y_n$ і $S : E \to \widetilde{Y}_n$, які співставляють кожному елементу u з F чи E елемент $y = (\underbrace{0,..,0}_{n \text{ разів}}, u, 0, ...)$ з Y_n чи $\widetilde{Y}_n$ відповідно. Нехай $J : F \hookrightarrow E$ і $I_n : Y_n \hookrightarrow \widetilde{Y}_n$ – це тотожні вкладення, які, очевидно, є ізометричними. При цьому діаграма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{J} & E \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ Y_n & \xrightarrow[I_n]{} & \widetilde{Y}_n \end{array} \qquad (*)$$

комутативна, адже $I_nT = SJ$ як легко перевірити. За умовою простір $F = J(F)$ замкнений в E, тоді і простір $S(F) = S(J(F))$ буде замкненим в $\widetilde{Y}_n$, адже S – це ізометрія. Але

$$S(J(F)) = I_n(T(F)) = I_n(Y_n) = Y_n.$$

Тому простір Y_n замкнений в $\widetilde{Y}_n$, а тоді й добуток $P = X_n \times Y_n$ замкнений в добутку $\widetilde{P} = X_n \times \widetilde{Y}_n$. Розглянемо побудовані вище ізометрії $\Phi : Z_n \to P$ і $\Psi : Z_{n+1} \to \widetilde{P}$. Очевидно, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{J_n} & Z_{n+1} \\ {\scriptstyle \Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ P & \xrightarrow[I]{} & \widetilde{P}, \end{array}$$

де $I : P \hookrightarrow \widetilde{P}$ – тотожне вкладення, комутативна. Оскільки

$$Z_n = J_n(Z_n) = (\Psi^{-1}I\Phi)(Z_n) = \Psi^{-1}(P)$$

і P – замкнена частина $\widetilde{P}$, то і простір Z_n замкнений в Z_{n+1}.

б). Нехай Z_n – це замкнений підпростір Z_{n+1} для деякого n. Розглянемо нормовані простори Y_n і $\widetilde{Y}_n$, введені вище. Оскільки Y_n

– це замкнений підпростір Z_n і Z_n замкнений в Z_{n+1}, то і Y_n замкнений в Z_{n+1}. Але Y_n – це підпростір $\widetilde{Y}_n$, отже, Y_n буде замкнений і в $\widetilde{Y}_n$. З комутативності діаграми (∗) тепер легко вивести, що і F буде замкненим підпростором простору E. □

Лема 3. *Нехай $(X, \mathcal{T})$ – це строга індуктивна границя послідовності локально опуклих просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$, така, що простір X_n замкнений в X_{n+1} для кожного n. Тоді X_n буде замкнений і в X для кожного n.*

Доведення. Зафіксуємо якесь n і покажемо, що X_n замкнений в X. Нехай $x \in X \setminus X_n$. Тоді існує такий номер m, що $m > n$ і $x \in X_m$. З умови випливає, що простір X_n замкнений у просторі X_m. Оскільки $x \notin X_n$, то існує такий окіл нуля U_m в X_m, що $(x + U_m) \cap X_n = \emptyset$. Але, як відомо [8, с. 54, теорема 2], у нашому випадку $\mathcal{T}|_{X_m} = \mathcal{T}_m$. Отже, існує такий окіл нуля U в X, що $U_m = U \cap X_m$. В такому разі і $(x + U) \cap X_n = \emptyset$. Справді, якби $x + u = y$ для деяких $u \in U$ і $y \in X_n$, то $u = y - x \in X_m$, отже, $u \in U \cap X_m = U_m$, а тому $y = x + u \in (x + U_m) \cap X_n$, що суперечить вибору U_m. Таким чином, $(x + U) \cap X_n = \emptyset$ для деякого околу нуля U в X, звідки випливає замкненість X_n в X. □

Нагадаємо, що топологічний простір Z називається *сильно σ-метризовним*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх метризовних і замкнених в Z підпросторів Z_n, причому для кожної збіжної в Z послідовності точок z_m існує такий номер n, що $\{z_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_n$. При цьому така послідовність $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *вичерпуванням* сильно σ-метризовного простору Z.

Теорема 5. *Нехай нормований простір F є замкненим підпростором нормованого простору E. Тоді індуктивна границя $Z = [E, F]$ буде строгою і регулярною, причому Z буде сильно σ-метризовним простором з вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Доведення. З теореми 4, твердження а) леми 2 і теореми Д'єдонне-Шварца негайно випливає, що індуктивна границя $Z = \lim \operatorname{ind} Z_n$ буде строгою і регулярною. Оскільки $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}|_{Z_n}$ згідно з [8, с. 54, теорема 2] і простори Z_n замкнені в Z за лемою 3, то $(Z_n, \mathcal{T}_n)$ – це замкнені підпростори простору $(Z, \mathcal{T})$, причому вони нормовані і $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ для кожного n. Для збіжної в Z послідовності точок z_m множина, $A = \{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ буде обмеженою, а тому лежить у деякому допграничному просторі Z_n, адже наша індуктивна границя є регулярною. Тому $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ – це вичерпування сильно σ-метризовного простору $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$. □

6. Деякі приклади. Наведемо наприкінці ще два приклади, що виникли в зв'язку з цими дослідженнями.

Приклад 5. Нехай $(E, \|\cdot\|)$ – довільний нормований простір, який має власний всюди щільний лінійний підпростір F. Зрозуміло, що вкладення $F \hookrightarrow E$ ізоморфне. Позначимо, як і раніше, через $B = \{x \in F : \|x\| \leq 1\}$ одиничну кулю у просторі F і покажемо, що $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$. Справді, за умовою існує елемент $a \in E \setminus F$. Покладемо $x = \frac{a}{\|a\|}$. Тоді $\|x\| = 1$ і $x \notin F$. Оскільки $\overline{F} = E$, то існує така послідовність елементів $x_n \in F \setminus \{0\}$, що $x_n \to x$. Тоді і $\|x_n\| \to \|x\| = 1$, а значить, $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \to x$, причому $y_n \in B$, бо $\|y_n\| = 1$ для кожного n. Таким чином, $x \in [B]_E \setminus F$.

Цей приклад показує, що вкладення $F \hookrightarrow E$ може бути ізоморфним і коли $[B]_E \setminus F \neq \emptyset$. Конкретні приклади – це приклади 2, 3 чи приклад, у якому $E = C[a, b]$, а F – це підпростір всіх многочленів на $[a, b]$.

Приклад 6. Наведемо приклад локально опуклого простору X і такого його метризовного підпростору E (нелінійного), що його лінійна оболонка $L = \operatorname{sp}(E)$ буде неметризовним. Розглянемо простір $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних послідовностей дійсних чисел з його природною індуктивною топологією. Він не метризовний, бо не задовольняє першу аксіому зліченності. Його підпростір $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $e_n = (\underbrace{0, .., 0}_{n \text{ разів}}, 1, 0, 0, ...)$ – орти, метризовний, бо він дискретний. Але у даному випадку

$$L = \operatorname{sp}(E) = \mathbb{R}^\infty,$$

отже, L – це неметризовний простір.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Філіпчук О.І.* Сукупна неперервність K_hC-функцій зі значеннями в просторах Мура // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №11. – С. 1539-1547.

2. *Hola L., Piotrowski Z.* Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – **42**. – P. 149–160.

3. *Маслюченко В., Мироник О.* Сукупна неперервність відображень зі значеннями в різних узагальненнях метризовних просторів // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. – Ворохта, 20-26 лютого, 2012. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, 2012. – С. 5-6.

4. *Філіпчук О.І.* Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. - Чернівці, 2010. – 124 с.

5. *Карлова О.О., Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Площина Бінґа і нарізно неперервні відображення. // Мат. студії. – 2012. – Т. 38, №2. – С. 188-193.

6. *Маслюченко В.К.* Раздельно непрерывные отображения со значениями в строгих индуктивных пределах // XIV школа по теории операторов в функциональных пространствах. Ч. II. – Новгород, 1989. – С. 70.

7.*Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення зі значеннями в індуктивних границях // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №3. – С. 380-384.

8.*Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

9. *Маслюченко В.К.* Ограниченные множества в индуктивных пределах // Чернов. ун-т. – Черновцы, 1983. – 14с. – Деп. в УкрНИИНТИ 25.X.1983, N1204-Ук-Д83.

10. *Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* Про один клас індуктивних границь // V Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу присв. пам'яті проф. Василишина Б.В. Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 19-21 вересня, 2013. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, 2013. – С. 43-44.

11. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

12. *Себаштьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах локально-выпуклых пространств // Математика. – 1957. – **I**, №1. – С. 60-77.

13. *Макаров Б.М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств // ДАН СССР. – 1958. – **119**, №6. – С. 1092-1094.

14. *Макаров Б.М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств // Вестник Ленингр. ун-та, серия Мат., мех. и астрон. – 1965. – №13, вып. 3. – С. 50-58.

15. *Макаров Б.М.* О некоторых патологических свойствах индуктивных пределов B-пространств // Успехи мат. наук. – 1963. – №18, вып.3. – С. 171-178.

16. *J. Kucera, and K. McKennon.* Dieudonne-Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **78**, №3. – P. 366-368.

17. *J. Kucera, C. Bosch.* Dieudonne-Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits. II // Proc. Amer. Math. Soc. – 1982. – **86**, №3. – P. 392-394.

18. *C. Bosch, J. Kucera, and K. McKennon.* Dual characterization of the Dieudonne-Schwartz theorem on bounded sets // Internat. J. Math. and Math.Sci. – 1983. – **6**, №1. – P. 189-192.

19. *Qiu Jing-Hui.* Dieudonne-Schwartz theorem in inductive limits of metrizable spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – **92**, №2. – P. 255-257.

20. *Qiu Jing-Hui.* Dieudonne-Schwartz theorem in inductive limits of metrizable spaces II // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – **108**, №1. – P. 171-175.

УДК 517.51

©2013р. О. В. Маслюченко, Д. П. Онипа

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГРАНИЧНІ КОЛИВАННЯ ЛОКАЛЬНО СТАЛИХ ФУНКЦІЙ

В даній роботі встановлюється, що кожна невід'ємна неперервна функція, яка визначена на замкненій ніде не щільній множині без ізольованих точок, є граничним коливанням деякої локально сталої функції, що визначена на доповненні до цієї множини.

In this paper we prove that every nonnegative continuous function defined on a closed nowhere dense subset of the reals without isolated points is the limiting oscillation of some locally constant function defined on the complement to this set.

Вступ. Перший результат про побудову функцій із заданим коливанням був одержаний П. Костирком [1]. Він довів, що для довільної напівнеперервної зверху функції $f : X \to [0; +\infty]$, що визначена на метризовному берівському просторі X без ізольованих точок, існує функція $g : X \to \mathbb{R}$, коливання ω_g якої рівне f. Пізніше його дослідження були продовжені З. Дужинським, З. Гранде, С. Пономарьовим і Й. Евертом у працях [2-4]. Загальнішу задачу про побудову функцій з певного функціонального класу з даним коливанням детально вивчена в роботах [5-9].

Проте у згаданих працях розглядалися функції, що визначені на всьому просторі. Але для функцій, що визначені на підмножинах певного топологічного простору коливання природно розглядати на замиканні їх області визначення. Якщо G – деяка відкрита підмножина топологічного простору X і $g : G \to \mathbb{R}$ – деяка функція, то її коливання $\omega_g : \overline{G} \to [0; +\infty]$ визначається формулою

$$\omega_g(x) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup_{u,v \in U \cap G} |g(u) - g(v)|, x \in \overline{G}.$$

Таким чином, раніше вивчалися тільки звуження $\omega_g|_G$ коливання на область визначення функції g. Але актуально дослідити також і поведінку функції g на межі $F = \overline{G} \setminus G$. Звуження $\widetilde{\omega}_g = \omega_g|_F$ ми називатимемо *граничним коливанням.* В даній роботі ми розпочинаємо вивчення наступної загальної проблеми.

Проблема 1. *Нехай X – топологічний простір, P – деяка властивість функцій, G – відкрита підмножина X і $F = \overline{G} \setminus G$. Для яких функцій $f : F \to [0; +\infty]$ існує функція $g : G \to \mathbb{R}$, яка має властивість P і $\widetilde{\omega}_g = f$?*

Зрозуміло, що граничне коливання $\widetilde{\omega}_g$, так само як і звичайне коливання ω_g, є напівнеперервною зверху невід'ємною функцією. Цікаво з'ясувати, чи можуть певні жорсткі локальні умови на функцію g зумовлювати специфічну поведінку функції на межі F. А саме нас цікавитиме наступна задача.

Проблема 2. *Нехай G – відкрита всюди щільна підмножина $\mathbb{R}$ і $F = \overline{G} \setminus G$ – її межа. Для яких напівнеперервних зверху функцій $f : F \to [0; +\infty]$ існує локально стала функція $g : G \to \mathbb{R}$, для якої $\widetilde{\omega}_g = f$?*

У даній роботі ми розв'яжемо цю задачу для неперервних функцій f.

1. Допоміжні твердження. Для замкненої множини $F \subseteq \mathbb{R}$ і точки $x \in \mathbb{R} \setminus F$ символом $U_F(x)$ позначатемемо компоненту зв'язності точки x в $\mathbb{R} \setminus F$ [10, с. 523]. Насправді множина $U_F(x)$ – це інтервал суміжності множини F, тобто максимальний інтервал, що містить точку x і не перетинається з F. Позначимо

$$\mathcal{U}_F = \{U_F(x) : x \in \mathbb{R} \setminus F\}.$$

Таким чином $\mathcal{U}_F$ є диз'юнктною системою відкритих непорожніх інтервалів, причому $\bigcup \mathcal{U}_F = \mathbb{R} \setminus F$.

Лема 1. *Нехай A – нескінченна лінійно впорядкована множина. Тоді в A існує строго монотонна послідовність елементів.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли A є цілком впорядкованою множиною. Тоді кожна її непорожня підмножина має мінімальний елемент. Візьмемо $A_1 = A$. Тоді A_1 нескінченна, а значить, непорожня, а тому існує $x_1 = \min A_1$. Позначимо $A_2 = A_1 \setminus \{x_1\}$. Оскільки A_1 нескінченна, то такою буде і множина A_2. Значить, множина A_2 непорожня і тому існує $x_2 = \min A_2$. Але $x_2 \in A_2 \subseteq A_1$ і $x_1 = \min A_1$, тому $x_2 \geq x_1$. А оскільки $x_2 \in A_2$ і $x_1 \notin A_2$, то $x_1 \neq x_2$. Отже, $x_2 > x_1$. Далі позначимо $A_3 = A_2 \setminus \{x_2\}$. Знову ж таки, з того, що A_2 є нескінченною випливає, що нескінченною буде і множина A_3. Значить, $A_3 \neq \emptyset$, і тому існує $x_3 = \min A_3$. Оскільки $A_3 \subseteq A_2$ і $x_2 \notin A_3$, то $x_3 > x_2$. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо строго зростаючу послідовність точок x_n множини A.

Нехай тепер A не є цілком впорядкованою множиною. Тоді існує непорожня множина $E \subseteq A$ така, що для довільного $x \in E$ існує $y \in E$ таке, що $y < x$. Використавши цю властивість для деякої фіксованої точки $x = x_1 \in E$ знайдемо $y = x_2 \in E$ таке, що $x_2 < x_1$. Далі використавши цю ж властивість для $x = x_2$ побудуємо $y = x_3$ таке, що $x_3 < x_2$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, будуємо спадну послідовність точок $x_n \in E \subseteq A$.

Нагадаємо, що підмножина F числової прямої $\mathbb{R}$ називається *досконалою*, якщо вона є замкненою і не має ізольованих точок.

Лема 2. *Нехай $F \subseteq \mathbb{R}$ – досконала ніде не щільна множина, U – відкрита в $\mathbb{R}$ множина, така, що $U \cap F \neq \emptyset$. Тоді множина $\mathcal{U}_F(U) = \{V \in \mathcal{U}_F : V \subseteq U\}$ нескінченна.*

Доведення. Виберемо непорожній відкритий інтервал $U_0 \subseteq U$ такий, що $U_0 \cap F \neq \emptyset$. Оскільки F не містить ізольованих точок, то множина $F_0 = U_0 \cap F$ нескінченна. За лемою 1 існує строго монотонна послідовність (x_n) в F_0. Нехай, для певності, (x_n) строго зростає. Тоді інтервали $U_n = (x_n; x_{n+1})$ непорожні, причому $U_n \cap U_m = \emptyset$ при $n \neq m$ і $U_n \subseteq U_0$. Оскільки F ніде не щільна, то для довільного n інтервал $U_n \nsubseteq F$, а тому існує y_n таке, що $y_n \in U_n$ і $y_n \notin F$. Покладемо $V_n = U_F(y_n)$. Оскільки інтервал V_n містить y_n, але не містить точки x_n та x_{n+1}, то $V_n \subseteq U_n$. Тому $V_n \cap V_m = \emptyset$ при $n \neq m$. Зокрема, $V_n \neq V_m$ при $n \neq m$ і $\mathcal{U}_F(U) \supseteq \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Значить, система множин $\mathcal{U}_F(U)$ нескінченна.

Лема 3. *Нехай $F \subseteq \mathbb{R}$ досконала ніде не щільна множина. Тоді існують системи множин $\mathcal{V}_F$ і $\mathcal{W}_F$ такі, що*
(i) $\mathcal{U}_F = \mathcal{V}_F \sqcup \mathcal{W}_F$;
(ii) для довільного $x \in F$ і його околу U існують $V \in \mathcal{V}_F$ і $W \in \mathcal{W}_F$ такі, що $V, W \subseteq U$.

Доведення. Виберемо зліченну множину E таку, що $\overline{E} = F$, і занумеруємо

$$E \times \{\tfrac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\} = \{(x_n, \varepsilon_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Покладемо $U_n = (x_n - \varepsilon_n; x_n + \varepsilon_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зараз індуктивно визначимо послідовність різних множин $V_n, W_n \in \mathcal{U}_F$ таких, що $V_n, W_n \subseteq U_n$. Припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{N}$ уже визначені множини V_k, W_k для $k < n$. За лемою 2 система множин $\mathcal{U}_F(U_n)$ є нескінченною. Виберемо різні множини $V_n, W_n \in \mathcal{U}_F(U)$ такі, що $V_n, W_n \notin \{V_k : k < n\} \cup \{W_k : k < n\}$. Тоді всі V_k і W_k при $k \leq n$ є різними, причому $V_k, W_k \subseteq U_k$ при $k \leq n$. Чим і завершується індуктивна побудова.

Покладемо $\mathcal{V}_F = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $\mathcal{W}_F = \mathcal{U}_F \setminus \mathcal{V}_F$. Перевіримо, що системи шукані.

Властивість (i) випливає з побудови. Доведемо (ii). Візьмемо $x_0 \in F$ і відкритий окіл U точки x_0. Оскільки $\overline{E} = F$, то існує $x \in E \cap U$. Виберемо $m \in \mathbb{N}$ таке, що $(x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}) \subseteq U$. Потім знайдемо $n \in \mathbb{N}$, для якого $x_n = x$ і $\varepsilon_n = \frac{1}{m}$. Тоді $V_n \in \mathcal{V}_F$, $W_n \in \mathcal{W}_F$ і $V_n, W_n \subseteq U_n = (x_n - \frac{1}{m}, x_n + \frac{1}{m})$. А тому $V_n, W_n \subseteq U$.

2. Основний результат. Нехай X – топологічний простір, $G \subseteq X$ і $g : G \to \overline{\mathbb{R}}$, де $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$. *Верхня та нижня граничні функції* $g^{\vee}, g^{\wedge} : \overline{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ визначаються формулами

$$g^{\vee}(x) = \limsup_{u\to x} f(u) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup_{u\in U\cap G} f(u),$$

$$g^{\wedge}(x) = \liminf_{u\to x} f(u) = \sup_{U\text{- окіл } x} \inf_{u\in U\cap G} f(u).$$

Як відомо

$$\omega_g(x) = g^{\vee}(x) - g^{\wedge}(x),$$

якщо $x \in \overline{G}$ таке, що $g^{\vee}(x) > -\infty$ і $g^{\wedge}(x) < +\infty$.

Ми скористаємося цією формулою при доведенні наступної теореми, що є основним результатом цієї роботи.

Теорема. *Нехай $F \subseteq \mathbb{R}$ – досконала ніде не щільна множина, $G = \mathbb{R}\setminus F$ і $f : F \to [0;+\infty]$ – неперервна функція. Тоді існує локально стала функція $g : G \to [0;+\infty)$ така, що $\widetilde{\omega}_g = f$.*

Доведення. Оскільки нескінченний відрізок $[0;+\infty]$ гомеоморфний відрізку $[0;1]$, то за теоремою Тітце-Урисона [10, с. 116] існує неперервна функція $f_1 : \mathbb{R} \to [0;+\infty]$ така, що $f_1(x) = f(x)$ на F. Далі за теоремою Веденісова [10, с. 82] існує неперервна функція $f_2 : \mathbb{R} \to [0;+\infty]$ така, що $F = f_2^{-1}(+\infty)$. Визначимо неперервну функцію $f_0 : \mathbb{R} \to [0;+\infty]$ за правилом

$$f_0(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$$

для довільного $x \in \mathbb{R}$. Тоді $f_0(x) = f(x)$ на F і $f_0(x) < +\infty$ на G, адже $f_0(x) \le f_2(x)$. Далі виберемо $\mathcal{V}_F$ і $\mathcal{W}_F$ згідно з лемою 3. Для довільного $U \in \mathcal{U}_F = \mathcal{V}_F \sqcup \mathcal{W}_F$ покладемо

$$h_U = \begin{cases} \inf f_0(U), & \text{якщо } U \in \mathcal{V}_F, \\ 0 & , \text{якщо } U \in \mathcal{W}_F. \end{cases}$$

Визначимо функцію $g : G \to [0;+\infty)$, покладаючи $g(x) = h_U$ при $x \in U$ для довільного $U \in \mathcal{U}_F$. Перевіримо, що функція g шукана. Оскільки $\omega_f = f^{\vee} - f^{\wedge}$, то досить показати, що $g^{\wedge}(x) = 0$ і $g^{\vee}(x) = f(x)$ на F.

Виберемо довільне $x_0 \in F$. Ясно, що $0 \le g(x) \le f_0(x)$ на G. Оскільки f_0 неперервна, то $f_0 = f_0{}^{\vee}$. Тому $0 \le g^{\wedge}(x_0) \le$ $\le g^{\vee}(x_0) \le f_0{}^{\vee}(x_0) = f_0(x_0) = f(x_0)$. Покажемо, що $g^{\wedge}(x_0) \le 0$. Розглянемо окіл U точки x_0. За вибором системи $\mathcal{W}_F$ існує $W \in \mathcal{W}_F$ таке, що $W \subseteq U$. Візьмемо $x_1 \in W$. Для нього маємо, що $\inf g(U) \le g(x_1) = h_W = 0$. Тому $g^{\wedge}(x_0) = \sup_{U\text{- окіл } x_0} \inf g(U) \le 0$.

Доведемо тепер, що $g^{\vee}(x_0) \ge f(x_0)$. Зафіксуємо $\gamma < f(x_0)$ і перевіримо, що $g^{\vee}(x_0) \ge \gamma$. З неперервності f_0 випливає, що існує такий окіл U_0 точки x_0, що для довільного $x \in U_0$ виконується, що $f_0(x) > \gamma$. Розглянемо довільний окіл U точки x_0. За вибором $\mathcal{V}_F$ існує $V \in \mathcal{V}_F$ таке, що $V \subseteq U \cap U_0$. Далі візьмемо $x_2 \in V$. Тоді $g(x_2) = h_V = \inf f_0(V) \ge \inf f_0(U_0) \ge \gamma$. А тому $\sup g(U) \ge g(x_2) \ge \gamma$. Таким чином, $g^{\vee}(x_0) = \inf_{U\text{- окіл } x_0} \sup g(U) \ge \gamma$. Попрямувавши в попередній нерівності $\gamma \to f(x_0)$ отримаємо, що $g^{\vee}(x_0) \ge f(x_0)$. Таким чином, $\widetilde{\omega}_g(x_0) = g^{\vee}(x_0) - g^{\wedge}(x_0) = f(x_0) - 0 = f(x_0)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kostyrko P.* Some properties of oscilation // Math. Slovaca. – 1980. – **30.** – P.157–162.

2. *Duszynski Z.* On the ω–primitives // Math. Slovaka. – 2001. – **51**. – P.469–476.

3. *Ewert J., Ponomarev S.* Oscillation and ω–primitives // Real Anal. Exchange. – 2001–2002. – **26**. – P. 687–702.

4. *Ewert J., Ponomarev S.* On the existance of ω-primitives on arbitrary metric spaces // Math. Slovaca. – 2003. – **53**. – P.51–57.

5. *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних та різні аналоги компактних операторів: Дис...докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. - Чернівці, 2012. - 300 с.

6. *Maslyuchenko O.V.* The oscillation of quasicontinuous functions on pairwise attainable spaces // Houston Journal of Mathematics. 2009. - **35**, N1. - P.113-130.

7. *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних: коливання суми функцій // Математичний вісник НТШ. – **5**. – 2008. – С.151–163.

8. *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних: сильно досяжні простори // Математичний вісник НТШ. – **6**. – 2009. – С.155–178.

9. *Маслюченко О.В.* Коливання нарізно локально ліпшицевих функцій // Карпатські математичні публікації.–2011.–**3**, N1.–С.22–33.

10. *Энгелькинг Р.* Общая топология // Москва: Мир, 1986. – 752с.

УДК 515.12, 517.51

©2013 р. О.Д. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПЛОЩИНІ СІДРА

Досліджено множину точок неперервності нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{M}$, визначених на добутку зв'язних топологічних просторів зі значеннями в площині Сідра $\mathbb{M}$.

We investigate the continuity points set of separately continuous mappings $f : X_1 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{M}$ defined on a product of connected topological spaces with values in the Ceder plane $\mathbb{M}$.

1. Вступ. З кінця XX століття активно ведуться дослідження сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ та їх аналогів зі значеннями в неметризовних просторах. Важливими типами просторів близьких до метризовних є індуктивні границі, σ-метризовні та сильно σ-метризовні простори, простори Мура, вичерпні та напіввичерпні простори. Множина $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями в згаданих просторах, крім вичерпних та напіввичерпних, вже досить добре вивчена. Отримано також деякі результати про нарізно неперервні відображення зі значеннями в конкретних напіввичерпних просторах, таких як $C_p[0,1]$ та площина Бінґа [1,2]. Дж.Сідр [3] навів цікавий приклад неметризовного вичерпного простору, який ми називаємо площиною Сідра і позначаємо $\mathbb{M}$. Узагальнення цієї конструкції вивчалося в [4-6]. Тому природно постало питання про дослідження точок розриву нарізно неперервних відображень зі значеннями у площині Сідра, що і здійснюється в даній статті.

2. Зв'язні множини та їх властивості. У цьому підрозділі ми введемо потрібні для нас поняття, що стосуються зв'язності, і доведемо деякі факти про компоненти зв'язності.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *зв'язним*, якщо його неможливо подати у вигляді диз'юнктного об'єднання $A \sqcup B$ двох непорожніх відкритих в X множин. Підмножина E простору X називається *зв'язною*, якщо підпростір E простору X з індукованою з X топологією є зв'язним.

Ми будемо використовувати такий факт.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{A}$ – система зв'язних підмножин топологічного простору X, B – зв'язна підмножина простору X, така, що $B \subseteq S = \bigcup \mathcal{A}$ і $B \cap A \neq \varnothing$ для довільної множини A з $\mathcal{A}$. Тоді і S – це зв'язна множина.*

Доведення. Нехай E – непорожня відкрито-замкнена множина в підпросторі S. Покажемо, що $E = S$, звідки і буде випливати зв'язність S.

Оскільки, $E \neq \varnothing$, то існує точка $x_0 \in E$. Але $E \subseteq S$, тому і $x_0 \in S$, а значить, існує елемент $A_0 \in \mathcal{A}$, такий, що $x_0 \in A_0$. Перетин $A_0 \cap E$ непорожній, бо $x_0 \in A_0 \cap E$, причому $A_0 \cap E$ – це відкрито-замкнена підмножина зв'язної множини A_0. Тому $A_0 \cap E = A_0$, тобто $A_0 \subseteq E$. Але $B \cap A_0 \neq \varnothing$ за умовою, отже, і $E \cap B \neq \varnothing$. Оскільки множина E відкрито-замкнена в S і $B \subseteq S$, то $E \cap B$ буде відкрито-замкненою множиною в B. Але і множина B зв'язна, отже, $E \cap B = B$, тобто $B \subseteq E$. Нехай A – довільний елемент з $\mathcal{A}$. За умовою $A \cap B \neq \varnothing$, а значить $A \cap E \neq \varnothing$, звідки негайно випливає, що $A \cap E = A$, тобто $A \subseteq E$. В такому разі і $S = \bigcup \mathcal{A} \subseteq E$, а значить і $S = E$, адже $E \subseteq S$.

Зауважимо, що умова $B \subseteq S$ в лемі 1 істотна. Справді, розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ систему $\mathcal{A}$ зв'язних множин $A_x = \{x\} \times [0, +\infty)$, де x пробігає множину $X_0 =$

$[0,1] \cup [2,3]$, а за B візьмемо зв'язну множину $[0,3] \times \{0\}$. Ясно, що $A_x \cap B = \{(x,0)\}$ для кожного $x \in X_0$, отже, $A \cap B \neq \varnothing$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Але множина

$$S = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x \in X_0} A_x = X_0 \times [0,+\infty) =$$

$$= ([0,1] \times [0,+\infty)) \sqcup ([2,3] \times [0,+\infty)),$$

очевидно, не зв'язна, адже тут $B \nsubseteq S$.

Слід зазначити, що лему 1 можна було б вивести і з теореми 6.1.9 монографії Р.Енгелькінга [7, с. 520], коли долучити множину B до системи $\mathcal{A}$, зауваживши при цьому, що об'єднання не зміниться, адже $B \subseteq S$. Теорему 6.1.9 можна подати в наступному еквівалентному переформулюванні, підсиливши тим самим лему 1.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{A}$ – система зв'язних підмножин топологічного простору X, B – зв'язна підмножина X, $B \subseteq S = \bigcup \mathcal{A}$ і $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$ або $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ для кожного A з $\mathcal{A}$. Тоді і множина S зв'язна в X.*

Доведення. Міркуючи так само як при доведенні леми 1, візьмемо непорожню відкрито-замкнену множину E в S і доведемо, що $E = S$. Існує така множина $A_0 \in \mathcal{A}$, що $A_0 \cap E \neq \varnothing$, а значить, $A_0 \subseteq E$. За умовою $\overline{A_0} \cap B \neq \varnothing$ або $A_0 \cap \overline{B} \neq \varnothing$.

Припустимо, що $\overline{A_0} \cap B \neq \varnothing$. Оскільки $A_0 \subseteq E$, то і $\overline{E} \cap B \neq \varnothing$, адже $\overline{E} \cap B \supseteq \overline{A_0} \cap B$. Зауважимо, що символом $\overline{M}$ ми позначаємо замикання множини M у просторі X. Замикання ж множини $M \subseteq S$ у підпросторі S позначимо символом $\overline{M}^S$. Як добре відомо $\overline{M}^S = \overline{M} \cap S$. У нашому випадку $\overline{E} \cap B \subseteq B \subseteq S$, отже $\overline{E} \cap B = \overline{E} \cap B \cap S = \overline{E} \cap S \cap B = \overline{E}^S \cap B = E \cap B$, адже множина E замкнена в S. Тому $E \cap B \neq \varnothing$, звідки, як і в доведенні леми 1, випливає, що $B \subseteq E$.

Нехай $A_0 \cap \overline{B} \neq \varnothing$. З включення $A_0 \subseteq E$ випливає, що і $E \cap \overline{B} \neq \varnothing$. Оскільки $E \subseteq S$, то $\varnothing \neq E \cap \overline{B} = E \cap S \cap \overline{B} = E \cap \overline{B}^S$. Але множина E відкрита в S. Тому з умови $E \cap \overline{B}^S \neq \varnothing$ випливає, що $E \cap B \neq \varnothing$, звідки, як і раніше, знову отримуємо, що $B \subseteq E$.

Таким чином, ми встановили, що $B \subseteq E$. Нехай тепер A – довільна множина з $\mathcal{A}$. За умовою $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$ або $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$. Замінюючи в попередньому міркуванні A_0 на B, а B на A, отримуємо, що $A \subseteq E$. Тому і $S \subseteq E$, а значить, $S = E$, щ.т.б.д.

Насправді нам буде потрібна тільки лема 1, а не сильніша від неї теорема 1.

Зокрема, з леми 1 легко вивести

Наслідок 1. *Нехай $\mathcal{A}$ – система зв'язних підмножин топологічного простору X, така, що $\bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Тоді об'єднання $S = \bigcup \mathcal{A}$ – це зв'язна множина.*

Доведення. Оскільки $\bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$, то існує така точка $x_0 \in X$, що $x_0 \in A$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Одноточкова множина $B = \{x_0\}$ зв'язна і $B \subseteq S$. Крім того, $A \cap B = \{x_0\} \neq \varnothing$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Отже, за лемою 1 множина S зв'язна.

3. Компоненти зв'язності. Точки x_1 і x_2 топологічного простору X назвемо *зв'язними* (позначається $x_1 \sim x_2$), якщо існує така зв'язна підмножина C простору X, що $\{x_1, x_2\} \subseteq C$. Легко перевірити, що $\sim$ – це відношення еквівалентності на просторі X. Його рефлексивність випливає з того, що кожна одноточкова множина $\{x\}$ в X є зв'язною, симетричність очевидна. Транзитивність доводиться так. Нехай $x_1 \sim x_2$ і $x_2 \sim x_3$. Тоді існують такі зв'язні множини C_1 і C_2, що $\{x_1, x_2\} \subseteq C_1$ і $\{x_2, x_3\} \subseteq C_2$. В такому разі $x_2 \in C_1 \cap C_2$, отже, $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, а тому за наслідком 1 множина $C = C_1 \cup C_2$ зв'язна. Але $\{x_1, x_3\} \subseteq C$, отже, $x_1 \sim x_3$.

Як добре відомо [8, теорема 2, с.43] відношення еквівалентності породжує розбиття $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$ на класи еквівалентних елементів, які називаються *компонентами зв'язності простору* X. Для точки $x \in X$ та множина C з $\mathcal{C}(X)$, для якої $x \in C$, називається *компонентою зв'язності точки* x в X і позначається символом C_x. Ясно, що $C_x = \{y \in X : x \sim y\}$.

Теорема 2. *Нехай X топологічний простір, $x \in E \subseteq X$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) E – компонента зв'язності точки x в X;

(ii) E – найбільша зв'язна множина, що містить точку x.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай $E = C_x \in$

$\mathcal{C}(X)$ і $\mathcal{C}_x$ – це система всіх зв'язних підмножин C простору X, таких, що $x \in C$. За наслідком 1 множина $\tilde{C}_x = \bigcup \mathcal{C}_x$ зв'язна. Зрозуміло з означення, що $\tilde{C}_x$ – це найбільша зв'язна в X множина, яка містить точку x. Залишилося довести, що $E = \tilde{C}_x$.

Зауважимо, що множина E є зв'язною. Справді для кожної точки $y \in E$ існує така зв'язна в X множина A_y, що $\{x, y\} \subseteq A_y$. Множина $S = \bigcup_{y \in E} A_y$ буде зв'язною за наслідком 1, бо $\bigcap_{y \in E} A_y \ni x$. Зрозуміло, що $S \supseteq E$, адже $y \in A_y$ для кожного $y \in C_x$. Навпаки, нехай $z \in S$. Тоді існує таке $y \in C_x$, що $z \in A_y$. В такому разі $\{x, z\} \subseteq A_y$, отже, $x \sim z$, а тому $z \in E$. Таким чином, і $S \subseteq E$, отже, $E = S$, що і дає нам зв'язність множини E.

Оскільки множина E зв'язна і $x \in E$, то $E \subseteq \tilde{C}_x$ за побудовою $\tilde{C}_x$. Навпаки, нехай $y \in \tilde{C}_x$. Тоді існує така зв'язна множина C, що містить точку x, тобто елемент з $\mathcal{C}_x$, що $y \in C$. Для цієї множини $\{x, y\} \subseteq C$, отже, $x \sim y$, тому $y \in E$.

Таким чином, $E = \tilde{C}_x$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай $C_x = \{y \in X : x \sim y\}$ – компонента зв'язності точки x в X і E – найбільша зв'язна множина в X, що містить точку x. За доведеним вище і C_x є найбільшою зв'язною множиною в X, що містить x. Зрозуміло, що така множина єдина, отже, $E = C_x$ і E – це компонента зв'язності точки x в X.

Лема 2. *Нехай $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, де всі X_i – це компоненти зв'язності простору X. Тоді $\mathcal{C}(X) = \{X_i : i \in I\}$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{A} = \{X_i : i \in I\}$. Ясно, що $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$. Навпаки, нехай C – якась компонента зв'язності непорожнього простору X. Тоді $C \neq \varnothing$, отже, існує елемент $x \in C$. Оскільки $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, то існує таке $i \in I$, що $x \in X_i$. Множина $C \cup X_i$ зв'язна за наслідком 1, бо такими є C і X_i, причому $x \in C \cap X_i$, отже, $C \cap X_i \neq \varnothing$. Крім того, $C \subseteq C \cup X_i \supseteq X_i$. Оскільки і C, і X_i – це компоненти зв'язності, то за теоремою 2 $C = C \cup X_i = X_i$, отже, $C \in \mathcal{A}$. Таким чином, $\mathcal{C}(X) = \mathcal{A}$.

Твердження 1. *Нехай X – топологічний простір, $(Y_i : i \in I)$ – сім'я непорожніх відкрито-замкнених зв'язних множин у просторі X, X_0 – непорожня зв'язна множина в X і $X = X_0 \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} Y_i)$. Тоді $\mathcal{C}(X) = \{Y_i : i \in I\} \cup \{X_0\}$.*

Доведення. Доведемо, що Y_i – компонента зв'язності простору X. Оскільки Y_i – непорожня відкрито-замкнена зв'язна множина в просторі X, то існує точка $x \in Y_i$, і нехай B – зв'язна множина в X, така, що $x \in B$. Покажемо, що $B \subseteq Y_i$. Будемо міркувати від супротивного, нехай $B \nsubseteq Y_i$. Тоді існує точка $y \in B \setminus Y_i$. Оскільки множина Y_i відкрита в X, то $B \cap Y_i$ – відкрита в B і $x \in B \cap Y_i$. Але множина Y_i, крім того, ще й замкнена в просторі X, отже доповнення до неї $X \setminus Y_i$ – відкрита множина в просторі X. Тоді $B \setminus Y_i = B \cap (X \setminus Y_i)$ – це відкрита множина в B і точка y належить до неї. Таким чином, множина B подається у вигляді диз'юнктного об'єднання двох непорожніх відкритих в підпросторі B множин, а це суперечить зв'язності множини B. Отже, $B \subseteq Y_i$, тому Y_i – максимальна зв'язна множина, що містить точку x.

Покажемо тепер, що X_0 – компонента зв'язності простору X. Нехай $x \in X_0$ і C – зв'язна множина в просторі X, така, що $x \in C$. Доведемо, що $C \subseteq X_0$. Знову будемо міркувати від супротивного. Нехай це не так, отже, існує точка $y \in C \setminus X_0$. Оскільки, $y \notin X_0$, то існує $i \in I$, таке, що $y \in Y_i$. Покладемо $C_0 = C \cap Y_i$ і $C_1 = C \cap (X \setminus Y_i)$. Множини C_0 і C_1 відкриті в підпросторі C, як сліди відкритих множин Y_i та $X \setminus Y_i$ відповідно в просторі X, і непорожні, бо $x \in C_0$, а $y \in C_1$. Виходить, що множина $C = C_0 \sqcup C_1$ розбивається на дві неперетинні непорожні відкриті в C множини, що суперечить зв'язності C. Отже, $C \subseteq X_0$, а значить, X_0 – компонента зв'язності простору X. Крім того, із зображення $X = X_0 \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} Y_i)$ і того, що множини X_0 та Y_i для всіх $i \in I$ є компонентами зв'язності, з леми 2 випливає, що інших компонент зв'язності простору X не-має. Тому $\mathcal{C}(X) = \{Y_i : i \in I\} \cup \{X_0\}$.

4. Площина Сідра та її розбиття. Для довільних $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$ і $y > 0$ введемо такі позначення: $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $V_\varepsilon(0) = [0, \varepsilon)$ і $V_\varepsilon(y) = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Площиною Сідра $\mathbb{M}$ ми називаємо топологічний простір, що складається з точок півплощини $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, топологічна структура на якому вводиться так: множина W буде околом точки $p = (x, y)$ з $y > 0$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon \in (0, y)$, що $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times V_\varepsilon(y) \subseteq W$, і околом точки $p = (x, 0)$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $W_\varepsilon(p) = U_\varepsilon(x) \overset{x}{\times} V_\varepsilon(0) = (U_\varepsilon(x) \times V_\varepsilon(0)) \setminus (\{x\} \times (0, \varepsilon)) \subseteq W$.

Позначимо $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$, де $x \in \mathbb{R}$ і $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$, і зауважимо, що відображення $\varphi : \mathbb{R} \to X_0$, для якого $\varphi(x) = (x, 0)$, і всі відображення $\psi_x : (0, +\infty) \to Y_x$, такі, що $\psi_x(y) = (x, y)$, є гомеоморфізмами.

Теорема 3. *Підпростори* $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$ *площини Сідра* $\mathbb{M}$ *є відкритими, замкненими і зв'язними, а підпростір* $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ *зв'язний і замкнений в* $\mathbb{M}$, *при цьому* $\mathbb{M} = (\bigsqcup\limits_{x \in \mathbb{R}} Y_x) \sqcup X_0$.

Доведення. Доведемо, що множина Y_x відкрита в $\mathbb{M}$. Справді, нехай $x \in X$ і $p = (x, y) \in Y_x$. Візьмемо будь-яке $0 < \varepsilon < y$. Тоді $V_\varepsilon(y) \subseteq (0, +\infty)$, отже $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times V_\varepsilon(y) \subseteq \{x\} \times (0, +\infty) = Y_x$. Тому Y_x – це окіл довільної своєї точки p, а значить, відкрита множина.

Для доведення замкненості підпростору Y_x розглянемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{M} \setminus Y_x$. Якщо $x_0 = x$ і $y_0 = 0$, то для довільного $\varepsilon > 0$ множина $W = W_\varepsilon(p_0)$ буде околом точки p_0, таким, що $W \cap Y_x = \varnothing$. Якщо ж $x_0 \neq x$, а $y_0 > 0$, то $W = \{x_0\} \times (0, +\infty)$ є околом точки p_0 в $\mathbb{M}$ і $W \cap Y_x = \varnothing$. Розглянемо нарешті випадок, коли $x_0 \neq x$, а $y_0 = 0$. Тоді $|x_0 - x| = \varepsilon > 0$ і множина $W = ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times [0, +\infty))$ є околом точки p_0 в $\mathbb{M}$, таким, що $W \cap Y_x = \varnothing$. Це показує, що множина Y_x містить всі свої точки дотику, отже, є замкненою в $\mathbb{M}$.

Підпростір Y_x є зв'язним, як образ зв'язної множини $(0, +\infty)$ при побудованому вище неперервному відображенні $\psi_x : (0, +\infty) \to Y_x$.

Доведемо тепер замкненість підпростору X_0 площини Сідра. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{M} \setminus X_0$. Тоді обов'язково $y_0 > 0$ і множина $W = \{x_0\} \times (0, +\infty) = Y_{x_0}$ є околом точки p_0 в $\mathbb{M}$, таким, що $W \cap X_0 = \varnothing$, звідки випливає замкненість X_0.

Зв'язність підпростору X_0 отримується з того, що X_0 гомеморфний до числової прямої $\mathbb{R}$, яка є зв'язним простором.

Якщо $x_1 \neq x_2$, то очевидно, що $Y_{x_1} \cap Y_{x_2} = \varnothing$. Перетин підпросторів Y_x та X_0 також порожній, оскільки для довільної точки $p = (x, y) \in Y_x$ обов'язково $y > 0$, а для $p = (x, y) \in X_0$ мусить виконуватись умова, що $y = 0$. При цьому точка $p = (x, y) \in \mathbb{M}$ входить в X_0, якщо $y = 0$ і в Y_x, якщо $y > 0$.

З твердження 1 та теореми 3 негайно випливає

Наслідок 2. *Нехай* $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$, $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ *– підпростори площини Сідра* $\mathbb{M}$. *Тоді* $\mathcal{C}(\mathbb{M}) = \{Y_x : x \in \mathbb{R}\} \cup \{X_0\}$ *– система усіх компонент зв'язності площини Сідра* $\mathbb{M}$.

5. Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень від двох змінних зі значеннями в площині Сідра. Нам буде потрібне таке

Твердження 2. *Нехай* X, Y *– зв'язні топологічні простори,* Z *– топологічний простір і* $f : X \times Y \to Z$ *– нарізно неперервне відображення. Тоді* $f(X \times Y)$ *– зв'язна множина.*

Доведення. Зафіксуємо $x \in X$ і розглянемо множину $f^x(Y)$, яка є зв'язною, як образ зв'язної множини Y при неперервному відображенні $f^x : Y \to Z$. Зрозуміло, що $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$. Розглянемо $y_0 \in Y$ і відповідний горизонтальний розріз $f_{y_0}(X)$, він є зв'язною підмножиною простору Z, як образ зв'язної множини X при неперервному відображенні $f_{y_0} : X \to Z$. Оскільки $f(x, y_0) \in f^x(Y)$ і $f(x, y_0) \in f_{y_0}(X)$ для довільного x з X, то маємо, що $f_{y_0}(X) \cap f^x(Y) \neq \varnothing$ для всіх x з X. Отже, за лемою 1 множина $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$ є зв'язною.

Нагадаємо, що *множиною зліченного типу* називають таку підмножину B топологічного простору Y, що для неї існує послідовність відкритих в Y множин V_n, така, що для кожного $y \in B$ система $\{V_n : y \in V_n\}$ є базою околів точки y в Y.

Добре відома теорема Калбрі-Троалліка [9] твердить, що для довільних топологічних просторів X і Y, метризовного простору Z, нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ і множини B зліченного типу в Y існує така залишкова множина A в X, що $A \times B \subseteq C(f)$. З цієї теореми легко випливає, що для нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ зі значеннями в метризовному просторі Z множини $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ чи $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ будуть залишковими в X, якщо Y задовольняє першу чи другу аксіоми зліченності відповідно.

Теорема 4. *Нехай X і Y – зв'язні топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення і B – множина зліченного типу в Y. Тоді множина $C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X.*

Доведення. Оскільки X та Y – зв'язні простори, то за твердженням 2 множина $f(X \times Y)$ є зв'язною в $\mathbb{M}$, а значить, за теоремою 2 міститься в деякій компоненті зв'язності площини Сідра $\mathbb{M}$. В площині Сідра компонентами зв'язності є підпростори Y_x, де $x \in \mathbb{R}$, та X_0, що встановлено в наслідку 2, тому $f(X \times Y) \subseteq Y_x$ для деякого $x \in \mathbb{R}$ або $f(X \times Y) \subseteq X_0$. Оскільки для довільного $x \in \mathbb{R}$ підпростір Y_x гомеоморфний до метризовного підпростору $(0, +\infty)$ числової прямої $\mathbb{R}$, а X_0 гомеоморфний до числової прямої $\mathbb{R}$, то f набуває значень в метризовному підпросторі площини Сідра $\mathbb{M}$. Тому за теоремою Калбрі-Троалліка існує залишкова множина A в X, така що $A \times B \subseteq C(f)$. Тоді і множина $C_B(f)$ є залишковою в X, адже $A \subseteq C_B(f)$.

Наслідок 3. *Нехай X і Y – зв'язні топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множини $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ чи $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ будуть залишковими в X, якщо Y задовольняє першу чи другу аксіоми зліченності відповідно.*

Доведення. Нехай Y задовольняє першу аксіому зліченності, тобто для довільного y з Y існує система $\mathcal{V}_y = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин в Y, яка є базою околів точки y. Отже, будь-яка одноточкова множина $\{y\}$ буде множиною зліченного типу в Y. Тоді множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ є залишковою в X для кожного $y \in Y$ за теоремою 4.

Нехай тепер Y задовольняє другу аксіому зліченності, тобто існує $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. В цьому випадку сам простір Y є множиною зліченного типу. Отже, за теоремою 4 множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X.

6. Сукупна неперервність нарізно неперервних функцій від багатьох змінних зі значеннями в площині Сідра. Користуючись відомими результатами В. Маслюченка про величину множини точок неперервності нарізно неперервних відображень багатьох змінних зі значеннями в метризовних просторах [10], ми можемо перенести теореми попереднього розділу на випадок $n+1$ змінної. Для цього нам будуть потрібні такі теореми:

Теорема A. (Маслюченко В.К., 1998) *Якщо X_1 – довільний топологічний простір, простори $X_2, ..., X_{n+1}$ задовольняють першу аксіому зліченності, простір Z метризовний і $f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n+1} \to Z$ – нарізно неперервне відображення, то множина $C_y(f) = \{x \in X = X_1 \times ... \times X_n : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y = X_{n+1}$ буде залишковою в X.*

Теорема B. (Маслюченко В.К., 1998) *Якщо X_1 – топологічний простір, $X_2, ..., X_n$ задовольняють першу аксіому зліченності, $Y = X_{n+1}$ задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний, $f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n+1} \to Z$ – нарізно неперервне відображення, то множина $C_Y(f) = \{x \in X = X_1 \times ... \times X_n : (\{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ буде залишковою в X.*

Теорема 5. *Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ – зв'язні топологічні простори, Z – топологічний простір і $f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Z$ – нарізно неперервне відображення. Тоді*

$f(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)$ – *зв'язна множина в* Z.

Доведення. Для доведення застосуємо індукцію відносно n. Для $n = 1$ твердження теореми це не що інше як добре відомий факт, яким ми не раз користувалися в даній роботі, про те, що образ зв'язної множини при неперервному відображенні є зв'язною множиною. При $n = 2$ ця теорема – це твердження 2. Припустимо, що ця теорема вірна для функцій від n змінних, де $n \geq 2$, і доведемо, що вона має місце і для функцій від $n + 1$ змінної.

Нехай $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ – зв'язні топологічні простори. Тоді добуток $X = X_1 \times ... \times X_n$ є також зв'язним [7, с. 521]. Покладемо $Y = X_{n+1}$ і будемо розглядати відображення з формулювання теореми, як відображення на добутку двох зв'язних просторів X та Y. Зрозуміло, що $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$. Всі множини $f^x(Y)$ зв'язні, оскільки відображення $f^x : Y \to Z$ неперервні і Y – зв'язний простір. Зафіксуємо $y_0 \in Y$ і розглянемо множину $f_{y_0}(X)$, яка є зв'язною за індуктивним припущенням, адже $f_{y_0} : X \to Z$ – нарізно неперервне відображення. Оскільки $f(x, y_0) \in f_{y_0}(X) \cap f^x(Y)$ для довільного $x \in X$, то $f^x(Y) \cap f_{y_0}(X) \neq \varnothing$ для кожного $x \in X$. Тому за лемою 1 множина $f(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n+1}) = f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$ є зв'язною.

Теорема 6. *Нехай* $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ – *зв'язні топологічні простори,* $X_2, ..., X_n$ *задовольняють першу аксіому зліченності,* $X = X_1 \times ... \times X_n$, $Y = X_{n+1}$ *і* $f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{M}$ – *нарізно неперервне відображення. Тоді множини* $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ *для кожного* $y \in Y$ *чи* $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ *будуть залишковими в* X, *якщо* Y *задовольняє першу чи другу аксіоми зліченності відповідно.*

Доведення. За теоремою 5 множина $f(X \times Y)$ є зв'язною в $\mathbb{M}$, а значить міститься в деякій компоненті зв'язності площини Сідра $\mathbb{M}$. Далі, міркуючи аналогічно як і в доведенні теореми 4, отримаємо, що множина значень $f(X \times Y)$ нашого відображення f міститься в метризовному підпросторі площини Сідра $\mathbb{M}$. Отже, якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то за теоремою A множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ буде залишковою в добутку $X = X_1 \times ... \times X_n$ для кожного $y \in Y$. Якщо ж простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то за теоремою B отримуємо залишковість множини $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ в просторі X.

Висловлюю щиру вдячність Маслюченку Володимиру Кириловичу за допомогу та постійну увагу при написанні цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори // Мат. вісн. НТШ. – 2010. – **7**. – С.111-121.
2. *Карлова О.О., Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Площина Бінґа і нарізно неперервні відображення // Мат. студії. – 2012. – **38**, №2. – С.188-193.
3. *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961.–**11**. – P. 105-126.
4. *В. Маслюченко, О. Мироник* Вичерпність гребінця Сідра // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. 20 - 26 лютого, Ворохта. - Ів.-Франківськ, 2012. - С.44-45.
5. *В. Маслюченко, О. Маслюченко, О. Мироник* Аксіоми відокремності і метризовність добутку Сідра // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. 25 лютого - 3 березня, Ворохта. - Ів.-Франківськ, 2013. - С. 63-64.
6. *В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник* Добуток Сідра та вичерпні простори // Бук. мат. журн. – 2013. – Т. 1, №1-2. С. 107-112.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
8. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
9. *Calbrix J., Troallic J.P.* Applications séparément continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. A. – 1979. – **288**. – P.647-648.
10. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 1998. – **41**, №4. – С. 39–45.

УДК 517.51

©2013 р. В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НОВІ ХАРАКТЕРИЗАЦІЇ ДЕЯКИХ ОСЛАБЛЕНЬ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Досліджуються характеризації різних ослаблень неперервності в термінах замикання. Зокрема встановлено, що відображення f є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної передвідкритої множини A, такої, що $int\overline{A}$ – область.

We study characterizations of various weakening of continuity in terms of the closure. In particular, we prove that a mapping f is a B-quasi-continuous if and only if $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ for any pre-open set A such that $int\overline{A}$ is a connected open set.

1. Вступ. Добре відомою є характеризація неперевності відображення в термінах його замикання: відображення f між топологічними просторами X та Y є неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для довільної підмножини A простору X, де $\overline{A}$ означає замикання множини A.

К.Келлум у [1] увів поняття функції Ґібсона, а саме, відображення $f : X \to Y$ називається *функцією Ґібсона*, якщо $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ для всіх відкритих множин U в X. В [2] О.Карлова та В.Михайлюк встановили, що поняття майже неперервності та поняття функції Ґібсона означають одне і теж.

П.С.Келлер в [3] увів властивість щільності відображення ("dense mapping property", коротко DMP). Відображення $f : X \to Y$ має властивість DMP, якщо $f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$ для довільної підмножини D простору X, такої, що $\overline{D}$ є зв'язною множиною. Р.Мімна в [4] встановив, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли вона має властивість DMP. В [5] Я.Борсіком було показано, що якщо відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y має властивість DMP, то f є B-квазінеперервним, а також наведено приклад функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка є B-квазінеперервною, але не має властивості DMP. Також в [4] Р.Мімна показав, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)}$ для довільної ніде не щільної множини N.

Крім майже неперервності та двосторонньої квазінеперервності існує велика кількість інших ослаблень неперервності (квазінеперервність, периферійна неперервність, ледь неперервність тощо). Виникає природний інтерес дослідити чи допускають інші ослаблення неперервності подібну характеризацію з допомогою включення $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, що виконується для множини A з певної системи $\mathcal{A}$. В цій статті характеризації знайдено для властивості Юнґа, B-квазінеперервності, α-неперервності, ледь неперервності та майже ледь неперервності. Досліджено також з цієї точки зору і периферійну неперервність. На жаль, для квазінеперервності такої характеризації не знайдено.

2. $\mathcal{A}$-неперервність. Нехай X і Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – деяка система підмножин простору X і $f : X \to Y$ – відображення. Ми кажемо, що відображення f є $\mathcal{A}$-*неперервним*, якщо $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \in \mathcal{A}$.

Спочатку перенесемо результат Р.Мімни з [4] на випадок топологічних просторів.

Теорема 2.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, причому простір X задовольняє умову:*

($\star$) *для довільної підмножини A в X і точки $x \in \overline{A} \setminus A$ існує ніде не щільна множина N в X, така, що $N \subseteq A$ і $x \in \overline{N}$,*

і $\mathcal{N}$ – система ніде не щільних підмножин *простору X. Відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{N}$-неперервним.*

Доведення. Необхідність є очевидною. Встановимо достатність. Припустимо, що відображення f є $\mathcal{N}$-неперервним і не є неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y такий, що для довільного околу U точки x_0 в X існує точка $x_U \in U$, така, що $f(x_U) \in Y \setminus V$. Розглянемо множину $A = \{x_U \in X : U -$ окіл точки $x_0\}$. Очевидно, що $x_0 \in \overline{A} \setminus A$ і $f(A) \subseteq Y \setminus V$. Тоді за умовою існує ніде не щільна множина N в X, така, що $N \subseteq A$ і $x_0 \in \overline{N}$. З $\mathcal{N}$-неперервності відображення f, замкненості множини $Y \setminus V$ і умови $N \subseteq A$ випливає, що

$$f(x_0) \in f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Однак, $f(x_0) \in V$, що приводить до суперечності.

Зауважимо, що якщо простір має ізольовані точки, то він не задовольняє умову $(\star)$. Те, що простір X в теоремі 2.1 не має ізольованих точок, є істотною умовою. Це показує наступний приклад.

Приклад. Нехай $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ – простір з індукованою топологією. Визначимо функцію $f : X \to \mathbb{R}$ так: $f(x) = 0$, якщо $x \neq 0$ і $f(0) = 1$. Так визначена функція є розривною в точці $x = 0$. Єдиною непорожньою ніде не щільною множиною в X є одноточкова множина $N = \{0\}$. Зрозуміло, що $\overline{N} = N$. Тоді

$$f(\overline{N}) = f(N) = \{1\} = \overline{\{1\}} = \overline{f(N)}.$$

Отже, функція f є $\mathcal{N}$-неперервною, але розривною.

Теорема 2.2. *Якщо X – гаусдорфовий простір з першою аксіомою зліченності без ізольованих точок, то він задовольняє умову $(\star)$.*

Доведення. Нехай $A \subseteq X$, $x \in \overline{A} \setminus A$ і $\mathcal{V}$ – зліченна база точки x. Візьмемо довільну точку $x_1 \in A$. З гаусдорфовості випливає, що існують відкриті околи U_1 і V_1 точок x_1 і x відповідно, такі, що $V_1 \in \mathcal{V}$ і $U_1 \cap V_1 = \varnothing$. Оскільки $x \in \overline{A}$, то існує точка $x_2 \in V_1 \cap A$. Знову з гаусдорфовості простору X випливає, що існують відкриті околи U_2 і V_2 точок x_2 і x відповідно, такі, що $V_2 \in \mathcal{V}$ і $V_2 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_1$ і $U_2 \cap V_2 = \varnothing$. Зауважимо, що $U_2 \cap U_1 = \varnothing$. Продовживши це процес до безмежності ми отримаємо послідовність точок (x_n) і послідовність попарно неперетинних відкритих множин (U_n), такі, що $N = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subseteq A$ і $x_n \in U_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що множина N ніде не щільна. Розглянемо довільну відкриту непорожню множину G в X. Нехай $G \cap N \neq \varnothing$. Тоді існує номер n_0, такий, що $x_{n_0} \in G$. Оскільки простір X без ізольованих точок, то існує точка $x' \in G \cap U_{n_0}$ і $x' \neq x_{n_0}$. З гаусдорфовості простору X випливає, що існує відкритий окіл G' точки x', такий, що $x_{n_0} \notin G'$. Тоді множина $H = G \cap G' \cap U_{n_0}$ відкрита непорожня, $x_{n_0} \notin H$ і $H \subseteq G$. Крім того, $H \cap U_n = \varnothing$ для всіх номерів $n \neq n_0$, бо послідовність (U_n) складається із попарно неперетинних відкритих множин. Тому $H \cap N = \varnothing$ і це означає, що множина N ніде не щільна.

3. Майже неперервність та функції Ґібсона. Відображення $f : X \to Y$ називається *майже неперервним (в розумінні Гусейна) в точці* $x \in X$ [6], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$, де $intA$ означає внутрішність множини A. Якщо відображення f майже неперервне в кожній точці, то воно називається *майже неперервним.*

О.Карлова та В.Михайлюк в [2] встановили наступний результат.

Теорема 3.1. *Нехай X та Y – топологічні простори і $\mathcal{G}$ – система відкритих підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ є майже неперервне тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{G}$-неперервним.*

Цю теорему можна доповнити таким чином. Підмножина A простору X називається *напіввідкритою* [7], якщо $A \subseteq \overline{intA}$. Очевидно, що кожна відкрита множина є напіввідкритою.

Теорема 3.2. *Нехай X та Y – топологі-*

чні простори, $\mathcal{G}_s$ – система напіввідкритих множин в X. Відображення $f : X \to Y$ є майже неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{G}_s$-неперервним.

Доведення. Якщо f – майже неперервне, то за теоремою 3.1 f є функцією Ґібсона, тобто $f(\overline{G}) \subseteq \overline{f(G)}$ для кожної відкритої множини G, а тоді для кожної напіввідкритої множини A маємо, що

$$f(\overline{A}) \subseteq f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(intA)} \subseteq \overline{f(A)},$$

бо множина $G = intA$ відкрита і $A \subseteq \overline{intA}$.

Навпаки, нехай відображення f є $\mathcal{G}_s$-неперервним. Оскільки $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_s$ і відображення f є $\mathcal{G}_s$-неперервним, то відображення f є $\mathcal{G}$-неперервним. Тоді з теореми 3.1 випливає, що f є майже неперервним.

З теорем 3.1 та 3.2 одержуємо наступний очевидний результат.

Наслідок 3.3. *Для топологічних просторів X та Y і відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

(1) f – майже неперервне;

(2) f є функцією Ґібсона;

(3) f є $\mathcal{G}_s$-неперервним.

4. Властивість Юнґа та слабкі функції Ґібсона. У [2], поряд з поняття функції Ґібсона, розглядається поняття слабкої функції Ґібсона. Відображення $f : X \to Y$ називається *слабкою функцією Ґібсона*, якщо $f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}$ для довільної області (відкритої та зв'язної множини) O в X.

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має *властивість Юнґа* [8], якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}$ існують послідовності (x'_n) і (x''_n), такі, що $x'_n \le x'_{n+1} < x$, $x''_n \ge x''_{n+1} > x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = f(x)$.

Теорема 4.1. *Нехай $\mathcal{O}$ – система всіх областей в $\mathbb{R}$ (тобто, система всіх інтервалів в $\mathbb{R}$). Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має властивість Юнґа тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{O}$-неперервною.*

Доведення. Нехай f має властивість Юнґа і $A \in \mathcal{O}$. Розглянемо довільну точку $y \in f(\overline{A})$ і окіл V точки y. Нехай x – це така точка, що $x \in \overline{A}$ і $f(x) = y$. Якщо $x \in A$, то $y \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$. Нехай $x \notin A$. Оскільки A є відкритим інтервалом і $x \in \overline{A} \setminus A$, то $A = (x, \omega)$, де $x < \omega \le +\infty$, або $A = (\omega, x)$, де $-\infty \le \omega < x$. Припустимо, що $A = (x, \omega)$. Оскільки f має властивість Юнґа, то існує послідовність (x_n), така, що $x_n \ge x_{n+1} > x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Тоді існує такий номер N, що $x_N \in A$ і $f(x_N) \in V$. Тому $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Аналогічно міркується у випадку $A = (\omega, x)$. Отже, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Таким чином, f є $\mathcal{O}$-неперервною.

Навпаки, нехай функція f є $\mathcal{O}$-неперервною. Припустимо, що функція f не має властивості Юнґа. Тоді існують точка x_0, відкритий окіл V точки $f(x_0)$ та інтервали $A = (x, x+\delta)$, або $A = (x, x+\delta)$, де $\delta > 0$, такі, що $f(A) \subseteq \mathbb{R} \setminus V$. Оскільки $x_0 \in \overline{A}$, $A \in \mathcal{O}$, функція f є $\mathcal{O}$-неперервною і множина $\mathbb{R} \setminus V$ замкнена, то

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus V} = \mathbb{R} \setminus V.$$

Це суперечить тому, що V є околом точки x_0. Одержана суперечність завершує доведення.

Наслідок 4.2. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має властивість Юнґа тоді і тільки тоді, коли f є слабкою функцією Ґібсона.*

5. Периферійна неперервність. Для множини A топологічного простору X через $frA = \overline{A} \setminus intA$ позначимо її межу. Відображення $f : X \to Y$ називається *периферійно неперервним у точці* $x \in X$ [9], якщо для довільних відкритих околів U і V точок x в X і $y = f(x)$ в Y відповідно, існує відкритий окіл G точки x в X, такий, що $G \subseteq U$ і $f(frG) \subseteq V$, і просто *периферійно неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці. Для $X = Y = \mathbb{R}$ периферійна неперервність еквівалентна властивості Юнґа [8, с. 495].

Теорема 5.1. *Нехай X – T_1-простір та Y – топологічний простір, $\mathcal{C}$ – система зв'язних множин в X і $f : X \to Y$ – периферійно неперервне відображення. Тоді f є $\mathcal{C}$-неперервним.*

Доведення. Нехай відображення f периферійно неперервне. Розглянемо зв'язну множину A в X. Нехай $y \in f(\overline{A})$, V – окіл точки y в Y, точка $x \in \overline{A}$, така, що $f(x) = y$.

Якщо для довільного околу U точки x маємо, що $U \cap A \supseteq A$, то $A = \{x\}$. Справді, якщо $A \neq \{x\}$, то існує точка $a \in A$, так, що $a \neq x$. Оскільки простір X задовольняє аксіому T_1, то існує окіл U_a точки x, такий, що $a \notin U_a$ і тоді $U_a \not\supseteq A$. А це суперечить тому, що $U \cap A \supseteq A$ для довільного околу U точки x. Таким чином, якщо для довільного околу U точки x маємо, що $U \cap A \supseteq A$, то $A = \{x\}$ і тому $y = f(x) \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$.

Нехай існує відкритий окіл U_0 точки x, такий, що $U_0 \cap A \not\supseteq A$. З периферійної неперервності відображення f в точці x випливає, що існує відкрита непорожня G в X, така, що $G \subseteq U_0$ і $f(frG) \subseteq V$. Оскільки $G \cap A \neq \varnothing$, бо $x \in \overline{A}$, $G \not\supseteq A$, бо $G \subseteq U_0$ і множина A є зв'язною, то $frG \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in frG \cap A$. Тоді $f(a) \in f(frG) \subseteq V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і тому $y \in \overline{f(A)}$.

В обох випадках ми одержуємо, що $y \in \overline{f(A)}$, отже $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Таким чином, f є $\mathcal{C}$-неперервним.

Наслідок 5.2. *Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наступні умови еквівалентні:*

(1) f має властивість Юнґа;

(2) f є слабкою функцією Ґібсона;

(3) f периферійно неперервна;

(4) f є $\mathcal{C}$-неперервною.

Доведення. Імплікацію (1) $\Leftrightarrow$ (2) доведено у пункті 4 (наслідок 4.2). Те, що (1) $\Leftrightarrow$ (3) встановлено у [8, с. 495]. Імплікація (3) $\Rightarrow$ (4) випливає з теореми 5.1. З означення $\mathcal{C}$-неперервності легко вивести, що (4) $\Rightarrow$ (2).

Питання. Нехай $\mathcal{C}$ – система зв'язних множин в $\mathbb{R}^2$ і $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{C}$-неперервна функція. Чи буде f периферійно неперервною?

6. B-квазінеперервність. Відображення $f : X \to Y$ називається *B-квазінеперервним у точці $x \in X$* [5], якщо для довільного околу V точки $y = f(x)$ в Y і довільної області O в X, такої, що $x \in \overline{O}$ існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(U) \subseteq V$. Якщо відображення B-квазінеперервне у кожній точці, то воно називається *B-квазінеперервним.* Поняття B-квазінеперервності є узагальненням поняття двосторонньої квазінеперервності на випадок відображень між довільними топологічними просторами.

Підмножина A простору X називається *передвідкритою* [10], якщо $A \subseteq int\overline{A}$.

Лема 6.1. *Якщо O – область в топологічному просторі X, $A \subseteq X$ і $A \subseteq O \subseteq \overline{A}$, то $int\overline{A}$ – область в X.*

Доведення. Якби множина $int\overline{A}$ була не зв'язною, то існували б відкриті непорожні множини U_1 та U_2, такі, що $U_1 \cap int\overline{A} \neq \varnothing$, $U_2 \cap int\overline{A} \neq \varnothing$ і $int\overline{A} \subseteq U_1 \sqcup U_2$. Зрозуміло, що тоді б $U_i \cap \overline{A} \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. Оскільки $\overline{A} = \overline{O}$, то $U_i \cap \overline{O} \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. З властивості множини U_i випливає, що $U_i \cap O \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. Оскільки $O \subseteq int\overline{A}$ і $int\overline{A} \subseteq U_1 \sqcup U_2$, то $O \subseteq U_1 \sqcup U_2$. Тоді $O = (U_1 \cap O) \sqcup (U_2 \cap O)$, що суперечить зв'язності множини O. Отже, множина $int\overline{A}$ зв'язна. Таким чином, $int\overline{A}$ – область.

Теорема 6.2. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{O}_p = \{A \in 2^X : A$ – передвідкрита множина і $int\overline{A}$ – область$\}$. Відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{O}_p$-неперервним.*

Доведення. Нехай спочатку відображення f є B-квазінеперервним і $A \in \mathcal{O}_p$, тобто, A – передвідкрита множина, така, що $int\overline{A}$ – область. Візьмемо довільну точку $y \in f(\overline{A})$ та окіл V точки y. Нехай x – це така точка з множини $\overline{A}$, що $f(x) = y$. Покажемо, що $x \in \overline{int\overline{A}}$. Справді, нехай U – довільний окіл точки x. Оскільки $x \in \overline{A}$, то $U \cap A \neq \varnothing$. Але з передвідкритості множини A випливає, що $\varnothing \neq U \cap A \subseteq U \cap int\overline{A}$. Отже, $x \in \overline{int\overline{A}}$.

За умовою $int\overline{A}$ є областю. Тоді з B-квазінеперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq int\overline{A}$, а отже, $G \subseteq \overline{A}$, і $f(G) \subseteq V$. Оскільки G – відкрита непорожня множина і $G \subseteq \overline{A}$, то $G \cap A \neq \varnothing$. Тому $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і, таким чином, $y \in \overline{f(A)}$. Оскільки y була довільною точкою множини $f(\overline{A})$, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Це означає, що відображення f є $\mathcal{O}_p$-неперервне.

Навпаки, нехай тепер відображення f є $\mathcal{O}_p$-неперервним. Покажемо, що f – B-квазінеперервне відображення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай відображення f не є B-квазінеперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існують відкритий окіл V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y і область O в X, для якої $x_0 \in \overline{O}$, такі, що для довільної відкритої непорожньої множини $G \subseteq O$ маємо, що $f(G) \nsubseteq V$. Таким чином, для довільної відкритої непорожньої множини G в X, такої, що $G \subseteq O$, існує точка $x_G \in G$, що $f(x_G) \notin V$. Розглянемо множину $A = \{x_G \in X : G$ – відкрита непорожня множина в X і $G \subseteq O\}$. Зрозуміло, що $f(A) \subseteq Y \setminus V$.

Зауважимо, що $A \subseteq O \subseteq \overline{A}$. Тоді $O = intO \subseteq int\overline{A}$ і $A \subseteq O \subseteq int\overline{A}$. Отже, множина A передвідкрита, а згідно з лемою 6.1 множина $int\overline{A}$ зв'язна.

Оскільки відображення f є $\mathcal{O}_p$-неперервне, то

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Але з другого боку, $f(x_0) \in V$, бо V – окіл точки $f(x_0)$. Одержана суперечність завершує доведення.

Наведемо ще одну характеризацію B-квазінеперервності. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається *квазінеперервним в точці* $x \in X$ [11], якщо для довільних околів U і V відповідно точок $x \in X$ і $y = f(x) \in Y$ існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Відображення називається *квазінеперервним*, якщо вона є таким в кожній точці. Кажуть, що функція $f : X \to Y$ має *властивість Дарбу* [12], якщо $f(A)$ є зв'язною множиною для довільної зв'язної множини A в X. В [13] Я.Борсік встановив, що коли функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною і має властивість Дарбу, то вона двосторонньо квазінеперервна. Там же було наведено приклад функції, який показує, що обернене твердження не вірне. Тут ми узагальнимо цей результат.

Теорема 6.3. *Нехай X – локально зв'язний простір і Y – топологічний простір. Відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f є квазінеперервним і є слабкою функцією Ґібсона.*

Доведення. Нехай відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним. Перевіримо спочатку, що f є слабкою функцією Ґібсона. Розглянемо довільну область O в просторі X. Оскільки множина O відкрита, то $O \subseteq int\overline{O}$ і тому O – передвідкрита множина. Згідно з лемою 6.1 множина $int\overline{O}$ є областю. Таким чином, $O \in \mathcal{O}_p$. Тоді з B-квазінеперервності відображення f випливає, що

$$f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}.$$

Це означає, що f є слабкою функцією Ґібсона.

Тепер встановимо квазінеперервність. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та околи U і V точок x в X і $f(x)$ в Y відповідно. Існує відкритий зв'язний окіл O точки x, такий, що $O \subseteq U$. Таким околом буде компонента зв'язності будь-якого відкритого околу точки x, що містить цю точку і міститься в U. Оскільки відображення f B-квазінеперервне, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(G) \subseteq V$. Отже, відображення f квазінеперервне в точці x.

Навпаки, нехай відображення $f : X \to Y$ є квазінеперервним і є слабкою функцією Ґібсона. Розглянемо довільну точку $x \in X$, відкритий окіл V точки $f(x)$ в Y і область O в X, таку, що $x \in \overline{O}$. З означення слабкої функції Ґібсона випливає, що $f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}$. Оскільки $x \in \overline{O}$, то $f(x) \in \overline{f(O)}$, і тому $V \cap f(O) \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_1 \in O$, така, що $f(x_1) \in V$. З квазінеперервності відображення f і того, що множини O і V є околами точок x_1 в X і $f(x_1)$ в Y відповідно випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(G) \subseteq V$. Отже, f – B-квазінеперервне в точці x.

Наслідок 6.4. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли f є квазінеперервною і має вла-*

стивість Юнґа.

7. α-неперервність. Множина A називається *α-відкритою* [14], якщо $A \subseteq int(\overline{intA})$. Легко переконатися [14, твердження 4], що множина A є α-відкритою в X тоді і тільки тоді, коли $A = U \setminus N$, де U – відкрита множина в X, а N – ніде не щільна. Відображення $f : X \to Y$ називається *α-неперервним у точці* $x \in X$ [15], якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існує α-відкрита множина A в X, така, що $x \in A$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *α-неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці.

Лема 7.1. *Нехай $(A_s)_{s\in S}$ – система передвідкритих множин в X. Тоді множина $A = \bigcup\limits_{s\in S} A_s$ передвідкрита.*

Доведення. Нехай $x \in A$. Тоді існує $s \in S$, що $x \in A_s$. Оскільки множина A_s передвідкрита, то $x \in int\overline{A_s}$. Тоді $x \in int\overline{A_s} \subseteq int\overline{A}$. Отже, A – передвідкрита множина.

Теорема 7.2. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{G}_p$ – система всіх передвідкритих множин в X. Відображення $f : X \to Y$ є α-неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{G}_p$-неперервним.*

Доведення. Нехай спочатку відображення $f : X \to Y$ є α-неперервним. Розглянемо довільну множину $A \in \mathcal{G}_p$, точку $y \in f(\overline{A})$ і V – окіл точки y в Y. Тоді існує точка $x \in \overline{A}$, така, що $f(x) = y$. Оскільки відображення f є α-неперервним в точці x, то існує α-відкрита множина E, така, що $x \in E$ і $f(E) \subseteq V$. З α-відкритості множини E випливає, що існують відкрита множина U в X і ніде не щільна множина N в X, такі, що $E = U \setminus N$. Зрозуміло, що U – окіл точки x. Оскільки $x \in \overline{A}$, то $U \cap A \neq \varnothing$. З передвідкритості множини A випливає, що $\varnothing \neq U \cap A \subseteq U \cap int\overline{A}$. Покладемо $G = U \cap int\overline{A}$. Оскільки $G \subseteq int\overline{A} \subseteq \overline{A}$, то множина A щільна в множині G. Тоді $A \cap (G \setminus N) \neq \varnothing$, бо множина N ніде не щільна. З того, що $G \subseteq U$ ми одержуємо, що і $A \cap (U \setminus N) \neq \varnothing$, отже, $A \cap E \neq \varnothing$. Тоді існує точка $a \in A \cap E$, а тому $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Таким чином, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, і значить відображення f є $\mathcal{G}_p$-неперервним.

Навпаки, нехай f є $\mathcal{G}_p$-неперервним. Припустимо, що f не є α-неперервним в деякій точці x_0. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 і довільної ніде не щільної множини N в X існує точка $x_N \in U \setminus N$, така, що $f(x_N) \notin V$. Розглянемо множину $A_U = \{x_N : N -$ ніде не щільна підмножина $U\}$. Множина A_U десь щільна, бо якби вона була ніде не щільна, то існувала б точка $x_{A_U} \in U \setminus A_U$, яка за визначенням множини A_U їй належала. Таким чином, існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 існує десь щільна в U множина A_U, така, що $A_U \subseteq U$ і $f(A_U) \subseteq Y \setminus V$.

Для кожного відкритого околу U точки x_0 розглянемо множину $E_U = A_U \cap int\overline{A_U}$. Зрозуміло, що $E_U \neq \varnothing$ і $E_U \subseteq U$. Покажемо, що множина E_U є передвідкритою. Для цього треба встановити, що $E_U \subseteq int\overline{E_U}$. Зауважимо, що оскільки $G = int\overline{A_U} \subseteq \overline{A_U}$, то

$$G \subseteq \overline{A_U \cap G} = \overline{A_U \cap int\overline{A_U}} = \overline{E_U}.$$

З відкритості множини G випливає, що $G = intG \subseteq int\overline{E_U}$. Таким чином,

$$E_U = A_U \cap int\overline{A_U} = A_U \cap G \subseteq int\overline{E_U}.$$

Отже, множина E_U передвідкрита.

Розглянемо множину

$$A = \bigcup \{E_U : U - \text{ відкритий окіл точки } x_0\}.$$

Зрозуміло, що $x_0 \in \overline{A}$. Згідно з лемою 7.1 множина A є передвідкритою. Тому за припущенням маємо, що

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} \subseteq Y \setminus V.$$

А це суперечить тому, що $f(x_0) \in V$.

8. Ледь неперервність. Відображення $f : X \to Y$ називається *ледь неперервним в точці* $x \in X$ [16], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина G, така, що $f(G) \subseteq V$, і просто *ледь неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Теорема 8.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{D} = \{A \in 2^X : \overline{A} = X\}$. Відображення $f : X \to Y$ є ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{D}$-неперервним.*

Доведення. Досить встановити, що відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх всюди щільних в X множин A.

Нехай відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне і A – всюди щільна в X множина. Розглянемо $x \in X$, $f(x) = y$ і V – окіл точки y. З ледь неперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $f(G) \subseteq V$. Оскільки $\overline{A} = X$, то $G \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in G \cap A$. Тоді $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Таким чином, $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх всюди щільних в X множин A. Припустимо, що $f : X \to Y$ не є ледь неперервним в точці x_0. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$, такий, що для довільної відкритої непорожньої множини G в X існує точка $x_G \in G$, така, що $f(x_G) \in Y \setminus V$. Розглянемо множину $A = \{x_G : G-$ відкрита непорожня в $X\}$. Очевидно, що множина A всюди щільна в X. Тоді

$$f(x_0) \in f(X) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$$

і разом з тим $f(x_0) \in V$. Одержана суперечність завершує доведення.

9. Майже ледь неперервність. Відображення $f : X \to Y$ називається *майже ледь неперервним в точці* $x \in X$ [17], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $int\overline{A} \neq \varnothing$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *майже ледь неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Теорема 9.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{D}_n = \{X \setminus N : N -$ ніде не щільна множина в $X\}$. Відображення $f : X \to Y$ є майже ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{D}_n$-неперервним.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 8.1 досить встановити, що відображення $f : X \to Y$ майже ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх множин $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X.

Нехай відображення $f : X \to Y$ майже ледь неперервне і $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X. Розглянемо $x \in X$, $f(x) = y$ і V – окіл точки y. З майже ледь неперервності відображення f випливає, що існує десь щільна множина E в X, така, що $f(E) \subseteq V$. Оскільки N – ніде не щільна в X, $A = X \setminus N$ і множина E десь щільна в X, то $E \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in E \cap A$. Тоді $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і тому $f(X) = \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх множин $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X. Припустимо, що $f : X \to Y$ не є майже ледь неперервним в точці x_0. Тоді існують відкритий окіл V точки $f(x_0)$ та множина $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X, такі, що $f(A) \in Y \setminus V$. В такому разі

$$f(x_0) \in f(X) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V,$$

і разом з тим $f(x_0) \in V$. Отримана суперечність, яка і завершує доведення.

10. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-неперервність. Узагальнюючи поняття B-квазінеперервності, введемо нове поняття. Нехай $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ – деякі системи підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ називається *$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ і довільної непорожньої множини $A \in \mathcal{A}$, з умови $x \in \overline{A}$ випливає, що існує множина $B \in \mathcal{B}$, така, що $B \subseteq A$ і $f(B) \subseteq V$. Відображення f називається *$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

В [5] було показано, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y є неперервним в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли для довільного околу V точки $f(x)$ і довільної відкритої множини U в X з умови $x \in \overline{U}$ випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Звідси слідує, що відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$-неперервне.

З означення B-квазінеперервності випливає, що відображення $f : X \to Y$ є B-

квазінеперервним тоді і тільки, коли f є $(\mathcal{O}, \mathcal{G})$-неперервним.

Очевидною є наступна проста характеризація $\mathcal{A}$-неперервності.

Теорема 10.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – система підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ є $\mathcal{A}$-неперервним тоді і тільки тоді, коли для для кожної точки $x \in X$, довільного околу V точки $f(x)$ в Y та довільної множини $A \in \mathcal{A}$ в X, такої, що $x \in \overline{A}$ існує точка $a \in A$, що $f(a) \in V$.*

Позначимо через $\mathcal{P}$ – систему всіх одноточкових множин в X. Використовуючи теорему 10.1 та встановлені вище результати ми одержуємо, що для відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y:

майже неперервність рівносильна $(\mathcal{G}_s, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 3.2);

B-квазінеперервність рівносильна $(\mathcal{O}_p, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 6.2);

α-неперервність рівносильна $(\mathcal{G}_p, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 7.2);

ледь неперервність рівносильна $(\mathcal{D}, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 8.1);

майже ледь неперервність рівносильна $(\mathcal{D}_n, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 9.1).

Якщо простір X задовольняє умову $(\star)$ з пункту 2, то для відображення $f : X \to Y$ неперервність рівносильна $(\mathcal{N}, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 2.1);

Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ властивість Юнґа рівносильна $(\mathcal{O}, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 4.1);

Автор вдячний Маслюченку Володимиру Кириловичу за корисні зауваження, які дозволили поліпшити оригінальну версію цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kellum K.R.* Functions that separate $X \times \mathbb{R}$ // Real Anal. Exch. Summer Symposium 2009. – P. 21-23.

2. *Karlova O.O. Mykhaylyuk V.V.* On Gibson functions with connected graphs // Math. Slovaca. – 2013. – **63**, N3. – C. 479-492.

3. *Keller P.S.* Chaotic behavior of Newton's method // Real Anal. Exch. – 1993. – **18**, N. 2. – P. 490–507.

4. *Mimna R.A.* Omega-limit sets and non-continuous functions // Real Anal. Exch. – 1998. – **23**, N. 1. – P. 267-273.

5. *Borsik J.* Bilateral quasicontinuity in topological spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2004. – **28**. – P. 159-168.

6. *Husain T.* Almost continuous mappings // Pr. Mat. – 1966. – **10**. – P. 1-7.

7. *Levine N.* Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces // Amer. Math. Monthly. – 1963. – **70**. – P. 36-41.

8. *Gibson R.G., Natkaniec T.* Darboux like functions // Real Anal. Exch. – 1996. – **22**, 2. – P. 492-533.

9. *Stallings J.* Fixed point theorem for connectivity maps // Fund. Math. – 1959. – **47.** – P. 249-263.

10. *Mashhour A.S., Hasanein I.A., El-Deeb S.N.* A note on semi-continuity and precontinuity // Indian J. Pure Appl. Math. – 1982. –**13**, N. 10. – P. 1119–1123.

11. *Kempisty S.* Sur les fonctions quasicontinues // Fundam. Math. – 1932. –**19**. – P. 184-197.

12. *Bruckner A.M., Ceder Jack G.* Darboux continuity // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. – 1965. – **67**. – P. 93-117.

13. *Borsik J.* On the points of bilateral quasicontinuity of functions // Real Anal. Exch. – 1994. – **19**, 2. – P. 529-536.

14. *Njåstad O.* On some classes of nearly open sets // Pacific J. Math. – 1965. – **15**. – P. 961–970.

15. *Noiri T.* A function which preserves connected spaces // Casopis Pest. Mat. – 1982. – **101**. – P. 393-396.

16. *Frolik Z.* Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings // Czech. Math. J. – 1961. – **11**. – P. 381-385.

17. *Маслюченко В.К.* Про нарізні та сукупні модифікації неперервності // Мат. Студії. – 2006. – **25**, N.2. – C. 213-218.

УДК 517.949

©2013 р. **О.В. Осипова, І.М. Черевко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АСИМПТОТИЧНА ДЕКОМПОЗИЦІЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ

Наведена схема розщеплення лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами. Досліджена задача про побудову асимптотичних розкладів розщеплюючого перетворення.

We provide a splitting scheme for linear singularly perturbed systems with two small parameters. We also find asymptotic expansions of the splitting operator.

Вступ

Декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь розглядалась багатьма авторами. Зручним апаратом, який дозволяє ефективно розв'язувати важливу для застосувань задачу пониження розмірності, є метод інтегральних многовидів [1–3]. Для лінійних сингулярно збурених систем метод інтегральних много видів дозволяє здійснити розщеплення вихідної системи на незалежні швидку і повільну підсистеми [4–5].

Аналогічні задачі для лінійних сингулярно збурених систем з декількома малими параметрами досліджувались в роботах [6–8].

У даній роботі для лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами досліджується побудова асимптотичних розкладів інтегральних многовидів, за допомогою яких здійснюється розщеплення вихідної системи.

1. Схема розщеплення

Розглянемо лінійну сингулярно збурену систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2, \\ \varepsilon_1\dot{x}_1 &= A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2 &= A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

де $x_i \in R^{n_i}$, $A_{ij} = A_{ij}(t)$, $i,j = \overline{0,2}$ – $n_i \times n_j$ матриці, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – малі додатні параметри.

Нехай для системи (1) справджуються умови:

I) матриці $A_{ij}(t)$, $i,j = \overline{0,2}$ рівномірно обмежені для $t \in R$ додатною сталою M;

II) власні значення матриці $A_{22}(t)$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A_{22}) \le -2\beta, \quad \beta > 0.$$

Розщеплення системи (1) здійснюється у два етапи [6, 7]. На першому кроці за допомогою заміни змінних

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w, \\ x_1 &= y_1 + \varepsilon_2 H_1 w, \\ x_2 &= w + P_0 x_0 + P_1 x_1 \end{aligned} \tag{2}$$

система (1) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= B_{00}y_0 + B_{01}y_1, \\ \varepsilon_1\dot{y}_1 &= B_{10}y_0 + B_{11}y_1, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} &= B_{22}w, \end{aligned} \tag{3}$$

де $B_{ij} = A_{ij} + A_{i2}P_j$, $i,j = 0,1$, $B_{22} = A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12}$.

При цьому матричні функції P_0, P_1 – обмежені розв'язки системи рівнянь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_0 &= A_{20} + A_{22}P_0 - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{00} - \\ &- \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} P_0 - \varepsilon_2 P_1 A_{10} - \varepsilon_2 P_1 A_{12} P_0, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_1 &= A_{21} + A_{22}P_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{01} - \\ &- \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} P_1 - \varepsilon_2 P_1 A_{11} - \varepsilon_2 P_1 A_{12} P_1, \end{aligned} \tag{4}$$

а матричні функції H_0, H_1 – обмежені розв'язки системи

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_0 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 A_{00}H_0 + \varepsilon_2 A_{01}H_1 + \\ &+ A_{02}R_1 - H_0 R_2, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_1 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 A_{10}H_0 + \varepsilon_2 A_{11}H_1 + \\ &+ A_{12}R_1 - H_1 R_2, \end{aligned} \tag{5}$$

де $R_1 = (E + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \varepsilon_2 P_1 H_1)$, $R_2 = (A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02} - \varepsilon_2 P_1 A_{12})$.

На другому кроці розщеплення припускаємо, що справджується умова

III) власні значення матриці $B_{11}(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i(B_{11}) \le -2\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Тоді за допомогою заміни

$$y_0 = u + \varepsilon_1 H v, \quad y_1 = v + P y_0 \tag{6}$$

система із перших двох рівнянь системи (3) зводиться до незалежних підсистем [4,7]

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (B_{00} + B_{01}P)u, \\ \varepsilon_1 \dot{v} &= (B_{11} - \varepsilon_1 P B_{01})v. \end{aligned} \tag{7}$$

Матричні функції P, H є рівномірно обмеженими розв'язками системи

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \dot{P} &= \varepsilon_1(B_{00} + B_{01}H)P + B_{01} - \\ &\quad - P(B_{11} - \varepsilon H B_{01}), \\ \varepsilon_1 \dot{H} &= B_{10} + B_{11}H - \varepsilon_1 H(B_{00} + \\ &\quad + B_{01}H). \end{aligned} \tag{8}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1 [7]. *Нехай виконуються умови I)–III). Тоді для достатньо малих $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ існує невироджена заміна змінних за допомогою якої система (1) зводиться до трьох незалежних підсистем*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (B_{00} + B_{01}P)u, \\ \varepsilon_1 \dot{v} &= (B_{11} - \varepsilon_1 P B_{01})v, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \dot{w} &= B_{22}w. \end{aligned} \tag{9}$$

Зауваження 1. Умова III) є складною для перевірки, оскільки матриці P_0 та P_1 вдається знайти в явному вигляді тільки у найпростіших випадках. Легко переконатися, що умова III) буде справджуватися при малих ε_1, якщо $A_{12} = \varepsilon_1 \bar{A}_{12}$, і власні значення матриці A_{11} задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A_{11}) \le -2\gamma, \quad \gamma > 0.$$

2. Асимптотичні розклади розщеплюючого перетворення

Знайти точний вигляд коефіцієнтів розщеплюючого перетворення (2), (6) вдається тільки у найпростіших випадках, тому представляє інтерес виписати відповідні розщеплені системи при наближеному знаходженні асимптотичних розкладів цих коефіцієнтів.

IV) Нехай матриці $A_{ij}(t)$, $i,j = \overline{0,2}$, $A_{22}^{-1}(t)$ рівномірно обмежені для $t \in R$ разом із своїми похідними до $(n+1)$ порядку включно.

Розглянемо диференціальний вираз

$$T(u) = A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}u - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{d}{dt}u. \tag{10}$$

Покажемо, що існує функція $u(t, x_0(t), x_1(t), \varepsilon_2)$, яку можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} u &= \overline{P}_0(t,\varepsilon_2)x_0 + \overline{P}_1(t,\varepsilon_2)x_1 = \\ &= (P_0^0(t) + \varepsilon_2 P_0^1(t) + ... + \varepsilon_2^n P_0^n(t))x_0 + \\ &\quad + (P_1^0(t) + \varepsilon_2 P_1^1(t) + ... + \varepsilon_2^n P_1^n(t))x_1, \end{aligned} \tag{11}$$

де $P_0^i(t)$, $P_1^i(t)$, $i = \overline{0,n}$ – рівномірно обмежені разом із своїми $(n-i+1)$ похідними, така, що на обмежених розв'язках системи (1)

$$T(u) = o(\varepsilon_2^{n+1}).$$

Підставимо співвідношення (11) у рівність (10) і підберемо функції $P_0^i(t)$, $P_1^i(t)$, $i = \overline{0,n}$ так, щоб у рівності (10) перетворилися в нуль всі члени, що містять ε_2 в степені, меншій, ніж $n+1$. Обгрунтування можливості такого вибору неважко провести за індукцією. При цьому для коефіцієнтів у представленні (11) одержуємо алгебраїчні співвідношення

$$\begin{aligned} &P_0^0(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{20}(t), \\ &P_1^0(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t), \\ &P_0^k(t) = A_{22}^{-1}(t)\Big(\varepsilon_1 \dot{P}_1^{k-1}(t) + \varepsilon_1 P_0^{k-1}(t)A_{00}(t) + \\ &+\varepsilon_1 \sum_{i=0}^{k-1} P_0^i(t)A_{02}(t)P_0^{k-i-1}(t) + P_1^{k-1}(t)A_{10}(t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} P_1^i(t)A_{12}(t)P_0^{k-i-1}(t)\Big), \\ &P_1^k(t) = A_{22}^{-1}(t)\Big(\varepsilon_1 \dot{P}_1^{k-1}(t) + \varepsilon_1 P_0^{k-1}(t)A_{01}(t) + \\ &+\varepsilon_1 \sum_{i=0}^{k-1} P_0^i(t)A_{02}(t)P_0^{k-i-1}(t) + P_1^{k-1}(t)A_{11}(t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} P_1^i(t)A_{12}(t)P_1^{k-i-1}(t)\Big), \quad k = 1,2,...,n. \end{aligned} \tag{12}$$

Обмеженість P_0^i, P_1^i та їх частинних похідних до $(n-i+1)$ порядку випливає із умови IV). Якщо функції P_0^i, P_1^i вибрані за формулами (12), то диференціальне співвідношення (10) набуде вигляду

$$T(u)=\varepsilon_2^{n+1}(\eta_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x_0+\eta_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x_1),$$

де η_0,η_1 – рівномірно обмежені функції.

Якщо у вихідній системі (1) зробити заміну

$$x_2=\overline{P}_0x_0+\overline{P}_1x_1+\varepsilon_2^{n+2}z,$$

то для змінних x_0,x_1,z одержимо систему

$$\begin{aligned}&\dot{x}_0=(A_{00}(t)+A_{02}(t)\overline{P}_0)x_0+(A_{01}(t)+\\&+A_{02}(t)\overline{P}_1\big)\,x_1+\varepsilon_2^{n+1}A_{02}(t)z,\\&\varepsilon_1\dot{x}_1=(A_{10}(t)+A_{12}(t)\overline{P}_0)x_0+(A_{11}(t)+\\&+A_{12}(t)\overline{P}_1\big)\,x_1+\varepsilon_2^{n+1}A_{12}(t)z,\\&\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{z}=\eta_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x_0+\eta_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x_1+\\&+A_{22}(t)z.\end{aligned}\tag{13}$$

Система (13) – це система типу (1), для якої існує інтегральний многовид [7]

$$z=P_0^*(t,\varepsilon)x_0+P_1^*(t,\varepsilon)x_1,\tag{14}$$

де P_0^*, P_1^* – рівномірно обмежені функції.

Якщо система (13) має інтегральний многовид (14), то система (1) має інтегральний многовид

$$x_2=(\overline{P}_0+\varepsilon_2^{n+1}P_0^*)x_0+(\overline{P}_1+\varepsilon_2^{n+1}P_1^*)x_1=$$

$$=P_0x_0+P_1x_1,$$

для якого справедливий асимптотичний розклад

$$x_2=(P_0^0+\varepsilon_2P_0^1+...+\varepsilon_2^nP_0^n+\varepsilon_2^{n+1}P_0^*)x_0+$$

$$+(P_1^0+\varepsilon_2P_1^1+...+\varepsilon_2^nP_1^n+\varepsilon_2^{n+1}P_1^*)x_1.\tag{15}$$

Здійснимо в системі (1) заміну змінних

$$x_2=P_0x_0+P_1x_1+w,$$

одержимо систему

$$\begin{aligned}&\dot{x}_0=(A_{00}+A_{02}P_0)x_0+\\&+(A_{01}+A_{02}P_1)x_1+A_{02}w,\\&\varepsilon_1\dot{x}_1=(A_{10}+A_{12}P_0)x_0+\\&+(A_{11}+A_{12}P_1)x_2+A_{12}w,\\&\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w}=(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\\&-\varepsilon_2P_1A_{12})\,w.\end{aligned}\tag{16}$$

Розглянемо тепер диференціальні вирази

$$\begin{aligned}&T_0(u_0,u_1)=\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{00}+A_{02}P_0)u_0+\\&+\varepsilon_2(A_{01}+A_{02}P_1)u_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\tfrac{d}{dt}u_0+A_{02}w,\\&T_1(u_0,u_1)=\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{10}+A_{12}P_0)u_0+\\&+\varepsilon_2(A_{11}+A_{12}P_1)u_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\tfrac{d}{dt}u_1+A_{12}w.\end{aligned}\tag{17}$$

Покажемо, що існують функції $u_0(t,\varepsilon_2,w)$, $u_1(t,\varepsilon_2,w)$, які можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}u_0&=\overline{H}_0w=\sum_{i=0}^n\varepsilon_2^iH_0^iw,\\u_1&=\overline{H}_1w=\sum_{i=0}^n\varepsilon_2^iH_1^iw,\end{aligned}\tag{18}$$

де H_0^i, H_1^i, $i=\overline{0,n}$ – рівномірно обмежені разом із своїми $(n-i+1)$ похідними, такі що

$$T_0(u_0,u_1)=o(\varepsilon_2^{n+1}),\quad T_1(u_0,u_1)=o(\varepsilon_2^{n+1}).$$

Підставимо співвідношення (18) у рівності (17) і підберемо функції H_0^i, H_1^i, $i=\overline{0,n}$ так, щоб в рівностях (17) перетворились в нуль всі члени, що містять ε_2 в степені меншій, ніж $n{+}1$. Для коефіцієнтів H_0^i, H_1^i одержуємо алгебраїчні співвідношення

$$\begin{aligned}&H_0^0=A_{01}A_{22}^{-1},\\&H_1^0=A_{12}A_{22}^{-1},\\&H_0^k=(\varepsilon_1A_{00}H_0^{k-1}+A_{01}H_1^{k-1}+\\&+\varepsilon_1A_{02}\sum_{i=0}^{k-1}P_0^iH_0^{k-1-i}+A_{02}\sum_{i=0}^{k-1}P_1^iH_1^{k-1-i}+\\&+\varepsilon_1\sum_{i=0}^{k-1}H_0^iP_0^{k-1-i}A_{02}+\sum_{i=0}^{k-1}H_0^iP_1^{k-1-i}A_{12}-\\&-\varepsilon_1\dot{H}_0^{k-1})A_{22}^{-1},\\&H_1^k=(\varepsilon_1A_{10}H_0^{k-1}+A_{11}H_1^{k-1}+\\&+\varepsilon_1A_{12}\sum_{i=0}^{k-1}P_0^iH_0^{k-1-i}+A_{12}\sum_{i=0}^{k-1}P_1^iH_1^{k-1-i}+\\&+\varepsilon_1\sum_{i=0}^{k-1}H_1^iP_0^{k-1-i}A_{02}+\sum_{i=0}^{k-1}H_1^iP_1^{k-1-i}A_{12}-\\&-\varepsilon_1\dot{H}_1^{k-1})A_{22}^{-1},\quad k=1,2,...,n.\end{aligned}\tag{19}$$

Обмеженість H_0^i, H_1^i та їх частинних похідних випливає із умови IV). У цьому випадку диференціальні вирази (17) набувають вигляду

$$T_0(u_0,u_1)=\varepsilon_2^{n+1}\mu_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)w,$$

$$T_1(u_0,u_1)=\varepsilon_2^{n+1}\mu_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)w,$$

де μ_0, μ_1 – рівномірно обмежені функції.

Якщо тепер у системі (16) зробити заміну

$$x_0=\varepsilon_2^{n+1}y_0+\varepsilon_1\varepsilon_2\overline{H}_0w,$$

$$x_1=\varepsilon_2^{n+1}y_1+\varepsilon_2\overline{H}_1w,$$

то для змінних y_0,y_1,w одержимо систему

$$\begin{aligned}&\dot{y}_0=(A_{00}+A_{02}P_0)y_0+\\&+(A_{01}+A_{02}P_1)y_1+\mu_0w,\\&\varepsilon_1\dot{y}_1=(A_{10}+A_{12}P_0)y_0+\\&+(A_{11}+A_{12}P_1)y_1+\mu_1w,\\&\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w}=(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\\&-\varepsilon_2P_1A_{12})w,\end{aligned}\tag{20}$$

типу (1), для якої існують інтегральні многовиди [7]

$$y_0=\varepsilon_1\varepsilon_2H_0^*w,\quad y_1=\varepsilon_2H_1^*w.\tag{21}$$

Якщо система (20) має інтегральні многовиди (21), тоді система (16) має інтегральні многовиди

$$x_0=\varepsilon_1\varepsilon_2(\overline{H}_0+\varepsilon_2^{n+1}H_0^*)w=\varepsilon_1\varepsilon_2H_0w,$$

$$x_1=\varepsilon_2(\overline{H}_1+\varepsilon_2^{n+1}H_1^*)w=\varepsilon_2H_1w,$$

для яких справедливі асимптотичні розклади

$$x_0=\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_2^iH_0^i+\varepsilon_2^{n+1}H_0^*\right)w,$$

$$x_1=\varepsilon_2\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_2^iH_1^i+\varepsilon_2^{n+1}H_1^*\right)w.$$

Здійснивши в системі (6) заміну змінних

$$x_0=y_0+\varepsilon_1\varepsilon_2H_0w,\quad x_1=y_1+\varepsilon_2H_1w,$$

одержимо систему (3) і завершуємо перший етап розщеплення системи (1).

Теорема 2. *Нехай справджуються умови I), II), IV). Тоді для достатньо малих значень ε_2 існує заміна змінних (2), за допомогою якої система (1) зводиться до вигляду (3), і коефіцієнти асимптотичних розкладів перетворення (2) можна однозначно знайти із алгебраїчних співвідношень (12), (19).*

Представлення функцій P,H із рівностей (6) у вигляді асимптотичних розкладів

$$\begin{aligned}P(t,\varepsilon_1)=P_0(t)+\varepsilon_1P_1(t)+...,\\H(t,\varepsilon_1)=H_0(t)+\varepsilon_1H_1(t)+...,\end{aligned}\tag{22}$$

встановлено у працях [2, 4, 9].

При цьому коефіцієнти розкладів (22) однозначно знаходяться із алгебраїчних співвідношень

$$\begin{aligned}&P_0(t)=-B_{11}^{-1}B_{10},\quad H_0(t)=B_{01}B_{11}^{-1},\\&P_k(t)=B_{11}^{-1}(\dot{P}_{k-1}+P_{k-1}B_{00}+\\&+\sum_{i=0}^{k-1}P_iB_{01}P_{k-1-i}),\\&H_k(t)=(B_{00}H_{k-1}+\sum_{i=0}^{k-1}B_{01}P_iH_{k-1-i}+\\&+\sum_{i=0}^{k-1}M_iP_{k-1-i}+B_{01}-\dot{M}_{k-1})B_{11}^{-1}.\end{aligned}\tag{23}$$

Обмежуючись у співвідношеннях (2) та (6) тільки нульовими коефіцієнтами асимптотичних наближень одержуємо таке нульове наближення розщепленої системи

$$\begin{aligned}&\dot{u}=(A_{00}-A_{02}A_{22}^{-1}A_{20}+A_{01}-\\&-A_{02}A_{22}^{-1}A_{21})u,\\&\varepsilon_1\dot{v}_1=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})-\varepsilon_1\times\\&\times(A_{01}-A_{02}A_{22}^{-1}A_{21})(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}\times\\&\times(A_{01}-A_{02}A_{22}^{-1}A_{21}))v,\\&\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w}=(A_{22}+\varepsilon_1\varepsilon_2A_{22}^{-1}A_{20}A_{02}+\\&+\varepsilon_2A_{22}^{-1}A_{21}A_{12})w.\end{aligned}\tag{24}$$

3. Розщеплення початкових умов

Виходячи із співвідношень (2), (6), дістаємо рівняння, що зв'язують початкові умови для вихідної системи з початковими умовами для розщепленої системи

$$x_{00}=u_0+\varepsilon_1Hv_0+\varepsilon_1\varepsilon_2H_0w_0,$$

$$x_{10}=Pu_0+(E+\varepsilon_1PH)v_0+\varepsilon_2H_1w_0,\tag{25}$$

$$x_{20}=(P_0+P_1P)u_0+(P_1+\varepsilon_1(P_0+P_1P)H)v_0+$$
$$+(E+\varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0+\varepsilon_2P_1H_1)w_0.$$

Розв'язуючи систему (25), дістаємо

$$u_0=(E+\varepsilon_1HP-\varepsilon_1\varepsilon_2(-(E+\varepsilon_1HP)H_0+$$

$$+HH_1)P_0)x_{00}+(-\varepsilon_1H-$$

$$-\varepsilon_1\varepsilon_2(-(E+\varepsilon_1HP)H_0+HH_1)P_1)x_{10}+$$

$$+\varepsilon_1\varepsilon_2(-(E+\varepsilon_1 HP)H_0+HH_1)x_{20},$$
$$v_0=(-P-(\varepsilon_1\varepsilon_2 PH_0-\varepsilon_2 H_1)P_0)x_{00}+$$
$$+(E+\varepsilon_1\varepsilon_2 PH_0-\varepsilon_2 H_1)x_{10}+(\varepsilon_1\varepsilon_2 PH_0-\varepsilon_2 H_1)x_{20},$$
$$w_0=-P_0x_{00}-P_1x_{10}+x_{20}.$$

Якщо враховувати тільки нульові члени асимптотичних розкладів (12), (19), (23), то одержимо такі початкові умови для системи (24)

$$u_0=(E+\varepsilon_1 B_{01}B_{11}^{-2}B_{10}+R_1A_{22}^{-1}A_{20})x_{00}+$$
$$+(-\varepsilon_1 B_{01}B_{11}^{-1}+R_1A_{22}^{-1}A_{21})x_{10}+R_1x_{20},$$
$$v_0=(B_{11}^{-1}B_{10}-R_1A_{22}^{-1}A_{20})x_{00}+(E+R_2)x_{10}+$$
$$+R_2x_{20},$$
$$w_0=A_{22}^{-1}A_{20})x_{00}+A_{22}^{-1}A_{21}x_{10}+x_{20},$$

де

$$R_1=\varepsilon_1\varepsilon_2((\varepsilon_1 B_{01}B_{11}^{-2}B_{10}-E)A_{02}A_{22}^{-1}+$$
$$+B_{01}B_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}),$$
$$R_2=-\varepsilon_1\varepsilon_2 B_{11}^{-1}B_{10}A_{02}A_{22}^{-1}-\varepsilon_2 A_{12}A_{22}^{-1}).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
2. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движения методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
3. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Конструктивный метод расщепления сингулярно возмущенных систем // Дифференциальные уравнения. – 1995.– **31**, № 44. – С. 569-578.
4. *Sobolev V.A.* Decomposition of linear singularly perturbed systems // Acta Math. Hung. – 1987.– **49**, № 3-4. – P. 365-376.
5. *Черевко І.М.* Розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. – С. 32-36.
6. *Семенова М.М.* Декомпозиция систем с несколькими временными масштабами // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – **8**. – С. 6-11.
7. *Сельський С.С., Черевко І.М.* Розщеплення систем лінійних диференціальних сингулярно збурених рівнянь // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Серія: математика : Зб. наук. праць. – **1**, № 3. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – С. 104-107.
8. *Осипова О.В., Черевко І.М.* Розщеплення різнотемпових сингулярно збурених лінійних систем // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Серія: математика : Зб. наук. праць. – **2**, № 1. – Чернівці: ЧНУ, 2012. – С. 78-83.
9. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.

УДК 517.977

©2013 р. А.С. Перцов

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГАРАНТОВАНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ ПРИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРАХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Досліджена проблема гарантованого оцінювання значень лінійних неперервних функціоналів від розв'язків крайвої задачі Неймана для бігармонічного рівняння при інтегральних операторах спостережень та квадратичних обмеженнях на детерміновані дані.

The problem of guaranteed estimation of values of continuous linear functionals of solutions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation with integral operators observations and quadratic constraints on deterministic data is investigated.

Вступ. Мінімаксний метод оцінювання, який був започаткований в монографії [1], виявився досить корисним для систем з зосередженими та розподіленими параметрами в умовах невизначеності. В подальшому задачам мінімаксного оцінювання станів систем, які описуються звичайними диференційними рівняннями і рівняннями в частинних похідних було присвячено значну кількість робіт, зокрема [2], [3]. Окремо можна відзначити випадок, коли розв'язки крайових задач не визначені однозначно і існують лише тоді, коли дані цих задач задовольняють деяким умовам сумісності. В цьому напрямку досліджень відомі роботи [4], [5]. До описаного кола проблем відносяться і роботи [6], [7].

В роботі [6] за спостереженнями елемента вигляду

$$y = C\varphi + \eta, \tag{1}$$

у яких $\varphi(x)$ – розв'язок варіаційної задачі

$$\varphi(x) \in H^2(D), \tag{2}$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \right. + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right] dx = = \int_D v(x) f(x)\, dx + \int_\Gamma v h_1 \, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2 \, d\Gamma \quad \forall v \in H^2(D), \tag{3}$$

$C \in \mathcal{L}(L^2(D), H_0)$ – лінійний неперервний оператор, $0 \le \sigma < 1$, за умови, що $F := (f, h_1 h_2) \in G_0$ і $\eta \in G_1$, була досліджена проблема знаходження мінімаксної оцінки значення функціоналу

$$l(\varphi) = \int_D l_0(x) \varphi(x)\, dx, \tag{4}$$

тобто такої оцінки вигляду

$$\widehat{\widehat{l(\varphi)}} = (y, \hat{u})_{H_0} + \hat{c},$$

для якої елемент $\hat{u}$ і число $\hat{c}$ визначаються із умови

$$\inf_{u \in H_0,\, c \in \mathbb{R}} \sigma(u, c) = \sigma(\hat{u}, \hat{c}),$$

де

$$\sigma(u, c) := \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \mathbb{E} |l(\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\varphi})}|^2,$$

$\tilde{\varphi}$ – будь-який розв'язок крайової задачі (2)–(3) при [1] $f(x) = \tilde{f}(x)$, $h_1 = \tilde{h}_1$, $h_2 = \tilde{h}_2$,

$$\widehat{l(\tilde{\varphi})} = (\tilde{y}, u)_{H_0} + c, \quad \tilde{y} = C\tilde{\varphi} + \tilde{\eta}.$$

Тут H_0 - сепарабельний гільбертовий простір[2] над $\mathbb{R}$ із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_{H_0}$ та

[1] При цьому величина $\varrho := \sigma(\hat{u}, \hat{c})^{1/2}$ визначає похибку мінімаксного оцінювання виразу (4).

[2] Якщо H_0 – скінченновимірний простір, то тоді припускається, що $\dim H_0 > 3$.

нормою $\|\cdot\|_{H_0}$; D - обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з ліпшицевою границею Γ; $H^2(D)$ – простір Соболєва другого порядку в області D:

$$H^2(D)=\{v\in L^2(D):\,\mathcal{D}^\alpha v\in L^2(D)\quad \forall\alpha,\quad |\alpha|\le 2\}$$

з відповідною нормою, де $\mathcal{D}^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$, а через $\mathcal{D}^\alpha v$ позначені узагальнені частинні похідні порядку α функції v; через G_0 позначено множину функцій $\tilde F:=(\tilde f,\tilde h_1,\tilde h_2)\in L^2(D)\times L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$, що задовольнять умови

$$\int_D Q(\tilde f-f_0)(x)(\tilde f(x)-f_0(x))\,dx+ +\int_\Gamma Q_1(\tilde h_1-h_1^{(0)})(\tilde h_1-h_1^{(0)})\,d\Gamma+ +\int_\Gamma Q_2(\tilde h_2-h_2^{(0)})(\tilde h_2-h_2^{(0)})\,d\Gamma\le 1,$$

і

$$\int_D \tilde f(x)\,dx+\int_\Gamma \tilde h_1\,d\Gamma=0, \tag{5}$$

$$\int_D x_1\tilde f(x)\,dx+\int_\Gamma x_1\tilde h_1\,d\Gamma+\int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial\nu}\tilde h_2\,d\Gamma=0, \tag{6}$$

$$\int_D x_2\tilde f(x)\,dx+\int_\Gamma x_2\tilde h_1\,d\Gamma+\int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial\nu}\tilde h_2\,d\Gamma=0, \tag{7}$$

через G_1 позначено множину випадкових елементів $\tilde\eta=\tilde\eta(\omega)$, визначених на деякому ймовірносному просторі $(\Omega,\mathcal{B},P)$ із значеннями в H_0 таких, що $\mathbb{E}\|\tilde\eta(\omega)\|^2_{H_0}<\infty$ і нульовими середніми, що задовольняють нерівності

$$\mathbb{E}(Q_0\tilde\eta,\tilde\eta)_{H_0}\le 1, \tag{8}$$

де $\mathbb{E}$ – символ математичного сподівання, Q, Q_1,Q_2 і Q_0 – обмежені самоспряжені додатно-визначені оператори в $L^2(D)$, $L^2(\Gamma)$ і H_0 відповідно, для яких існують обмежені обернені оператори Q^{-1}, Q_1^{-1},Q_2^{-1} і Q_0^{-1}; $F_0:=(f_0,h_1^{(0)},h_2^{(0)})\in L^2(D)\times L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$ – задана функція, що задовольняє умови (5)–(7); $u\in H_0$, $c\in\mathbb{R}$, $l_0\in L^2(D)$ – задана функція. Крім того припускається, що звуження лінійного оператора C на підпростір поліномів першого степеня вигляду $p(x_1,x_2)=a+bx_1+cx_2$ є ін'єктивним. В [6] доведена така теорема.

Теорема 1. *Існує єдина мінімаксна оцінка виразу $l(\varphi)$, яка може бути представлена у вигляді*

$$\widehat{\widehat{l(\varphi)}}=(y,\hat u)_{H_0}+\hat c=l(\hat\varphi), \tag{9}$$

де

$$\hat u=Q_0Cp,\quad \hat c=\int_D\hat z(x)f^{(0)}(x)\,dx+ +\int_\Gamma \hat z h_1^{(0)}\,d\Gamma+\int_\Gamma\frac{\partial\hat z}{\partial\nu}h_2^{(0)}\,d\Gamma, \tag{10}$$

а функції $p(x)$, $\hat z(x)$ і $\hat\varphi(x)$ визначаються із однозначно розв'язних систем варіаційних рівнянь (11)–(20) *і* (21)–(30)*:*

$$\hat z\in H^2(D), \tag{11}$$

$$\int_D\Big[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2\hat z}{\partial x_1^2}+ +2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\hat z}{\partial x_1\partial x_2}+ +\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2\hat z}{\partial x_2^2}\Big]\,dx=$$

$$=\int_D\Big(l_0(x)-C^*\Lambda_{H_0}Q_0Cp(x)\Big)v_1(x)\,dx\quad \forall v_1\in H^2(D), \tag{12}$$

$$\int_D Q^{-1}\hat z(x)\,dx+\int_\Gamma Q_1^{-1}\hat z\,d\Gamma=0, \tag{13}$$

$$\int_D x_1Q^{-1}\hat z(x)\,dx+\int_\Gamma x_1Q_1^{-1}\hat z\,d\Gamma+ +\int_\Gamma\frac{\partial x_1}{\partial\nu}Q_2^{-1}\frac{\partial\hat z}{\partial\nu}\,d\Gamma=0, \tag{14}$$

$$\int_D x_2Q^{-1}\hat z(x)\,dx+\int_\Gamma x_2Q_1^{-1}\hat z\,d\Gamma+ +\int_\Gamma\frac{\partial x_2}{\partial\nu}Q_2^{-1}\frac{\partial\hat z}{\partial\nu}\,d\Gamma=0, \tag{15}$$

$$p\in H^2(D), \tag{16}$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \right.$$
$$+ 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right] dx =$$

$$= \int_D v_2(x) Q^{-1}\hat{z}(x)\,dx + \int_\Gamma v_2 Q_1^{-1}\hat{z}\,d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial \nu} Q_2^{-1}\frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\,d\Gamma \quad \forall v_2 \in H^2(D). \quad (17)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^*\Lambda_{H_0} Q_0 C p(x))\,dx = 0, \quad (18)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^*\Lambda_{H_0} Q_0 C p(x)) x_1\,dx = 0, \quad (19)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^*\Lambda_{H_0} Q_0 C p(x)) x_2\,dx = 0. \quad (20)$$

i

$$\hat{p} \in H^2(D), \quad (21)$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_1^2} + \right.$$
$$+ 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_1 \partial x_2} +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_2^2}\right] dx =$$

$$= \int_D \Big(C^*\Lambda_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\varphi})(x)\Big) v_1(x)\,dx$$
$$\forall v_1 \in H^2(D), \quad (22)$$

$$\int_D Q^{-1}\hat{p}(x)\,dx + \int_\Gamma Q_1^{-1}\hat{p}\,d\Gamma = 0, \quad (23)$$

$$\int_D x_1 Q^{-1}\hat{p}(x)\,dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1}\hat{p}\,d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\,d\Gamma = 0, \quad (24)$$

$$\int_D x_2 Q^{-1}\hat{p}(x)\,dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1}\hat{p}\,d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\,d\Gamma = 0, \quad (25)$$

$$\hat{\varphi} \in H^2(D), \quad (26)$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_1^2} + \right.$$
$$+ 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_1 \partial x_2} +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_2^2}\right] dx =$$

$$= \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}(x) + f_0(x))\,dx +$$
$$+ \int_\Gamma v_2 (Q_1^{-1}\hat{p} + h_1^{(0)})\,d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial \nu}\left(Q_2^{-1}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu} + h_2^{(0)}\right) d\Gamma$$
$$\forall v_2 \in H^2(D), \quad (27)$$

$$\int_D C^*\Lambda_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\varphi})(x)\,dx = 0, \quad (28)$$

$$\int_D x_1 C^*\Lambda_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\varphi})(x)\,dx = 0, \quad (29)$$

$$\int_D x_2 C^*\Lambda_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\varphi})(x)\,dx = 0, \quad (30)$$

відповідно, в якій рівності (21) – (30) *виконуються з ймовірністю 1. Тут* $\Lambda_{H_0} \in \mathcal{L}(H_0, H_0')$ *– оператор, який діє з* H_0 *на його спряжений простір* H_0' *та визначається рівністю*[3] $(v,u)_{H_0} = < v, \Lambda_{H_0} u >_{H_0 \times H_0'}$ $\forall u, v \in H_0$, *де* $< x, f >_{H_0 \times H_0'}, := f(x)$ *для* $x \in H_0$, $f \in H_0'$, $C^* : H_0' \to L^2(D)$ *– оператор, транспонований до* C, *що визначається співвідношенням* $< Cv, w >_{H_0 \times H_0'} = \int_D v(x) C^* w(x)\,dx$ *для всіх* $v \in L^2(D)$, $w \in H_0'$.

Похибка оцінювання ϱ *визначається формулою* $\varrho = l(p)^{1/2}$.

Основний результат. Застосуємо наведену вище теорему для дослідження представлення мінімаксних оцінок функціоналу (4) від невідомого розв'язку варіаційної задачі (2), (3) у випадку, коли в спостереженнях (1) оператор C є інтегральним.

З цією метою покладемо $H_0 = L^2(D_1) \times \ldots L^2(D_i) \times \ldots L^2(D_N)$, де D_i, $i = 1, \ldots, N$,

[3] Цей оператор існує в силу теореми Рісса.

- деякі підобласті області D з ліпшицевими границями. Тоді $\Lambda_{H_0} = I_{H_0}$, де I_{H_0} – одиничний оператор в H_0.

Нехай в спостереженнях (1) оператор $C : L^2(D) \to L^2(D_1) \times \ldots L^2(D_i) \times \ldots L^2(D_N)$ задається рівністю

$$C\varphi(x) = (C_1\varphi(x), \ldots, C_i\varphi(x) \ldots, C_N\varphi(x)),$$

$C_i : L^2(D) \to L^2(D_i)$ – інтегральний оператор, заданий виразом

$$C_i\varphi(x) := \int_{D_i} K_i(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad i = 1\ldots, N,$$

де $K_i \in L^2(D_i) \times L^2(D_i)$, так що спостереження y в (1) мають вигляд

$$y = \Big(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_N\Big),$$
$$\eta = \Big(\eta_1, \ldots, \eta_i, \ldots, \eta_N\Big), \tag{31}$$

де

$$y_i(x) = \int_{D_i} K_i(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \eta_i(x),$$
$$x \in D_i, \quad i = \overline{1,N}, \tag{32}$$

а оператор Q_0 в умові (8), що входить в означення множини G_1, діє за формулою

$$Q_0\tilde{\eta} = (Q_1^{(0)}\tilde{\eta}_1, \ldots, Q_i^{(0)}\tilde{\eta}_i, \ldots, Q_N^{(0)}\tilde{\eta}_N),$$

в якій $Q_i^{(0)}(x)$ – неперервні додатні функції в області $\bar{D}_i$, $\tilde{\eta}_i \in L^2(\Omega, L^2(D_i))$, $i = 1, \ldots, N$.

В цьому випадку умова (8) набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^N \int_{D_i} Q_i^{(0)}(x)\tilde{R}_i(x,x)\,dx \leq 1,$$

де через $\tilde{R}_i(x,y) = \mathbb{E}\tilde{\eta}_i(x)\tilde{\eta}_i(y)$ позначена кореляційна функція процесу $\tilde{\eta}_i(x)$, $i = \overline{1,N}$, $(x,y) \in D_i \times D_i$.

Дійсно,

$$\mathbb{E}(Q_0\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{H_0} =$$
$$= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(Q_i^{(0)}(x)\eta_i(x), \eta_i(x))_{L^2(D_i)} =$$
$$= \sum_{i=1}^N \int_{D_i} Q_i^{(0)}(x)\mathbb{E}(\eta_i(x)\eta_i(x))\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^N \int_{D_i} Q_i^{(0)}(x)\tilde{R}_i^{(0)}(x,x)\,dx.$$

і, отже, множина G_1 буде описуватись наступною формулою:

$$G_1 = \Big\{\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_i, \ldots, \tilde{\eta}_N) : \mathbb{E}\|\tilde{\eta}_i\|^2_{L^2(D_i)} < \infty, \mathbb{E}\tilde{\eta}_i = 0,\ i = \overline{1,N}, \sum_{i=1}^N \int_{D_i} Q_i^{(0)}(x)\tilde{R}_i(x,x)\,dx \leq 1.\Big\} \tag{33}$$

Легко бачити, що оператор $C^* : L^2(D_1) \times \ldots L^2(D_i) \times \ldots L^2(D_N) \to L^2(D)$, спряжений до C, буде задаватися формулою $C^*\psi(x) = \sum_{l=1}^N \chi_{D_l}(x)\int_{D_l} K_l(\xi,x)\psi_l(\xi)\,d\xi$, де $\psi(\xi) = (\psi_1(\xi), \ldots, \psi_l(\xi), \ldots, \psi_N(\xi))$, $\psi_l \in L^2(D_l)$, $\chi_{D_l}(x)$ – характеристична функція множини D_l, $l = 1, \ldots, N$.

Враховуючи, що

$$\hat{u} = Q_0Cp = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_N),$$
$$\hat{u}_l \in L^2(D_i),\ i = \overline{1,N},$$

де

$$\hat{u}_i(\xi) = Q_i^{(0)}(\xi)\int_{D_i} K_i(\xi,\xi_1)p(\xi_1)\,d\xi_1,$$
$$i = \overline{1,N}, \tag{34}$$

маємо

$$C^*J_{H_0}Q_0Cp(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^N \chi_{D_i}(x)\int_{D_i} \tilde{K}_i(\cdot,\xi_1)p(\xi)\,d\xi_1, \tag{35}$$

де

$$\tilde{K}_i(x,\xi_1) = \int_{D_i} K_i(\xi,x)Q_i^{(0)}(\xi)K_i(\xi,\xi_1)d\xi.$$

Клас лінійних за спостереженнями (32) оцінок $\widehat{l(\varphi)}$ буде мати вигляд

$$\widehat{l(\varphi)} = \sum_{i=1}^N \int_{D_i} u_i(x)y_i(x)\,dx + c. \tag{36}$$

Таким чином, з проведеного вище аналізу та з теореми 1 для інтегральних операторів спостереження (32) у припущеннях, що

$$\eta \in G_1,$$

де η і G_1 визначаються формулами (31), (33), та

$$F := (f, h_1 h_2) \in G_0,$$

множина G_0 визначена вище, одержуємо наступний результат.

Теорема 2. *Мінімаксна оцінка $\widehat{\widehat{l(\varphi)}}$ значення $l(\varphi)$ визнається формулою*

$$\widehat{\widehat{l(\varphi)}} = \sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} \hat{u}_i(x) y_i(x)\, dx + \hat{c} = l(\hat{\varphi}),$$

де

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}(x) f^{(0)}(x)\, dx + \int_\Gamma \hat{z} h_1^{(0)}\, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu} h_2^{(0)}\, d\Gamma,$$

$$\hat{u}_i(x) = Q_i^{(0)}(x) \int_{D_i} K_i(x, \eta) p(\eta)\, d\eta, \\ i = \overline{1, N},$$

а функції $\hat{z}, p, \hat{\varphi} \in H^2(D)$ знаходяться з розв'язку систем варіаційних рівнянь:

$$\int_D \Big[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x_2^2} \Big] dx =$$

$$= \int_D \Big(l_0(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x, \xi_1) p(\xi_1)\, d\xi_1 \Big) v_1(x)\, dx \\ \forall v_1 \in H^2(D),$$

$$\int_D Q^{-1} \hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma Q_1^{-1} \hat{z}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D x_1 Q^{-1} \hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1} \hat{z}\, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D x_2 Q^{-1} \hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1} \hat{z}\, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right] dx =$$

$$= \int_D v_2(x) Q^{-1} \hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma v_2 Q_1^{-1} \hat{z}\, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\, d\Gamma \quad \forall v_2 \in H^2(D).$$

$$\int_D \Big(l_0(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x, \xi_1) p(\xi_1)\, d\xi_1 \Big) dx = 0,$$

$$\int_D \Big(l_0(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x, \xi_1) p(\xi_1)\, d\xi_1 \Big) x_1\, dx = 0,$$

$$\int_D \Big(l_0(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x, \xi_1) p(\xi_1)\, d\xi_1 \Big) x_2\, dx = 0.$$

і

$$\int_D \Big[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_2^2} \Big] dx =$$

$$= \int_D \Big(\theta(x) -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi_1\Big) v_1(x)\, dx$$

$$\forall v_1 \in H^2(D),$$

$$\int_D Q^{-1}\hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma Q_1^{-1}\hat{z}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D x_1 Q^{-1}\hat{p}(x)\, dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1}\hat{p}\, d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial\nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial\nu}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D x_2 Q^{-1}\hat{p}(x)\, dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1}\hat{p}\, d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial\nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial\nu}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D \Big[\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial x_1^2} +$$
$$+ 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial x_1 \partial x_2} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial x_2^2}\Big]\, dx =$$

$$= \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}(x) + f_0(x))\, dx +$$
$$+ \int_\Gamma v_2(Q_1^{-1}\hat{p} + h_1^{(0)})\, d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial\nu}\left(Q_2^{-1}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\nu} + h_2^{(0)}\right) d\Gamma, \quad \forall v_2 \in H^2(D),$$

$$\int_D \Big(\theta(x) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1)\hat{\varphi}(\xi_1)\, d\xi_1\Big)\, dx = 0,$$

$$\int_D \Big(\theta(x) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1)\hat{\varphi}(\xi_1)\, d\xi_1\Big) x_1\, dx = 0,$$

$$\int_D \Big(\theta(x) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1)\hat{\varphi}(\xi_1)\, d\xi_1\Big) x_2\, dx = 0.$$

відповідно. Тут $\hat{p} \in H^2(D)$ *і*

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} K_i(\xi, x) Q_i^{(0)}(\xi) y_i(\xi)\, d\xi.$$

Похибка мінімаксного оцінювання ϱ *визначається формулою*

$$\varrho = l(p)^{1/2}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением – М.: Наука, 1968. – 476 с.
2. *Наконечный А.Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. – Киев: КГУ, 1985. – 82 с.
3. *Наконечный А.Г.* Минимаксные оценки в системах с распределенными параметрами. – Киев: Препринт Ин-та кибернетики АН УССР, №79, 1979. – 55 с.
4. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей. // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – №2 с. 104 – 128.
5. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Оцінювання параметрів вироджених еліптичних крайових задач Неймана в умовах невизначеності. //Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – №1. с. 262 – 269.
6. *Подлипенко Ю.К., Перцов А.С.* Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармоничного рівняння з граничними умовами типа Неймана // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – №4. с. 153 – 160.
7. *Подлипенко Ю.К., Наконечний О.Г., Перцов А.С.* Минимаксное оценивание решения краевой задачи для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана // Доповіді НАН України. – 2010. – №2. с. 43 – 50.

УДК 517.956

©2013 р. Пукальський І.Д.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕРІВНОСТЯМИ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

За допомогою принципа максимума і апріорних оцінок вивчається крайова задача з нерівностями для еліптичного рівняння другого порядку зі степеневими особливостями у коефіцієнтах довільного порядку. В гельдерових просторах зі степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку поставленої задачі.

Using the maximum principle and a priori estimates we study a boundary value problem with inequalities for a second order elliptic equation with power singularities in the coefficients of an arbitrary order. We establish the existence and the uniqueness of the solution of the stated problem in Hölder spaces with a power weight.

Математичне моделювання багатьох задач механіки, фізики і теорії керувань приводить до вивчення систем нерівностей із частинними похідними [1, 2]. Рівняння з виродженнями за просторовими змінними описують різні процеси. У рівнянні Шредінгера, яке описує стан кванто-механічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [3]. Рівняннями із сингулярним оператором Бесселя у тілах із симетрією моделюються дифузійні процеси, радіальні коливання, тепло-масообмін при вирощуванні монокристалів [4]. Вивченню розв'язків нелокальної крайової задачі для систем двох еліптичних рівнянь з особливостями присвячено працю [5]. Дослідження питань існування і якісних властивостей розв'язків еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями приведені у працях [6–10].

У цій статті вивчається крайова задача з нерівностями для еліптичного рівняння другого порядку зі степеневими особливостями у коефіцієнтах на координатних площинах довільного порядку. Доведено єдиність, існування розв'язку поставленої задачі та встановлені оцінки розв'язку і його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай $(x_1, \dots, x_n)$ – координати точки $P(x) \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_j = \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, D – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D така, що $\partial D \cap \Omega_j \neq \emptyset$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Розглянемо в області D задачу знаходження функції $u(x)$, яка задовольняє рівняння

$$(Lu)(x) = \Big[\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\partial_{x_i} + A_0(x)\Big]u(x) = f(x) \qquad (1)$$

і крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(\mathcal{B}u - g)(x) = \lim_{x\to z\in\partial D}\Big[\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}u + b_0(x)u - g(x)\Big] \geq 0,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} u(x) \geq 0, \ \lim_{x\to z\in\partial D}[(\mathcal{B}u - g)u](x) = 0. \qquad (2)$$

Порядок особливостей коефіцієнтів диференціальних виразів L і $\mathcal{B}$ будуть характеризувати функції $s(a_i, x_i)$: $s(a_i, x_i) = |x_i|^{a_i}$ при $|x_i| \leq 1$; $s(a_i, x_i) = 1$ при $|x_i| \geq 1$; $S(a, P) = \min\{s(a, x_1), \dots, s(a, x_n)\}$, a, a_1, $\dots$, a_n – довільні фіксовані дійсні числа.

Нехай $\overline{D} = D \cup \partial D$, $P_1(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $P_i^{(2)}(x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ – довільні точки з $\overline{D}$, l – додатне фіксоване дійсне число. Визначимо функціональні простори, в яких буде вивчатися задача (1), (2).

$C^l(\gamma;\beta;a;D)$ – множина функцій u, які мають неперервні частинні похідні в D вигляду $\partial_x^k u(P)$, $|k| \le [l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_0 = \sup_{\overline{D}} |u| \equiv \|u;D\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;a;D\|_l = \sum_{|k|=0}^{[l]} \|u;\gamma;\beta;a;D\|_{|k|}+$$

$$+\langle u;\gamma;\beta;a;D\rangle_l \equiv$$

$$\equiv \sum_{|k|=0}^{[l]} \sup_{P\in\overline{D}} S(|k|\gamma+a;P) \prod_{m=1}^{n} s(-k_m\beta_m, x_m)\times$$

$$\times|\partial_x^k u(P)| + \sum_{|k|=[l]} \sum_{i=1}^{n} \sup_{(P_1,P_i^{(2)})\subset\overline{D}} S(l\gamma+a,\tilde{P})\times$$

$$\times s(-\{l\}\beta_i,\tilde{x}_i) \prod_{m=1}^{n} s(-k_m\beta_m,\tilde{x}_m)\times$$

$$\times|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\{l\}}|\partial_x^k u(P_1) - \partial_x^k u(P_i^{(2)})|,$$

γ, β_i – фіксовані дійсні числа, $\gamma \ge 0$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, $s(a,\tilde{x}_i) = \min\{s(a,x_i^{(1)}), s(a,x_i^{(2)})\}$, $S(a,\tilde{P}) = \min\{S(a,P_1), S(a,P_i^{(2)})\}$.

Щодо задачі (1), (2) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^{n} s(\beta_i,x_i)s(\beta_j,x_j)A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

π_1, π_2 – додатні фіксовані сталі і $s(\beta_i,x_i)s(\beta_j,x_j)A_{ij} \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $s(\mu_i,x_i)A_i \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $S(\mu_0,P)A_0(P) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $A_0(x) < 0$ для $x \in \overline{D}$, $f \in C^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;D)$, $\mu_0 \ge 0$, $\mu_i \ge 0$, межа $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$;

б) вектори $\overrightarrow{b}^{(s)} = \{b_1^{(s)},\ldots,b_n^{(s)}\}$, $b_j^{(s)} = s(\beta_j,x_j)b_j(x)$ і $\overrightarrow{e} = \{e_1,\ldots,e_n\}$, $e_j = \Big[\sum_{i=1}^{n} b_i^2(x)\Big]^{-1/2} b_j$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(x) \in \partial D$ кут менший $\dfrac{\pi}{2}$, $s(\beta_j,x_j)b_j \in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $S(\delta,P)b_0(P) \in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;D)$, $b_0(x) > 0$, $\delta \ge 0$, $g \in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;D)$, $\gamma = \max\Big\{\max_i(1+\beta_i), \max_i(\mu_i-\beta_i), \dfrac{\mu_0}{2}, \delta\Big\}$.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1), (2) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ і справджується оцінка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} \le c\Big(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;D\|_\alpha+$$

$$+\|g;\gamma;\beta;\delta;D\|_{1+\alpha}\Big). \qquad (3)$$

Доведення цього твердження наведемо пізніше.

Для дослідження задачі (1), (2) встановимо спочатку коректну розв'язність послідовності допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничними значеннями послідовності розв'язків яких буде розв'язок задачі (1), (2).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $D_m = D \cap \{x \in D \,\big|\, s(1,x_i) \ge m^{-1}\}$, $m > 1$, – послідовність областей, яка при $m \to \infty$ збігається до D. Розглянемо в області D задачу знаходження розв'язку рівняння

$$(L_1u_m)(x) \equiv \Big[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_{x_i} + a_0(x)\Big]u_m(x) = f_m(x), \qquad (4)$$

який задовольняє на межі ∂D крайові умови

$$(\mathcal{B}_1u_m - g_m)(x)|_{\partial D} \equiv \Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(x)\partial_{x_i}u_m+$$

$$+h_0(x)u_m - g_m(x)\Big]\Big|_{\partial D} \ge 0,$$

$$u_m\Big|_{\partial D} \ge 0,\ [u_m(\mathcal{B}_1u_m - g_m)]\Big|_{\partial D} = 0. \qquad (5)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 і функції f_m, g_m при $x \in D_m$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0 і f, g відповідно, а при $x \in D \setminus D_m$ є неперервним продовженням зі збереженням норм і гладкості [11, стор. 82].

Сформулюємо принцип максимуму для розв'язків задачі (4), (5). Правильною є така теорема.

Теорема 2. *Якщо u_m – класичний розв'язок задачі (4), (5) в області D і виконані умови а), б), то для $u_m(x)$ правильна нерівність*

$$|u_m| \le \max\{\|f_m a_0^{-1}; D\|_0, \|h_0^{-1} g_m; D\|_0\}. \quad (6)$$

Доведення. Нехай $\max\limits_{\overline{D}} u_m(x) = u_m(P_0)$. Якщо $P_0 \in D$, то в точці P_0 виконуються співвідношення

$$\partial_{x_i} u_m(P_0) = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_0)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(P_0) \le 0 \quad (7)$$

і задовольняється рівняння (4). З урахуванням (7) і рівняння (4) в точці P_0 правильна нерівність

$$u_m(P_0) \le \|f_m a_m^{-1}; D\|_0. \quad (8)$$

Нехай $\min u_m(x) = u_m(P_1)$. Якщо $P_1 \in D$, то в точці P_1 виконуються співвідношення

$$\partial_{x_i} u_m(P_1) = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(P_1) \ge 0 \quad (9)$$

і задовольняється рівняння (4). З урахуванням (9) і рівняння (4) в точці P_1 маємо

$$u_m(P_1) \ge \inf_{\overline{D}}(f_m a_0^{-1}). \quad (10)$$

Якщо $P_0 \in \partial D$, то виконуються умови (5). Можливі два випадки: $u_m(P_0) = 0$ або $(\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(P_0) = 0$. В другому випадку маємо $\dfrac{du_m(P_0)}{d\overrightarrow{e}} \ge 0$ (вектор $\overrightarrow{e}$ задовольняє умову б)), тому з рівності $\mathcal{B}_1 u_m(P_0) = g_m(P_0)$ маємо

$$u_m(P_0) \le h_0^{-1}(P_0) g_m(P_0). \quad (11)$$

Якщо $P_1 \in \partial D$, то $\dfrac{du_m(P_1)}{d\overrightarrow{e}} \le 0$. Враховуючи крайову умову $(\mathcal{B}_1 u_m(P_1) - g_m(P_1))u_m(P_1) = 0$, маємо

$$u_m(P_1) \ge h_0^{-1}(P_1) g_m(P_1). \quad (12)$$

Враховуючи нерівності (8), (10), (11), (12), для класичного розв'язку задачі (4), (5) одержуємо нерівність (6).

Знайдемо оцінки похідних розв'язків $u_m(x)$. Введемо в просторі $C^l(D)$ норму $\|u_m; \gamma; \beta; a; D\|_l$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеревій нормі, яка визначається так само, як і $\|u; \gamma; \beta; a; D\|_l$, тільки замість функцій $s(a_i, x_i)$ беремо відповідно: $d(a_i, x_i) = \max(s(a_i, x_i), m^{-a_i})$, якщо $a_i \ge 0$ і $d(a_i, x_i) = \min(s(a_i, x_i), m^{-a_i})$, якщо $a_i < 0$; $\rho(a; P) = \max\{S(a, P), \max\limits_i m^{-a_i}\}$, якщо $a_i \ge 0$ і $\rho(a; P) = \min\{S(a, P), \min\limits_i m^{-a_i}\}$, якщо $a_i < 0$.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді для розв'язку задачі (4), (5) справджується оцінка*

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \le c(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; D\|_\alpha + \\ + \|g; \gamma; \beta; \delta; D\|_{1+\alpha}). \quad (13)$$

Доведення. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [12], маємо

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \le \\ \le (1 + \varepsilon^\alpha)\langle u_m; \gamma; \beta; 0; D\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m; D\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число із $(0; 1)$. Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m; \gamma; \beta; 0; D\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми випливає існування в D точок P_1 та $P_i^{(2)}$, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \le E(u_m), \quad (14)$$

$$E(u_m) \equiv \sum_{|k|=2} \sum_{i=1}^{n} \rho((2+\alpha)\gamma; \tilde{P}) d(-\alpha\beta_i; \tilde{x}_i) \times \\ \times \prod_{m=1}^{n} d(-k_m\beta_m; \tilde{x}_m) |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\alpha} \times \\ \times |\partial_x^k u_m(P_1) - \partial_x^k u_m(P_i^{(2)})|.$$

Нехай $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \le 4^{-1} n^{-1} \tau d(\gamma - \beta_i, \tilde{x}) \equiv T$, $\tau \in (0, 1)$. Вважатимемо, що $d(\gamma, \tilde{x}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$. Розглянемо випадок $|x_j^{(1)} - y_j| \le 4T$, $y \in \partial D$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Вважатимемо для простоти, що $j = n$.

Позначимо через $K_R(P)$ кулю радіуса $R \geq 4nT$, яка містить точки P_1 і $P_i^{(2)}$ з центром в точці $P \in \partial D$. Враховуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap K_R(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(t)$ ([11], стор. 126). В результаті такого перетворення область $D \cap K_R(P)$ переходить в область Q, для точок якої $t_n \geq 0$.

Вважатимемо, що $u_m(x)$, P_1, $P_i^{(2)}$, E, $\rho(a; P_1)$, $d(\gamma, x_i^{(1)})$, T при цьому перетворенні переходять відповідно в $v_m(t)$, H_1, $H_i^{(2)}$, E_1, $\rho_1(a, H_1)$, $d_1(\gamma, t_i^{(1)})$, T_1. Позначимо коефіцієнти виразів L_1 і $\mathcal{B}_1$ в області Q через $r_{ij}(t)$, $r_i(t)$, $r_0(t)$, $l_i(t)$, $l_0(t)$. Тоді $v_m(t)$ буде розв'язком такої задачі

$$\left[\sum_{ij=1}^{n} r_{ij}(H_1)\partial_{t_i}\partial_{t_j} - \lambda\right] v_m(t) = \sum_{ij=1}^{n} [r_{ij}(H_1) - $$

$$-r_{ij}(t)]\partial_{t_i}\partial_{t_j} v_m - \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\partial_{t_i} v_m -$$

$$-(r_0(t) + \lambda)v_m + f_m(\psi(t)) \equiv F_m(t), \quad (15)$$

$$\mathcal{B}_1 v_m|_{t_n=0} \equiv \sum_{i=1}^{n} l_i(H_1)\partial_{t_i} v_m|_{t_n=0} \geq$$

$$\geq \Big[\sum_{i=1}^{n} (l_i(H_1) - l_i(t))\partial_{t_i} v_m -$$

$$-l_0(t)v_m + g_m(\psi(t))\Big]\Big|_{t_n=0} \equiv G_1(t)|_{t_n=0}, \quad (16)$$

$$v_m|_{t_n=0} \geq 0, \quad [v_m(\mathcal{B}_1 v_m - G_1)]\Big|_{t_n=0} = 0,$$

λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\sup\limits_{\overline{D}} A_0(x) + \lambda \leq 0$.

В задачі (15), (16) зробимо заміну $v_m(t) = \omega_m(z)$, $z_i = d_1(\beta_i, t^{(1)})t_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Область визначення $\omega_m(z)$ позначимо через Q_1. Тоді $\omega_m(z)$ буде розв'язком задачі

$$(L_2\omega_m)(z) \equiv \left[\sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i, t_i^{(1)}) d_1(\beta_j, t_j^{(1)}) \times\right.$$

$$\left.\times r_{ij}(H_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j} - \lambda\right]\omega_m = F_m(\tilde{z}),$$

$$(\mathcal{B}_2\omega_m)(z)|_{z_n=0} \equiv \sum_{j=1}^{n} d_1(\beta_j, t_j^{(1)}) l_j(H_1) \times$$

$$\times \partial_{z_j}\omega_m|_{z_n=0} \geq G_1(\tilde{z})|_{z_n=0},$$

$$\omega_m|_{z_n=0} \geq 0, \quad [\omega_m(\mathcal{B}_2\omega_m - G_1)]\Big|_{z_n=0} = 0,$$

де $\tilde{z} = (d_1^{-1}(\beta_1, t_1^{(1)})z_1, \ldots, d_1^{-1}(\beta_n, t_1^{(n)})z_n)$.

Позначимо через $\Pi_q = \{z, z \in Q_1 \Big| |z_i - z_i^{(1)}| \leq n^{-1} q d_1(\gamma, t_i^{(1)}),\ z_i^{(1)} = d_1(\beta_i, t_i^{(1)})t_i^{(1)},\ z_n \geq 0,\ q \in (0,1)\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(z)$, яка задовольняє умови

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Pi_{1/2}, 0 \leq \eta(z) \leq 1; \\ 0, & z \notin \Pi_{3/4}, |\partial_{z_i}\partial_{z_j}\partial_{z_k}\eta(z)| \leq \\ & \leq c d_1^{-1}(\gamma, t_i^{(1)}) d_1^{-1}(\gamma, t_j^{(1)}) \times \\ & \times d_1^{-1}(\gamma, t_k^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(z) = \omega_m(z)\eta(z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$(L_2 W_m)(z) = \sum_{ij=1}^{n} r_{ij}(H_1) d_1(\beta_i^{(1)}, t_i^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t_j^{(1)}) \times$$

$$\times [\partial_{z_i}\omega_m\partial_{z_j}\eta + \partial_{z_i}\eta\partial_{z_j}\omega_m] +$$

$$+\omega_m\Big[\sum_{ij=1}^{n} r_{ij}(H_1) d_1(\beta_i, t_i^{(1)}) d_1(\beta_j, t_j^{(1)})\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta\Big] +$$

$$+\eta(z)F_m(\tilde{z}) \equiv \Phi_m(z) + \eta F_m(\tilde{z}), \quad (17)$$

$$(\mathcal{B}_2 W_m)(z)|_{z_n=0} \geq \Big[\sum_{i=1}^{n} d_1(\beta_i, t_i^{(1)}) l_i(H_1)\omega_m\partial_{z_i}\eta +$$

$$+\eta G_1\Big]\Big|_{z_n=0} \equiv [G_2 + \eta G_1]\Big|_{z_n=0}, \quad (18)$$

$$W_m|_{z_n=0} \geq 0, \Big[W_m(\mathcal{B}_2 W_m - G_2 - \eta G_1)\Big]\Big|_{z_n=0} = 0.$$

Можливі два випадки: існують такі точки межі $Q_1 \cap \{z_n = 0\}$, в яких виконується умова

$$[\mathcal{B}_2 W_m - G_2 - \eta G_1]|_{z_n=0} = 0, \quad (19)$$

або таких точок не існує, тобто $[\mathcal{B}_2 W_m - G_2 - \eta G_1]|_{z_n=0} > 0$. Тоді з крайової умови (18) маємо

$$W_m|_{z_n=0} = 0. \quad (20)$$

У першому випадку досліджуємо задачу (17), (19). На підставі теореми 2.17 ([8], стор. 231) для розв'язку задачі (17), (19) і довільних точок M_1, $M_2 \in \Pi_{1/2}$ правильна нерівність

$$|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^{-\alpha}|\partial_\xi^2\omega_m(M_1) - \partial_\xi^2\omega_m(M_2)| \leq$$
$$\leq c(\|\Phi_m + \eta F_m\|_{C^\alpha}(\Pi_{3/4}))+ \quad (21)$$
$$+\|G_2 + \eta G)1\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4})}.$$

Враховуючи властивості функції $\eta(z)$, знаходимо

$$\|\Phi_m + \eta F_m\|_{C^\alpha(\Pi_{3/4})} \leq c\rho_1(-(2+\alpha)\gamma; H_1)\times$$
$$\times(\|F_m; \gamma; 0; 2\gamma; \Pi_{3/4}\|_\alpha +$$
$$+\|\omega_m; \gamma; 0; 0; \Pi_{3/4}\|_2 + \|\omega_m; \Pi_{3/4}\|_0), \quad (22)$$
$$\|G_2 + \eta G_1\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4})} \leq c\rho_1(-(2+\alpha)\gamma; H_1)\times$$
$$\times(\|G_1; \gamma; 0; \gamma; \Pi_{3/4}\|_{1+\alpha} +$$
$$+\|\omega_m; \gamma; 0; 0; \Pi_{3/4}\|_2 + \|\omega_m; \Pi_{3/4}\|_0). \quad (23)$$

Підставляючи (22), (23) у (21) і повертаючись до змінних t, одержимо нерівність

$$E(v_m) \leq c(\|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; Q\|_\alpha +$$
$$+\|G_1; \gamma; \beta; \gamma; Q\|_{1+\alpha} +$$
$$+\|v_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_2 + \|v_m; Q\|_0).$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності, оцінки півнорм кожного доданка виразів F_m і G_1 і повертаючись до змінних x, одержимо

$$E(u_m) \leq [\varepsilon^\alpha(n+2)+\tau^2 n^2]\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} +$$
$$+c\|u_m; D\|_0 + c_1(\|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; D\|_\alpha + \quad (24)$$
$$+\|g_m; \gamma; \beta; \gamma; D\|_{1+\alpha}).$$

Якщо виконується умова (20), то досліджуємо задачу (17), (20). Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінки розв'язку задачі (17), (19) і використовуючи при цьому теорему 2.17 із ([8], стор. 231),одержимо нерівність

$$E(u_m) \leq [\varepsilon^\alpha(n+2)+\tau^2 n^2]\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} +$$
$$+c\|u_m; D\|_0 + c_1\|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; D\|_\alpha. \quad (25)$$

Нехай $|x_j^{(1)} - y_j| \geq 4T$. Тоді запишемо задачу (5), (6) у вигляді

$$(L_3 u_m)(x) \equiv \left[\sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \lambda\right] u_m =$$
$$= \sum_{i=1}^n [a_{ij}(P_1) - a_{ij}(x)]\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m -$$
$$-\sum_{ij=1}^n a_i(x)\partial_{x_i} u_m - (a_m(x)+\lambda)u_m + f_m(x) \equiv \quad (26)$$
$$\equiv \Phi(x, u_m) + f_m(x),$$
$$(\mathcal{B}_3 u_m)(x)|_{\partial D} \equiv \sum_{i=1}^n h_i(P_1)\partial_{x_i} u_m|_{\partial D} \geq$$
$$\geq \Big[\sum_{i=1}^n (h_i(P_1) - h_i(x))\partial_{x_i} u_m + g_m(x) -$$
$$-h_0(x)u_m\Big]\Big|_{\partial D} \equiv [G_3(x, u_m) + g_m]\Big|_{\partial D}, \quad (27)$$
$$u_m|_{\partial D} \geq 0, \quad [u_m(\mathcal{B}_3 u_m - G_3 - g_m)]\Big|_{\partial D} = 0.$$

В задачі (26), (27) зробимо заміну $u_m(x) = v_m^{(1)}(z)$, $z_i = d(\beta_i, x_i^{(1)})x_i$, одержимо

$$(L_4 v_m^{(1)})(z) \equiv \Big[\sum_{ij=1}^n d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})\times$$
$$\times a_{ij}(P_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j} - \lambda\Big] v_m^{(1)} = \Phi(\tilde{z}, v_m^{(1)}) + f_m(\tilde{z}),$$
$$(\mathcal{B}_4 v_m^{(1)})(z)\Big|_{\partial D} \equiv$$
$$\equiv \sum_{i=1}^n d(\beta_i, x^{(1)})h_i(P_1)\partial_{x_i} v_m^{(1)}\Big|_{\partial D} \geq$$
$$\geq [G_3(\tilde{z}, v_m^{(1)}) + g_m(\tilde{z})]\Big|_{\partial D},$$
$$v_m^{(1)}|_{\partial D}, \quad [v_m^{(1)}(\mathcal{B}_4 v_m^{(1)} - G_3 - g_m)]\Big|_{\partial D} = 0,$$

де $\tilde{z} = (d(-\beta_1, x_1^{(1)})z_1, \ldots, d(-\beta_n, x_n^{(1)})z_n)$.

Позначимо через $z_i^{(1)} = d(\beta_i; x_1^{(1)})x_i^{(1)}$, $\Pi_q^{(1)} = \Big\{z, |z_i - z_i^{(1)}| \leq qn^{-1}d(\gamma; x_i^{(1)}), i \in$

$\{1, 2, \ldots, n\}\Big\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta_1(z)$, яка задовольняє умови:

$$\eta_1(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Pi^{(1)}_{1/2}, 0 \le \eta_1(z) \le 1; \\ 0, & z \notin \Pi^{(1)}_{3/4}, |\partial_{z_i}\partial_{z_j}\partial_{z_k}\eta^{(1)}(z)| \le \\ & \le cd(-\beta_i, x_i^{(1)})d(-\beta_j, x_j^{(1)})\times \\ & \times d(-\beta_k, x_k^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(z) = v_m^{(1)}(z)\eta_1(z)$ задовольняє крайову задачу

$$(L_4 V_m)(z) = \sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})a_{ij}(P_1)\times$$
$$\times[\partial_{z_i} v_m^{(1)}\partial_{z_j}\eta_1 + \partial_{z_j} v_m^{(1)}\partial_{z_i}\eta_1]+$$
$$+v_m^{(1)}\Big[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})a_{ij}(P_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta_1\Big]+$$
$$+\eta\Phi(\tilde{x}, v_m^{(1)}) + \eta f_m(\tilde{z}), \tag{28}$$
$$V_m|_{\partial D} = 0. \tag{29}$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінки розв'язку задачі (17), (19) і використовуючи при цьому теорему 2.17 із ([8], стор. 231), одержимо нерівність (25).

Якщо $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \ge T$, то використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E(u_m) \le \varepsilon^\alpha \|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m; D\|_0. \tag{30}$$

Скориставшись нерівностями (6), (14), (24), (25), (30) і вибравши ε і τ досить малими, одержимо оцінку (13).

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (13) не залежить від m, тоді послідовності $\{W_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}$, $\{W_m^{(1)}\} \equiv \{\rho(\gamma, P)d(-\beta_i, x_i)\partial_{x_i}u_m(P)\}$, $\{W_m^{(2)}\} \equiv \{\rho(2\gamma; P)d(-\beta_i, x_i)d(-\beta_j, x_j)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(P)\}$ рівномірно обмежені і рівностайно неперервні в області $\overline{D}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{W_{m_k}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $\overline{D}$ до $W^{(\nu)}$, $\nu \in \{0, 1, 2\}$.

Переходячи до границі при $m_k \to \infty$ в задачі (4), (5), одержимо, що $u(x) = W^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Duvaut G, Lions J.L.* Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, 1972. – 384 p.

2. *Clowinski R., Lions J.L., Tremolieres R.* Analyse numerique des inéquations variationnells, Dunod, Paris, 1976. – 574 p.

3. *Зейтц Ф.* Современная теория твердого тела. – М.Л.: Гостехиздат, 1949. – 736 с.

4. *Конаков П.К., Веревочкин Т.Е.* Тепломассообмен при получении монокристаллов. – М.: Металлургия, 1971. – 387 с.

5. *Моисеев Е.И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифф. уравнения. – 2001. – 37, № 11. – С. 1555-1567.

6. *Бицадзе А.Б.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

7. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

8. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

9. *Esteban Maria J.* Nonexistence result for positive solutions of nonlinear elliptic degenerate problems // Nonlinear Anal. Theory Math. and Appl. – 1996, 26, № 4. – P. 835-843.

10. *Amano Kazuo.* Maximum principle for degenerate elliptic-parabolic equations with Venttsel's boundary conditions. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1981. 263, № 2. – P. 377-396.

11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

12. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженням: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.

УДК 517.943

©2013 р. **П. Ф. Самусенко**

Інституту інформатики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, м. Київ

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

У роботі розроблено алгоритм побудови періодичних розв'язків вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу.

We provide an algorithm for construction of periodic solution of degenerate singularly perturbed systems of differential equations with delay.

Різноманітні аспекти теорії систем диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon),\ t \in [\varepsilon; T],$$

де $x(t,\varepsilon)$ та $f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектор-функції, з малим запізненням аргументу ($0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 << 1$) розглядалися в роботах А.Д. Мишкіса [1], А.Б. Васильєвої та О.М. Родіонова [2], Ю. О. Рябова [3] тощо. В. І. Рожков та Г. Д. Курдеванідзе довели існування та єдиність періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь з малим запізненням аргументу та побудували його асимптотичне розвинення за степенями малого параметру [4]. Зазначимо, що системи (1) за асимптотичними властивостями близькі до систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Періодичні розв'язки сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідних досліджувались в роботах А. М. Самойленка, М.І. Шкіля, В.П. Яковця та їх учнів [5, 6].

У даній роботі розроблено алгоритм побудови періодичного розв'язку виродженої ($\det B(t) \equiv 0,\ t \in [0;T]$) сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon),\ t \in [\varepsilon; T], \tag{1}$$

з малим запізненням аргументу ($0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 << 1$).

1. Некритичний випадок. Надалі припускаємо виконання таких умов:

1. Елементи матриці $B(t)$ та вектор-функції $f(x,[x],t,\varepsilon)$, $[x(t,\varepsilon)] = x(t-\varepsilon,\varepsilon)$, T-періодичні за змінною t відповідно на відрізку $[0;T]$ та на множині V, де

$$V = \{(x,[x],t,\varepsilon) : ||x|| \le a,\ ||[x]|| \le a,$$
$$0 \le t \le T,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}.$$

2. Рівняння $f(x,x,t,0) = 0$ відносно x має T-періодичний розв'язок $x = x_0(t)$ такий, що:
а) $x_0(t) \in C[0;T]$;
б) точки $(x_0(t),t) \in U$, $U = \{(x,t) : ||x|| < a,\ 0 \le t \le T\}$;
в) корінь $x = x_0(t)$ є ізольованим на відрізку $[0;T]$.

3. На відрізку $[0;T]$ в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t)$ регулярна, має $n-1$ скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник (f_x – квадратна матриця n-го порядку, що складається з вектор-стовпців $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i,j = \overline{1,n}$).

4. $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \ne 0$, $t \in [0;T]$, $i = \overline{1,n-1}$, причому $\lambda_i(t) \ne \lambda_j(t)$, $t \in [0;T]$, $i \ne j$, $i,j = \overline{1,n-1}$, де $\lambda_i(t)$ – корені характеристичного рівняння

$$\det(f_x(\overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t)) = 0. \tag{2}$$

Під час побудови формального розв'язку системи (1), вважаємо, що $B(t) \in$

$C^\infty[-T;T]$, $f(x,t,\varepsilon)\in C^\infty(V_1)$,

$$V_1=\{(x,[x],t,\varepsilon):\, ||x||\le a,\, ||[x]||\le a,$$
$$-T\le t\le T,\, 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}.$$

Формальний розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s x_s(t). \qquad (3)$$

Для цього функцію $f(x(t,\varepsilon),[x(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)$ записуємо так

$$f(x(t,\varepsilon),[x(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)=f(x_0(t),x_0(t),t,0)+$$
$$+\varepsilon(f_x(t)+f_{[x]}(t))x_1(t)+f_1(t))+...+\varepsilon^s(f_x(t)+$$
$$+f_{[x]}(t))x_s(t)+f_s(t))+...\equiv\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\overline{f}_s(t),$$

де елементи матриць $f_x(t)$, $f_{[x]}(t)$ обчислюються в точці $(x_0(t),x_0(t),t,0)$, а вектори $f_s(t)$ певним чином виражаються через $x_k(t)$, $k<s$.

Підставимо (3) до системи (1) і зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Так, при ε^0 маємо

$$f(x_0(t),x_0(t),t,0)=0. \qquad (4)$$

5. Нехай $\det(f_x(t)+f_{[x]}(t))\neq 0$, $t\in[0;T]$.

Тоді згідно з припущеннями 1, 2 рівняння (4) має T-періодичний розв'язок $x_0=x_0(t)$ такий, що $x_0(t)\in C^\infty[-T;T]$.

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^s, $s\in N$, дістаємо

$$B(t)\frac{dx_{s-1}}{dt}=(f_x(t)+f_{[x]}(t))x_s+f_s(t). \qquad (5)$$

Тоді

$$x_s(t)=(f_x(t)+f_{[x]}(t))^{-1}\times$$
$$\times\left(B(t)\frac{dx_{s-1}(t)}{dt}-f_s(t)\right),\ s\in N.$$

При цьому, вектор-функції $x_s(t)$, $s\in N$, є T-періодичними.

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку системи (1). Зробивши заміну у системі (1)

$$x(t,\varepsilon)=x_m(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon), \qquad (6)$$

де

$$x_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s x_s(t),$$

а $y(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція, дістаємо

$$\varepsilon B(t)\frac{dy}{dt}=f_x(t,\varepsilon)y+f_{[x]}(t,\varepsilon)[y]+h(y,[y],t,\varepsilon), \qquad (7)$$

$$f_x(t,\varepsilon)=f_x(x_0(t),x_0(t),t,\varepsilon),$$
$$f_{[x]}(t,\varepsilon)=f_{[x]}(x_0(t),x_0(t),t,\varepsilon),$$

$h(y,[y],t,\varepsilon)=f(x_m+y,[x_m+y],t,\varepsilon)-\varepsilon B(t)\dfrac{dx_m}{dt}-f_x(t,\varepsilon)y-f_{[x]}(t,\varepsilon)[y]$.

Доведемо існування такого T-періодичного розв'язку $y=y(t,\varepsilon)$ системи (7), що $y(0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{m+1})$.

Згідно [7, 8] існують неособливі T-періодичні достатньо гладкі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, для яких на відрізку $[0;T]$ мають місце рівності

$$P(t,\varepsilon)f_x(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{f}_x(t,\varepsilon)\equiv$$
$$\equiv diag\{e(t,\varepsilon),W_{n-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$P(t,\varepsilon)B(t)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,\varepsilon)\equiv$$
$$\equiv diag\{b(t,\varepsilon),E_{n-1}(t,\varepsilon)\},$$

де

$$e(t,0)=1,\ E_{n-1}(t,0)=E_{n-1},\ b(t,0)=0,$$
$$W_{n-1}(t,0)=W_{n-1}(t)\equiv\{\lambda_1(t),...,\lambda_{n-1}(t)\}.$$

Зробимо в системі (7) заміну $y(t,\varepsilon)=Q(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t,\varepsilon)$. Маємо

$$\varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dz_1}{dt}=e(t,\varepsilon)z_1+\varepsilon D_1(t,\varepsilon)z_1+$$
$$+\varepsilon D_2(t,\varepsilon)z_2+F_1(t,\varepsilon)[z_1]+F_2(t,\varepsilon)[z_2]+$$
$$+w_1(z,[z],t,\varepsilon), \qquad (8)$$

$$\varepsilon\frac{dz_2}{dt}=W_{n-1}(t)z_2+\varepsilon D_3(t,\varepsilon)z_1+$$
$$+(E_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon)W_{n-1}(t,\varepsilon)-W_{n-1}(t)+$$
$$+\varepsilon D_4(t,\varepsilon))z_2+F_3(t,\varepsilon)[z_1]+F_4(t,\varepsilon)[z_2]+$$
$$+w_2(z,[z],t,\varepsilon), \qquad (9)$$

де

$$D(t,\varepsilon)=-diag\{1,E_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon)\}\widetilde{B}(t,\varepsilon)\times$$

$$\times Q^{-1}(t,\varepsilon)Q'(t,\varepsilon)\equiv\begin{pmatrix}D_1(t,\varepsilon) & D_2(t,\varepsilon)\\ D_3(t,\varepsilon) & D_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

$$F(t,\varepsilon)=diag\{1,E_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon)\}P(t,\varepsilon)\times$$

$$\times f_{[x]}(t,\varepsilon)[Q(t,\varepsilon)]\equiv\begin{pmatrix}F_1(t,\varepsilon) & F_2(t,\varepsilon)\\ F_3(t,\varepsilon) & F_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

$$w(z,[z],t,\varepsilon)=diag\{1,E_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon)\}\times$$

$$\times P(t,\varepsilon)h(Q(t,\varepsilon)z,[Q(t,\varepsilon)z],t,\varepsilon),$$

$D_4(t,\varepsilon)$ та $F_4(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці $(n-1)$-го порядку; z_1 та w_1 – перші компоненти векторів z та w відповідно, а z_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент z та w.

Зазначимо, що

$$||w(v_1,[v_1],t,\varepsilon)-w(v_2,[v_2],t,\varepsilon)||\le$$

$$\le\varepsilon k_0(||v_1-v_2||+||[v_1]-[v_2]||)$$

для всіх v_1, $v_2\in D_1$, де

$$D_1=\{u(t,\varepsilon)\in C[\varepsilon;T]:||u(t,\varepsilon)||\le k_1\varepsilon\},$$

та $||w(0,0,t,\varepsilon)||\le k_2\varepsilon^{m+1}$, $t\in[\varepsilon;T]$.
6. Нехай $b(t,\varepsilon)=\varepsilon^k b_1(t,\varepsilon)$, $k>0$, причому $\operatorname{Re} b_1(t,0)\ne 0$, $t\in[0;T]$.

Тоді із системи (8), (9) дістаємо

$$z_1(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}\frac{1}{b(s,\varepsilon)}(\Psi_1(s,\varepsilon)(\Psi_1^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-$$

$$-1)\Psi_1^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}u(z,[z],s,\varepsilon)ds,\qquad(10)$$

$$z_2(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}\Psi_{n-1}(s,\varepsilon)(\Psi_{n-1}^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-$$

$$-E_{n-1})\Psi_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}v(z,[z],s,\varepsilon)ds,\qquad(11)$$

де $\Psi_1(t,\varepsilon)$ – розв'язок задачі Коші

$$\varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dz_1}{dt}=e(t,\varepsilon)z_1,\ \Psi_1(\varepsilon,\varepsilon)=1,$$

а $\Psi_{n-1}(t,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця однорідної системи

$$\varepsilon\frac{dz_2}{dt}=W_{n-1}(t)z_2,\ \Psi_{n-1}(\varepsilon,\varepsilon)=E_{n-1},$$

$$u(z,[z],s,\varepsilon)=\varepsilon D_1(s,\varepsilon)z_1+\varepsilon D_2(s,\varepsilon)z_2+$$

$$+F_1(s,\varepsilon)[z_1]+F_2(s,\varepsilon)[z_2]+w_1(z,[z],s,\varepsilon),$$

$$v(z,[z],s,\varepsilon)=\varepsilon D_3(s,\varepsilon)z_1+(E_{n-1}^{-1}(s,\varepsilon)\times$$

$$\times W_{n-1}(s,\varepsilon)-W_{n-1}(s)+\varepsilon D_4(s,\varepsilon))z_2+$$

$$+F_3(s,\varepsilon)[z_1]+F_4(s,\varepsilon)[z_2]+w_2(z,[z],s,\varepsilon).$$

Нехай $W_{n-1}(t)=diag\{W_+(t),W_-(t)\}$, де $W_+(t)$ та $W_-(t)$ – матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $W_{n-1}(t)$ відповідно з додатними та від'ємними дійсними частинами. Для визначеності припустимо, що $\operatorname{Re}\dfrac{e(t,\varepsilon)}{b(t,\varepsilon)}>0$, $t\in[\varepsilon;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$.

Тоді

$$z_1(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon+T}\frac{e(t,\varepsilon)}{b(t,\varepsilon)}dt\right)-1\right)^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^T\frac{1}{b(t+s,\varepsilon)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t+s}^t\frac{e(t,\varepsilon)}{b(t,\varepsilon)}dt\right)\times$$

$$\times u(z(t+s,\varepsilon),[z(t+s,\varepsilon)],t+s,\varepsilon)ds,\quad(12)$$

$$z_{2+}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon+T}W_+(t)dt\right)-E_+\right)^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t+s}^t W_+(t)dt\right)\times$$

$$\times v_+(z(t+s,\varepsilon),[z(t+s,\varepsilon)],t+s,\varepsilon)ds,\quad(13)$$

$$z_{2-}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left(E_- -\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon+T}W_-(t)dt\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t+s-T}^t W_-(t)dt\right)\times$$

$$\times v_-(z(t+s,\varepsilon),[z(t+s,\varepsilon)],t+s,\varepsilon)ds,\quad(14)$$

де

$$v(z,[z],t,\varepsilon)=$$

$$=colon(v_+(z,[z],t,\varepsilon),v_-(z,[z],t,\varepsilon)),$$

$$z_2(t,\varepsilon)=colon(z_{2+}(t,\varepsilon),z_{2-}(t,\varepsilon)),$$

причому розмірності векторів $v_+(z,[z],t,\varepsilon)$, $z_{2+}(t,\varepsilon)$ та $v_-(z,[z],t,\varepsilon)$, $z_{2-}(t,\varepsilon)$ відповідно дорівнюють порядку матриць $W_+(t)$ та $W_-(t)$; E_+ та E_- – одиничні матриці відповідного порядку.

Позначимо через $\lambda_{i+}(t)$ та $\lambda_{j-}(t)$ довільні фіксовані власні значення матриць $W_+(t)$ та $W_-(t)$ відповідно. Тоді існують такі сталі c_+, c_-, що $0 < c_+ \le \operatorname{Re}\lambda_{i+}(t)$, $\operatorname{Re}\lambda_{j-}(t) \le c_- < 0$, $t \in [0;T]$, для всіх i, j.

7. Нехай

$$c \max_{0\le t\le T}\left\{\frac{|b_1(t,0)|}{\operatorname{Re} b_1(t,0)}, \frac{1}{c_+}, \frac{1}{|c_-|}\right\} < \frac{1}{2},$$

де $||F(t,\varepsilon)|| \le c$, $t \in [\varepsilon;T]$.

Тоді оператор, що визначений за допомогою (12) – (14), відображає множину

$$P_{m+1} = \{z(t,\varepsilon) \in C[\varepsilon;T] :$$

$$z(t+T,\varepsilon) = z(t,\varepsilon), ||z(t,\varepsilon)|| \le k_3\varepsilon^{m+1}\},$$

в себе і є оператором стиску. А тому система (12) – (14) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [9]. Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай $B(t) \in C^{m+1}[-T;T]$, $f(x,[x],t,\varepsilon) \in C^{m+1}(V_1)$ і виконуються умови 1 – 7. Тоді існує таке ε_1, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, що система (1) на відрізку $[\varepsilon;T]$ для всіх $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ має єдиний T-періодичний розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$, для якого

$$||x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^{m+1}). \qquad (15)$$

2. Критичний випадок. Припустимо, що виконуються такі умови:

8. Рівняння $f(x,x,t,0) = 0$ відносно x має T-періодичний розв'язок $x = x_0(t,\alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k)$ – k-вимірний вектор, компонентами якого є довільні параметри, причому:

а) $x_0(t,\alpha) \in C^{m+2}(D(t,\alpha))$, $D(t,\alpha) = [-T;T] \times D(\alpha)$, $D(\alpha)$ – область зміни параметрів α_1, ..., α_k;

б) ранг матриці $x_{0\alpha}(t,\alpha)$ дорівнює k для всіх $(t,\alpha) \in D(t,\alpha)$.

9. $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $i = \overline{1,k}$; $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \ne 0$, $t \in [0;T]$, $i = \overline{k+1,n-1}$, причому $\lambda_i(t) \ne \lambda_j(t)$, $t \in [0;T]$, $i \ne j$, $i,j = \overline{k+1,n-1}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,n-1}$, – корені рівняння (2).

Розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді (3). Тоді $x_0(t,\alpha)$ знаходимо з рівняння (4). Диференціюючи отриману тотожність (4) за змінною α, дістаємо

$$(f_x(t) + f_{[x]}(t))x_{0\alpha}(t,\alpha) \equiv 0, \ (t,\alpha) \in D(t,\alpha),$$

тобто стовпці матриці $x_{0\alpha}(t,\alpha)$ є власними векторами матриці $f_x(t) + f_{[x]}(t)$, що відповідають нульовому власному значенню.

Вектор-функцію $x_1(t)$ визначаємо з (5) при $s = 1$

$$(f_x(t) + f_{[x]}(t))x_1 = B(t)\frac{dx_0}{dt} - f_1(t). \qquad (16)$$

10. Нехай на відрізку $[0;T]$ в'язка $f_x(t) + f_{[x]}(t) - \lambda B(t)$ регулярна і має прості скінченні елементарні дільники.

Критерієм розв'язності системи (16) відносно $x_1(t)$ є ортогональність вектор-функції $B(t)\dfrac{dx_0}{dt} - f_1(t)$ до власних векторів $d_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, матриці $(f_x(t) + f_{[x]}(t))^*$, які відповідають нульовому власному значенню. Тобто

$$(D(t), B(t)\frac{dx_0(t,\alpha)}{dt} -$$

$$-f_\varepsilon(x_0(t,\alpha), x_0(t,\alpha), t, 0)) = 0$$

або

$$(D(t), B(t)x_{0\alpha}(t,\alpha))\frac{d\alpha}{dt} = D(t)\times$$

$$\times(f_\varepsilon(x_0(t,\alpha), x_0(t,\alpha), t, 0) - B(t)x_{0t}(t,\alpha)), \qquad (17)$$

де $D(t)$ – $(k \times n)$-матриця, рядками якої є вектори $d_i(t)$, $i = \overline{1,k}$.

Зазначимо, що

$$det(D(t), B(t)x_{0\alpha}(t,\alpha)) \ne 0$$

для всіх $t \in [0;T]$ [8, 10]. Таким чином, рівняння (17) можна записати у вигляді

$$\frac{d\alpha}{dt} = (D(t), B(t)x_{0\alpha}(t,\alpha))^{-1}D(t)\times$$

$$\times(f_\varepsilon(x_0(t,\alpha), x_0(t,\alpha), t, 0) - B(t)x_{0t}(t,\alpha)). \qquad (18)$$

11. Нехай рівняння (18) має такий T-періодичний розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [0;T]$, що $(x_0(t,\alpha(t)),t) \in U$.

Тоді загальний розв'язок системи (16) матиме вигляд

$$x_1(t) = x_{0\alpha}(t,\alpha)\beta(t) + \widetilde{x}_1(t),$$

де $\beta(t)$ – довільна k-вимірна вектор-функція, а $\widetilde{x}_1(t)$ – деякий частинний розв'язок системи (16).

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^2 аналогічно дістаємо

$$\frac{d\beta}{dt} = (D(t), B(t)x_{0\alpha}(t,\alpha))^{-1}D(t)r(\beta,t), \tag{19}$$

де компоненти $r(\beta,t)$ є многочленами другого степеня відносно β.
12. Нехай рівняння (19) має T-періодичний розв'язок $\beta = \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

На k-тому кроці вираз для $x_k(t)$ міститиме довільну функцію $\eta_k(t)$. Причому, починаючи з $k=3$, для визначення функції $\eta_k(t)$ отримуємо лінійні диференціальні рівняння [10].
13. Припустимо, що функції $\eta_k(t)$, $t \in [0;T]$, $k = \overline{3,m}$, є T-періодичними розв'язками відповідних систем диференціальних рівнянь.

З'ясуємо асимптотичні властиві побудованого формального розв'язку системи (1). Зробивши у системі (1) заміну

$$x(t,\varepsilon) = x_{m+1}(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon), \tag{20}$$

приходимо до системи (7), в якій

$$f_x(t,\varepsilon) =$$
$$= f_x\left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t), x_0(t) + \varepsilon x_1(t), t, \varepsilon\right),$$
$$f_{[x]}(t,\varepsilon) =$$
$$= f_{[x]}\left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t), x_0(t) + \varepsilon x_1(t), t, \varepsilon\right).$$

Тоді

$$||w(v_1,[v_1],t,\varepsilon) - w(v_2,[v_2],t,\varepsilon)|| \le$$
$$\le \varepsilon^2 k_0(||v_1 - v_2|| + ||[v_1] - [v_2]||)$$

для всіх v_1, $v_2 \in D_2$, де

$$D_2 = \{u(t,\varepsilon) \in C[\varepsilon;T] : ||u(t,\varepsilon)|| \le k_1\varepsilon^2\}.$$

У даному випадку існують такі неособливі T-періодичні достатньо гладкі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, що

$$P(t,\varepsilon)f_x(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = \widetilde{f}_x(t,\varepsilon) \equiv$$
$$\equiv diag\{e(t,\varepsilon), W_{n-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$W_{n-1}(t,\varepsilon) = diag\{W_k(t,\varepsilon), W_{n-k-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = \widetilde{B}(t,\varepsilon) \equiv$$
$$\equiv diag\{b(t,\varepsilon), E_{n-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$E_{n-1}(t,\varepsilon) = diag\{E_k(t,\varepsilon), E_{n-k-1}(t,\varepsilon)\},$$

для всіх $[0;T]$, де

$$e(t,0) = 1, \ E_k(t,0) = E_k,$$
$$E_{n-k-1}(t,0) = E_{n-k-1},$$
$$b(t,0) = 0, \ W_k(t,0) = 0,$$
$$W_{n-k-1}(t,0) = W_{n-k-1}(t) \equiv$$
$$\equiv diag\{\lambda_{k+1}(t), ..., \lambda_{n-1}(t)\}.$$

Як і раніше, будуємо систему, що аналогічна (8), (9),

$$\varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dz_1}{dt} = e(t,\varepsilon)z_1 + \varepsilon D_1(t,\varepsilon)z_1 +$$
$$+\varepsilon D_2(t,\varepsilon)z_2 + \varepsilon D_3(t,\varepsilon)z_3 + F_1(t,\varepsilon)[z_1] +$$
$$+F_2(t,\varepsilon)[z_2] + F_3(t,\varepsilon)[z_3] + w_1(z,[z],t,\varepsilon), \tag{21}$$
$$\varepsilon\frac{dz_2}{dt} = (E_k^{-1}(t,\varepsilon)W_k(t,\varepsilon) + \varepsilon D_5(t,\varepsilon))z_2 +$$
$$+\varepsilon D_4(t,\varepsilon)z_1 + \varepsilon D_6(t,\varepsilon)z_3 + F_4(t,\varepsilon)[z_1] +$$
$$+F_5(t,\varepsilon)[z_1] + F_6(t,\varepsilon)[z_1] + w_2(z,[z],t,\varepsilon), \tag{22}$$
$$\varepsilon\frac{dz_3}{dt} = W_{n-k-1}(t)z_3 + \varepsilon D_7(t,\varepsilon)z_1 +$$
$$+\varepsilon D_8(t,\varepsilon)z_2 + (E_{n-k-1}^{-1}(t,\varepsilon)W_{n-k-1}(t,\varepsilon) -$$
$$-W_{n-k-1}(t) + \varepsilon D_9(t,\varepsilon))z_3 + F_7(t,\varepsilon)[z_1] +$$
$$+F_8(t,\varepsilon)[z_2] + F_9(t,\varepsilon)[z_3] + w_3(z,[z],t,\varepsilon), \tag{23}$$

де $D_i(t,\varepsilon)$, $F_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,9}$, – прямокутні матриці відповідних розмірів; z_1 та w_1 – перші компоненти векторів z та w, z_2 та w_2 – k-вимірні вектори, що містять k компонент z та w, починаючи з другої, z_3 та w_3 – $(n-k-1)$-вимірні вектори, що містять решту компонент z та w.

Припустимо, що має місце умова 6. Тоді із системи (21) – (23) дістаємо

$$z_1(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}\frac{1}{b(s,\varepsilon)}(\Psi_1(s,\varepsilon)\times$$

$$\times(\Psi_1^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-1)\Psi_1^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}(\varepsilon D_1(s,\varepsilon)z_1+$$
$$+\varepsilon D_2(s,\varepsilon)z_2+\varepsilon D_3(s,\varepsilon)z_3+F_1(s,\varepsilon)[z_1]+$$
$$+F_2(s,\varepsilon)[z_2]+F_3(s,\varepsilon)[z_3]+w_1(z,[z],s,\varepsilon))ds, \tag{24}$$

$$z_2(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}(\Psi_k(s,\varepsilon)(\Psi_k^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-$$
$$-E_k)\Psi_k^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}(\varepsilon D_4(s,\varepsilon)z_1+\varepsilon D_6(s,\varepsilon)z_3+$$
$$+F_4(s,\varepsilon)[z_1]+F_5(s,\varepsilon)[z_2]+F_6(s,\varepsilon)[z_3]+$$
$$+w_2(z,[z],s,\varepsilon))ds, \tag{25}$$

$$z_3(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}(\Psi_{n-k-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times(\Psi_{n-k-1}^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-E_{n-k-1})\Psi_{n-k-1}^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}\times$$
$$\times(\varepsilon D_7(s,\varepsilon)z_1+\varepsilon D_8(s,\varepsilon)z_2+(E_{n-k-1}^{-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times W_{n-k-1}(s,\varepsilon)-W_{n-k-1}(s)+\varepsilon D_9(s,\varepsilon))z_3+$$
$$+F_7(s,\varepsilon)[z_1]+F_8(s,\varepsilon)[z_2]+F_9(s,\varepsilon)[z_3]+$$
$$+w_3(z,[z],s,\varepsilon))ds, \tag{26}$$

де функція $\Psi_1(t,\varepsilon)$ визначена раніше, $\Psi_k(t,\varepsilon)$ та $\Psi_{n-k-1}(t,\varepsilon)$ – фундаментальні матриці відповідно систем

$$\varepsilon\frac{dz_2}{dt}=(E_k^{-1}(t,\varepsilon)W_k(t,\varepsilon)+\varepsilon D_5(t,\varepsilon))z_2,$$
$$\Psi_k(\varepsilon,\varepsilon)=E_k,$$

та

$$\varepsilon\frac{dz_3}{dt}=W_{n-k-1}(t)z_3,\ \Psi_{n-k-1}(\varepsilon,\varepsilon)=E_{n-k-1}.$$

Припустимо виконання таких умов:

14. $||(\Psi_k(s,\varepsilon)(\Psi_k^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-E_k)\times$ $\times\Psi_k^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}||\le d,\ t\le s\le t+T,\ t\in[\varepsilon;T]$.

15. $||F_i(t,\varepsilon)||\le c\left(\exp\left(-\dfrac{\alpha t}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\right)$, $\alpha>0,\ i=\overline{4,6},\ t\in[\varepsilon;T]$.

16. $c\max\limits_{0\le t\le T}\left\{\dfrac{|b_1(t,0)|}{\operatorname{Re}b_1(t,0)},\dfrac{1}{c_+},\dfrac{1}{|c_-|}\right\}<\dfrac{1}{3}$, $cd\left(5T+\dfrac{3}{\alpha}\right)<1$, де сталі c_+, c_- визначаються для матриці $\Psi_{n-k-1}(t,\varepsilon)$; $||D(t,\varepsilon)||\le c$, $||F(t,\varepsilon)||\le c,\ t\in[\varepsilon;T]$.

Тоді оператор, визначений за допомогою (24) – (26), відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (24) – (26) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [9]. Таким чином справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай $B(t)\in C^{m+2}[-T;T]$, $f(x,[x],t,\varepsilon)\in C^{m+2}(V_1)$ і виконуються умови 1, 3, 6, 8 – 16. Тоді існує таке ε_1, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що система (1) на відрізку $[\varepsilon;T]$ для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$ має єдиний T-періодичний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$, для якого справджується оцінка (15).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. – 1949. – **4**, N5 (33). – С. 99-141.

2. *Васильева А.Б., Родионов А.М.* Применение метода возмущений к уравнению с запаздывающим аргументом в случае малого запаздывания // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1968. – **1**. – С. 20-27.

3. *Рябов Ю.А.* Метод малого параметра в теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1962. – **1**. – С. 103-113.

4. *Курдеванидзе Г.Д.* О периодическом режиме движения управляемого объекта с малым запаздыванием. Автоматическое управление // Труды XIII:I, Институт систем и управления, АН ГССР, Тбилиси. – 1974. – С. 168-181.

5. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.

6. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Выща шк., 1989. – 287 с.

7. *Sibuya Y.* Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point // Funkcialaj Ekvacioj. – 1962. – **4**. – P. 29-56.

8. *Самусенко П.Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь з виродженнями. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 343 с.

9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

10. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М.: Изд-во Моск. унив., 1978. – 107 с.

УДК 517.988.6

©2013 р. В. Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

ДОСЛІДЖЕННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ, ЩО НЕ ВИКОРИСТОВУЄ $\mathcal{H}$-КЛАСИ ЦИХ РІВНЯНЬ

Отримано умови існування майже періодичних розв'язків лінійних і нелінійних майже періодичних різницевих рівнянь, що не використовують $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь.

We obtain conditions for the existence of almost periodic solutions of linear and nonlinear almost periodic difference equations which does not use $\mathcal{H}$-classes of these equations.

1. Основні позначення та задача. Нехай $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел, $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел і E – довільний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E.$$

Визначимо оператор зсуву $S_h : C^0 \to C^0$, $h \in \mathbb{R}$, рівностями

$$(S_h x)(t) = x(t+h),\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Елемент $y \in C^0$ називається *майже періодичним* (див., наприклад, [1,2]), якщо замикання множини $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^0 є компактною підмножиною цього простору.

Позначимо через B^0 банаховий простір майже періодичних елементів простору C^0 з нормою

$$\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}.$$

Нехай Ω – область простору E, тобто відкрита зв'язна множина простору E, і $\mathcal{K}$ – множина всіх непорожніх зв'язних компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо неперервне відображення $F : \mathbb{R} \times \Omega^{m+1} \to E$, де $m \in \mathbb{Z}_+$, що задовольняє умови:

1) векторна функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_m)$ рівномірно неперервна по $x_0, x_1, \ldots, x_m$ на кожній множині $\mathbb{R} \times K^{m+1}$, де $K \in \mathcal{K}$;

2) векторна функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_m)$ майже періодична по t рівномірно по $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ на кожній множині K^{m+1}, де $K \in \mathcal{K}$.

Неважко показати, що аналогічно, як і в [2, с. 428–429], для кожної множини $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ x_i\in K,\ i=\overline{0,m}}} \|F(t, x_0, x_1, \ldots, x_m)\|_E < +\infty$$

і для кожної послідовності $(h_k)_{k\geqslant 1}$, $h_k \in \mathbb{R}$, існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geqslant 1}$, для якої послідовність $(F(t + h_{k_l}, x_0, x_1, \ldots, x_m))_{l\geqslant 1}$ рівномірно збігається на $\mathbb{R} \times K^{m+1}$.

Будемо вважати, що послідовність $(F(t + h_{k_l}, x_0, x_1, \ldots, x_m))_{l\geqslant 1}$ рівномірно збігається на кожній множині $\mathbb{R} \times K^{m+1}$, $K \in \mathcal{K}$, і відображення $G : \mathbb{R} \times \Omega^{m+1} \to E$, що визначається співвідношенням

$$G(t, x_0, x_1, \ldots, x_m) = \\ = \lim_{l\to\infty} F(t + h_{k_l}, x_0, x_1, \ldots, x_m), \tag{2}$$

задовольняє умови 1 і 2. Ця вимога виконується, якщо, наприклад, простір E є скінченновимірним, що перевіряється аналогічним чином як і в [2] у випадку $m = 0$. Зауважимо, що в статті ця вимога буде виконувати допоміжну роль при викладенні матеріалу і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Розглянемо різницеве рівняння

$$F(t, x(t), x(t - \Delta_1), \ldots, x(t - \Delta_m)) = 0, \tag{3}$$

де відхилення аргументів $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ є довільними дійсними числами (одні відхилення можуть бути додатними, інші – від'ємними).

$\mathcal{H}$*-класом* рівняння (3) називається множина всіх різницевих рівнянь

$$G(t, y(t), y(t-\Delta_1), \ldots, y(t-\Delta_m)) = 0,$$

ліва частина яких визначається за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов майже періодичності обмежених розв'язків рівняння (3) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Зазначимо, що не кожний обмежений розв'язок рівняння (3) є майже періодичним. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад. Нехай $E = \mathbb{R}$. Визначимо відображення $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ рівністю

$$H(t, x_0, x_1) =$$

$$= \sin t \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x_0| + |x_1| \leqslant 1, \\ |x_0| + |x_1| - 1, & \text{якщо } |x_0| + |x_1| > 1, \end{cases}$$

що, як і відображення F, задовольняє умови 1 і 2. Очевидно, що кожна неперервна функція $x = x(t)$, для якої $|x(t)| \leqslant 1/2$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком різницевого рівняння

$$H(t, x(t), x(t-1)) = 0.$$

Зауважимо, що у випадку $m = 0$ рівняння (3) має вигляд

$$F(t, x(t)) = 0. \tag{4}$$

Це рівняння досліджувалося в [3].

При дослідженні рівняння (3) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння, замикання множин значень яких є елементами з $\mathcal{K}$.

2. Функціонал Δ.

Позначимо через $\mathcal{N}(F, K)$ множину всіх обмежених розв'язків $x = x(t)$ рівняння (3), для кожного з яких замикання $\overline{R(x)}$ множини

$$R(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

у просторі E є підмножиною множини $K \in \mathcal{K}$ і

$$\overline{R(x)} \neq K. \tag{5}$$

Зафіксуємо довільні множину $K \in \mathcal{K}$ і розв'язок $x^* \in \mathcal{N}(F, K)$ рівняння (3). Вважаємо, що

$$\mathcal{N}(F, K) \neq \varnothing.$$

Покладемо

$$r(x^*, K, F) =$$
$$= \sup \left\{ \|x - y\|_E : x \in \overline{R(x^*)},\ y \in K \right\}.$$

На підставі (5)

$$r(x^*, K, F) > 0.$$

Для $\varepsilon \in [0, r(x^*, K, F)]$ розглянемо множину $\Omega(x^*, K, F, \varepsilon)$ всіх елементів $y \in C^0$, для кожного з яких

$$x^*(t) + y(t) \in K$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$ і

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \left| \|y(t)\|_E - \varepsilon \right| = 0.$$

Аналогічним чином можна визначити множину $\Omega(z, K, F, \varepsilon)$ для будь-якої іншої функції $z \in C^0$, для якої $R(z) \subset K$.

Розглянемо функціонал

$$\Delta(x^*, K, F, \varepsilon) =$$
$$= \inf_{y \in \Omega(x^*, K, F, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \| F(t, x^*(t) + y(t),$$
$$x^*(t-\Delta_1) + y(t-\Delta_1), \ldots,$$
$$x^*(t-\Delta_m) + y(t-\Delta_m)) \|_E. \tag{6}$$

Застосування функціонала Δ до дослідження майже періодичних нелінійного рівняння (3) та аналогічного лінійного рівняння наведемо в наступних пунктах.

3. Основний результат.

Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (3), в яких на відміну від відомих теореми Фавара про майже періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь [4] та теореми Аменіо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь [2,5] не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (3).

Теорема 1. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $z \in \mathcal{N}(F, K)$ рівняння* (3) *і деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, F, \varepsilon) > 0 \tag{7}$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(F,K)$ рівняння (3) не є елементом простору B^0. Тоді за компактністю множини K існує збіжна в точці $t=0$ послідовність $(z(t+h_p))_{p\geqslant 1}$, причому довільна її підпослідовність $(z(t+k_p))_{p\geqslant 1}$ не збігається рівномірно на $\mathbb{R}$. Отже,

$$\lim_{p,q\to\infty} \|z(h_p)-z(h_q)\|_E = 0 \qquad (8)$$

та існують послідовності $(p_r)_{r\geqslant 1}$, $(q_r)_{r\geqslant 1}$ і число $\gamma \in (0,\delta)$, для яких

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t+k_{p_r})-z(t+k_{q_r})\|_E > \gamma,\ r\geqslant 1. \quad (9)$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $(F(t+k_p,x_0,x_1,\ldots,x_m))_{p\geqslant 1}$ – рівномірно збіжна на $\mathbb{R}\times K^{m+1}$ послідовність. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ x_i\in K,\ i=\overline{0,m}}} \|F(t+k_p,x_0,x_1,\ldots,x_m)-$$

$$-F(t+k_q,x_0,x_1,\ldots,x_m)\|_E = 0. \qquad (10)$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon_0 \in (0,\gamma]$. На підставі (8) і (9) для функцій

$$y_r(t) = z(t+k_{p_r}) - z(t+k_{q_r}),\ r\geqslant 1,$$

виконується співвідношення

$$y_r \in \Omega(S_{k_{q_r}}z,K,F,\varepsilon_0),\ r\geqslant 1, \qquad (11)$$

де S_h – оператор зсуву, що визначається співвідношенням (1).

Покажемо, що

$$\Delta(z,K,F,\varepsilon_0) = 0. \qquad (12)$$

Завдяки (6), (11) та того, що

$$F(t+k_{p_r},z(t+k_{p_r}),z(t+k_{p_r}-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{p_r}-\Delta_m)) \equiv 0,\ r\geqslant 1,$$

виконуються співвідношення

$$\Delta(z,K,F,\varepsilon_0) =$$

$$= \inf_{y\in\Omega(z,K,F,\varepsilon_0)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t,z(t)+y(t),z(t-\Delta_1)+$$

$$+y(t-\Delta_1),\ldots,z(t-\Delta_m)+y(t-\Delta_m))\|_E =$$

$$= \inf_{y\in\Omega(S_{k_{q_r}}z,K,F,\varepsilon_0)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+k_{q_r},z(t+k_{q_r})+$$

$$+y(t),z(t+k_{q_r}-\Delta_1)+y(t-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{q_r}-\Delta_m)+y(t-\Delta_m))\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+k_{q_r},z(t+k_{q_r})+y_r(t),$$

$$z(t+k_{q_r}-\Delta_1)+y_r(t-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{q_r}-\Delta_m)+y_r(t-\Delta_m))\|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+k_{q_r},z(t+k_{p_r}),z(t+k_{p_r}-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{p_r}-\Delta_m))\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+k_{p_r},z(t+k_{p_r}),z(t+k_{p_r}-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{p_r}-\Delta_m))\|_E +$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+k_{p_r},z(t+k_{p_r}-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{p_r}-\Delta_m))-$$

$$-F(t+k_{q_r},z(t+k_{p_r}-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{p_r}-\Delta_m))\|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+k_{p_r},z(t+k_{p_r}-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{p_r}-\Delta_m))-$$

$$-F(t+k_{q_r},z(t+k_{p_r}-\Delta_1),\ldots,$$

$$z(t+k_{p_r}-\Delta_m))\|_E,$$

з яких на підставі (10) випливає співвідношення (12), що суперечить (7).

Таким чином, припущення, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(F,K)$ рівняння (3) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

4. Випадок лінійного рівняння (3). Застосуємо теорему 1 до дослідження лінійних майже періодичних різницевих рівнянь.

Позначимо через $L(E,E)$ – банаховий простір всіх лінійних неперервних операторів $A: E\to E$ з нормою

$$\|A\|_{L(E,E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

Розглянемо неперервне відображення $F_1 : \mathbb{R} \times E^{m+1} \to E$, що визначається рівністю

$$F_1(t, x_0, x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=0}^{m} A_k(t)x_k + h(t),$$

де $A_k(t)$, $k = \overline{0,m}$, – неперервні і майже періодичні на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E, E)$ і $h \in B^0$. Також розглянемо відповідне лінійне різницеве рівняння

$$\sum_{k=0}^{m} A_k(t)x(t - \Delta_k) + h(t) = 0, \qquad (13)$$

де $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – довільні дійсні числа, серед яких можуть бути як додатні, так і від'ємні числа, і $\Delta_0 = 0$. Очевидно, що рівняння (13) є окремим випадком рівняння (3).

Зазначимо, що в рівнянні (13) оператори $A_k(t)$, $k = \overline{0,m}$, $t \in \mathbb{R}$, можуть не мати обернених неперервних операторів. Якщо ці оператори мають обернені неперервні оператори, то операторні функції $A_k^{-1}(t)$, $k = \overline{0,m}$, можуть не бути майже періодичними.

На підставі теореми 1 справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо лінійне рівняння* (13) *має обмежений розв'язок $z \in \mathcal{N}(F_1, K)$ і для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, F_1, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауважимо, що у випадку $\dim E < \infty$ більш загальні рівняння, ніж (13), з довільним $h \in C^0$ досліджувалися автором у [6].

5. Застосування теорем 1 і 2. Використаємо теореми 1 і 2 до дослідження майже періодичних нелінійних диференціальних рівнянь та лінійних операторних різницевих рівнянь.

5.1. Диференціальні рівняння. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x), \qquad (14)$$

в якому відображення $h : \mathbb{R} \times E \to E$ є неперервним.

Вважатимемо, що для кожних числа $t_0 \in \mathbb{R}$ і вектора $x_0 \in E$ рівняння (14) має єдиний розв'язок $x = x(t)$, що задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = x_0. \qquad (15)$$

Умови виконання цієї вимоги можна знайти в [7, 8].

Розв'язок задачі (14), (15) позначимо через $x = x(t, t_0, x_0)$.

Визначимо відображення $U : \mathbb{R} \times E \to E$ за допомогою співвідношення

$$U(t, y) = x(t + 1, t, y), \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times E. \quad (16)$$

Очевидно, що кожний визначений на $\mathbb{R}$ розв'язок $y = y(t)$ диференціального рівняння (14) задовольняє співвідношення

$$y(t + 1) = x(t + 1, t, y(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

тобто на підставі (16) є розв'язком різницевого рівняння

$$x(t + 1) = U(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (17)$$

що є окремим випадком рівняння (3). Тому рівняння (17) можна використати для дослідження обмежених розв'язків диференціального рівняння (14).

Різницевому рівнянню (17) співставимо відображення $F_2 : \mathbb{R} \times E^2 \to E$, що визначається рівністю

$$F_2(t, x_0, x_1) = x_1 - U(t, x_0),$$

і є аналогічним відображенню F. Очевидно, що різницеве рівняння (17) можна подати у вигляді

$$F_2(t, x(t), x(t + 1)) = 0.$$

Завдяки наведеним міркуванням та теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай:*

1) диференціальне рівняння (14) *має обмежений розв'язок $z \in C^0$ зі значеннями в компактній множині $K \in \mathcal{K}$;*

2) відображення $F_2 : \mathbb{R} \times E \to E$ задовольняє умови 1 і 2 (як і відображення F у різницевому рівнянні (3)*);*

3) для деяких числа $\delta > 0$ і множини $K \in \mathcal{K}$ виконується співвідношення

$$\Delta(z, K, F_2, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Тоді обмежений розв'язок z рівняння (14) *є майже періодичним.*

Зауважимо, що це твердження отримано вперше в [9] з використанням окремого випадку теореми 1.

5.2. Лінійні операторні різницеві рівняння. Нехай $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ - довільні банахові простори і $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів $A : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ з нормою

$$\|A\|_{L(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{E}_1}=1} \|Ax\|_{\mathcal{E}_2}.$$

Будемо вважати, що $\Omega = L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ і $\mathcal{K}$ є множиною всіх непорожніх зв'язних компактних підмножин $K \subset L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Розглянемо неперервне відображення

$$F_3 : \mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m+1} \to \mathcal{X},$$

де $\mathcal{X} = L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, що визначається рівністю

$$F_3(t, X_0, X_1, \dots, X_m) = \\ = \sum_{k=0}^{m} A_k(t) X_k B_k(t) - H(t),$$

де $A_k(t)$, $k = \overline{0, m}$, – неперервні і майже періодичні на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2)$, $B_k(t)$, $k = \overline{0, m}$, – неперервні і майже періодичні на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1)$ і $H(t)$ – неперервна і майже періодична на $\mathbb{R}$ функція зі значеннями в $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Також розглянемо відповідне лінійне операторне різницеве рівняння

$$\sum_{k=0}^{m} A_k(t) X(t - \Delta_k) B_k(t) = H(t), \qquad (18)$$

де $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – довільні дійсні числа і $\Delta_0 = 0$.

Очевидно, що рівняння (18) є окремим випадком рівнянь (3) і (13) у випадку $E = L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

У рівнянні (18) оператори $A_k(t)$ і $B_k(t)$, $k = \overline{0, m}$, $t \in \mathbb{R}$, можуть не мати обернених неперервних операторів.

На підставі теорем 1 і 2 справджується наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо різницеве рівняння* (18) *має неперервний і обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок $Z = Z(t)$ зі значеннями в K і для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(Z, K, F_3, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

5.3. Застосування теореми 1 у випадку $m = 0$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(t, \frac{dx(t)}{dt} - g(t, x(t))\right) = 0, \qquad (19)$$

де F – відображення, що й у рівнянні (3) (при $m = 0$), а неперервне відображення $g : \mathbb{R} \times \Omega \to E$ є таким, що:

а) векторна функція $g(t, x)$ рівномірно неперервна по x на кожній множині $\mathbb{R} \times K$, де $K \in \mathcal{K}$;

б) векторна функція $g(t, x)$ майже періодична по t рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Викладемо ідею одного методу з'ясування майже періодичності обмежених розв'язків диференціального рівняння (19) з використанням теореми 1.

Якщо $v = v(t)$ є розв'язком цього рівняння і $R(v) \subset K_1$, де $K_1 \in \mathcal{K}$, то на підставі умов а) і б) функція $h = h(t)$, що визначається рівністю

$$h(t) = \frac{dv(t)}{dt} - g(t, v(t)),$$

є обмеженою і $R(h) \subset K_2$ для деякої множини $K_2 \in \mathcal{K}$. Отже, $h = h(t)$ є розв'язком рівняння (4). У цьому випадку до (4) можна застосувати теорему 1 при $m = 0$, $K = K_2$ і

$z = h$. Вважатимемо, що умови цієї теореми виконуються. Тоді функція $h = h(t)$ є майже періодичною і до майже періодичного диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} - g(t, x(t)) = h(t),$$

що має обмежений розв'язок $x = v$, можна застосувати результати досліджень статті [10] (у випадку $f(t, x) = g(t, x) + h(t)$) і показати майже періодичність v (при додаткових вимогах до f).

На завершення, зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків різницевих рівнянь та їх застосування в п. 5.2 і 5.3 є новими, оскільки не використовують $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь.

Також зазначимо, що дослідженням майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо деякі з них. Для лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [4], а для нелінійних диференціальних рівнянь – Амеріо в роботі [5]. Результати Фавара були значно покращені Е. Мухамадієвим [11, 12]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [13–15]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [1], Амеріо [16], В. В. Жикову [17–19], Шубину М. А. [20] та Финку [21].

Функціонал, аналогічний функціоналу Δ, використовувався автором для дослідження майже періодичних лінійних і нелінійних різницевих рівнянь із неперервним аргументом [9], диференціальних рівнянь [10], а також рівняння (4) [3].

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь (вимога існування таких розв'язків у теоремі 1 є суттєвою) можна отримати, використовуючи статті [22–26].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь// Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, № 1–2. – С. 136–138.
4. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31–81.
5. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.
6. *Слюсарчук В. Е.* К теории обратимости почти периодических операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 1. – С. 50–59.
7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
8. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 1. – С. 118–124.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307–312.
11. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269–274.
12. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443–460.
13. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**(158), № 4(12). – С. 483–501.
14. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**(172), № 1(5). – С. 86–104.
15. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262–267.
16. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. – 1960. – **30**. – P. 288–301.
17. *Жиков В. В.* Об одном дополнении к классической теории Фавара // Мат. заметки. – 1970. – **7**, № 2. – С. 239–246.
18. *Жиков В. В.* Существование почти периодических по Левитану решений линейных систем (2-е

дополнение к классической теории Фавара) // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 4. – С. 409–414.

19. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121–126.

20. *Шубин М. А.* Почти периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук. – 1978. – **28**, № 2. – С. 3–47.

21. *Fink A. M.* Semi-separated conditions for almost periodic solutions // J. Diff. Equat. – 1972. – **11**. – P. 245–251.

22. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Науковий вісник Чернівецького університету, Математика. – 2009. – Випуск 454. – С. 88–94.

23. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 368–378.

24. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 536–555.

25. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 122–126.

26. *Слюсарчук В. Ю.* Нелінійні різницеві рівняння у просторах обмежених двосторонніх послідовностей // Нелінійні коливання – 2012. – **15**, № 4. – С. 528–538.

УДК 517.98

©2013 р. В.М. Статкевич

Національний технічний університет України ”Київський політехнічний інститут”

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО ТИПУ З СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИМ ЕЛІПТИЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

Досліджуються лінійні та квазілінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірним еліптичним оператором (типу Лапласа-Леві). Для квазілінійного рівняння доведена теорема існування та єдиності розв'язку. Також проводиться паралель зі звичайними диференціальними рівняннями та алгебраїчними рівняннями.

We investigate linear and quasi-linear differential equations with essentially infinite-dimensional elliptic operator (of the Laplace-Lévy type). For a quasi-linear equation, we prove a theorem on the existence and uniqueness of a solution. Also we obtain a parallel with ordinary differential equations and algebraic equations.

1. Суттєво нескінченновимірні еліптичні оператори. В нескінченновимірному просторі існують оператори, які не мають скінченновимірних аналогів. Таким оператором, зокрема, є оператор Лапласа-Леві, введений П. Леві [1] в 1922 р., як узагальнення класичного оператора Лапласа. Для двічі диференційовних функцій на дійсному гільбертовому просторі l_2 оператор Лапласа-Леві задається формулою

$$(Lu)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

а для функцій на абстрактному дійсному нескінченновимірному сепарабельному гільбертовому просторі H

$$(Lu)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr} P_n u''(x),$$

де $\{e_i\}$ – ортонормований базис в H, P_n – ортопроектор на лінійну оболонку $e_1, \ldots, e_n$, tr – слід оператора. Такий оператор є диференціальним оператором другого порядку, але він задовольняє лейбніцевську властивість $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ та приймає нульове значення на циліндричних функціях; останній факт дав підставу Г.Є. Шилову, редактору перекладу [1], назвати його суттєво нескінченновимірним. Сучасний стан теорії оператора Лапласа-Леві викладено в монографії М.Н. Феллера [2].

В 1977 р. Ю.В. Богданським [3] (див. також [4—5]) запропонований суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор, який узагальнює оператор Лапласа-Леві та успадковує його специфічні властивості. Такий оператор (точніше, диференціальний вираз) задається формулою

$$(Lu)(x) = j(u''(x)), \tag{1}$$

де j є невід'ємним ненульовим функціоналом на $B_C(H)$, ядру якого належать всі оператори скінченного рангу. Відповідний функціонал згідно з роботою [3] також називаємо суттєво нескінченновимірним (за іншою термінологією – сингулярним).

Множину $D \subset B_C(H)$ називаємо майже компактною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують компактна множина $K \subset B_C(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$ та $d > 0$ такі, що $K + Q_{n,d}$ є ε-сіткою для D (тут $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ – множина операторів, ранг яких не перевищує n, а норма не перевищує d).

Нехай $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant R\}$ – фіксована куля радіуса R. Через Z позначимо множину дійсних функцій класу $C^2(H)$, носії яких належать кулі B_R, $u''(\cdot)$ є рівномірно неперервною на H, а множина $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ є майже компактною. Нехай X – замикання Z в просторі $C^b(H)$ (тут $C^b(H)$ – банахів простір неперервних обмежених функцій на H з нормою $\sup_{x\in H} |u(x)|$). X є дійсною комутативною банаховою алгеброю відносно поточкових операцій з sup-нормою. З $u \in Z$ випливає $Lu \in X$; суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор L коректно визначений на Z формулою (1). Він допускає замикання $\bar{L}$, яке породжує (C_0)-півгрупу стиску $T(t)$ в X [4—5]. Ця півгрупа є мультиплікативною ($\forall u, v \in X,\ \forall t \geqslant 0\colon T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v$) та нільпотентною ($\exists t_0 > 0\colon T(t_0) = 0$). Для функції $g \in C^1(\mathbb{R})$ такої, що $g(0) = 0$, має місце властивість

$$\bar{L}(g \circ u) = (g' \circ u) \cdot \bar{L}u. \qquad (2)$$

Ймовірнісні властивості оператора Лапласа-Леві досліджувались М.Й. Ядренком, М.Н. Феллером і школою Т. Хіди. С.В. Кошкіним вивчались ймовірнісні аспекти характерів Леві з точки зору випадкових процесів та зв'язок з теорією білого шуму та статистичною механікою (1998—1999 рр.). Зацікавленість оператором Лапласа-Леві на даний час в значній мірі обумовлена роботами Л. Аккарді, П. Гібіліско, І.В. Воловича (1992, 1994 рр.), а також Р. Леандра, І.В. Воловича (2001 р.), у яких виявлено зв'язок між гармонічними за Леві функціями та розв'язками рівнянь Янга-Міллса. Детальна бібліографія наведена в [2]. Також зауважимо, що існує паралель між диференціальними рівняннями з суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами та класичною теорією звичайних диференціальних рівнянь (див. [6—8]); для рівнянь з оператором типу Лапласа-Леві така паралель відслідковувалась Є.М. Поліщуком, Г.Є. Шиловим та В.Я. Сикирявим.

2. Диференціальні рівняння лінійного типу. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння вищого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$(\bar{L}^n u)(x) + a_1(x)(\bar{L}^{n-1}u)(x) + \ldots + \\ + a_n(x)u(x) = f(x). \qquad (3)$$

Має місце наступна теорема, доведена в [6].

Теорема 1. *Нехай $a_1, \ldots, a_n, f \in X$. Тоді рівняння (3) має і до того ж єдиний розв'язок.*

В інших функціональних просторах рівняння виду (3) з оператором Лапласа-Леві та його модифікаціями досліджувалось Є.М. Поліщуком, Г.Є. Шиловим та В.Я. Сикирявим, а полігармонічне рівняння – М.Н. Феллером.

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння

$$(\bar{L}^n u)(x) + a_1(x)(\bar{L}^{n-1}u)(x) + \ldots + \\ + a_n(x)u(x) = f(x, u(x)), \qquad (4)$$

де $a_1, \ldots, a_n \in X$ – змінні коефіцієнти.

Теорема 2. *Нехай функція $f : H \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має наступні властивості:*

а) для будь-якого $p \in \mathbb{R}$ $f(\cdot, p) \in X$,

б) f задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом рівномірно відносно першого: існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $x \in H$, $p, q \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|f(x,p) - f(x,q)| \leqslant C|p - q|$.

Тоді рівняння (4) має і до того ж єдиний розв'язок.

Доведення. Виберемо в R^n норму $\|\vec{y}\| = |y^1| + \ldots |y^n|$ ($\vec{y} \in \mathbb{R}^n$). Має місце наступний варіант теореми Пікара для системи диференціальних рівнянь з суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами [8, теорема 2].

Теорема 3. *Нехай $i = 1, \ldots, n$; $j_1, \ldots, j_n$ – суттєво нескінченновимірні функціонали; $(L_i u)(x) = j_i(u''(x))$ – відповідні їм суттєво нескінченновимірні еліптичні оператори; функція $\vec{g} = (g^1, \ldots g^n)\colon H \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ має наступні властивості:*

а) для будь-якого $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, $g^i(\cdot, \vec{p}) \in X$,

б) $\vec{g}$ задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом рівномірно відносно першого: існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $x \in H$, $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність $\|\vec{g}(x,\vec{p}) - \vec{g}(x,\vec{q})\| \leqslant C\|\vec{p} - \vec{q}\|$.

Тоді система рівнянь

$$(\bar{L}_i u_i)(x) = g^i(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)), \qquad (5)$$

де $i = 1, \ldots, n$, має і до того ж єдиний розв'язок.

Якщо в теоремі 3 умову а) замінити на умову а') для будь-яких $u_i \in X$ функції $g^i(\cdot, u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ належать X, то теорема 3 також має місце (детальніше див. [8]).

Продовжимо доведення теореми 2. Заміною змінних $v_1 = u \in X, v_2 = \bar{L}u \in$

$X, \dots, v_n = \bar{L}^{n-1}u \in X$ рівняння (4) зводиться до системи виду (5):

$$(\bar{L}v_1)(x) = v_2(x),$$
$$\dots$$
$$(\bar{L}v_{n-1})(x) = v_n(x),$$
$$(\bar{L}v_n)(x) = f(x, v_1(x)) - a_n(x)v_1(x) - \dots -$$
$$-a_1(x)v_n(x).$$

Виберемо функцію $\vec{g}\colon H \times \mathbb{R}^n \ni (x, \vec{p}) \mapsto (p^2, \dots, p^n, f(x, p^1) - a_n(x)p^1 - \dots - a_1(x)p^n) \in \mathbb{R}^n$. Перевіримо умови а') та б) теореми 3. Умова а') теореми 3 випливає з того, що за умов а)–б) теореми 2 з $u \in X$ випливає $f(\cdot, u(\cdot)) \in X$ (див. [7]), а X є алгеброю. Умова б) теореми 3 випливає з нерівності

$$\|\vec{g}(x, \vec{p}) - \vec{g}(x, \vec{q})\| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |g^k(x, \vec{p}) - g^k(x, \vec{q})| = \sum_{k=2}^{n} |p^k - q^k| +$$
$$+|(f(x, p^1) - a_n(x)p^1 - \dots - a_1(x)p^n) -$$
$$-(f(x, q^1) - a_n(x)q^1 - \dots - a_1(x)q^n)| \leqslant$$
$$\leqslant \max(1 + \|a_1\|, \dots, 1 + \|a_{n-1}\|, C + \|a_n\|) \times$$
$$\times \|\vec{p} - \vec{q}\| \quad (\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n).$$

Посилання на теорему 3 з умовами а') та б) завершує доведення теореми.

3. Приклади. Спочатку нагадаємо два відомі факти. В алгебраїчному рівнянні $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = f$, де $a_1, \dots, a_n, f \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, заміна $x = y - \frac{a_1}{n}$ приводить до того, що в отриманому рівнянні коефіцієнт при y^{n-1} виявиться нульовим. Якщо у звичайному лінійному диференціальному рівнянні

$$u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \dots +$$
$$+a_{n-1}(x)u'(x) + a_n(x)u(x) = f(x),$$

де $a_1, \dots, a_n, f$ – неперервні на деякому відрізку функції, зробити заміну $u(x) = v(x)\exp\Bigl(-\frac{1}{n}\int a_1(x)dx\Bigr)$, то в отриманому рівнянні коефіцієнт при $u^{(n-1)}(\cdot)$ також стане нульовим. Наведемо аналоги вказаних фактів для суттєво нескінченновимірних рівнянь другого та третього порядку.

Приклад 1. Доведемо, що для рівняння

$$(\bar{L}^2u)(x) + a_1(x)(\bar{L}u)(x) +$$
$$+a_2(x)u(x) = f(x), \tag{6}$$

де a_1 задовольняє додаткову умову $a_1 \in D(\bar{L})$, а $a_2, f \in X$, заміна

$$u(x) = v(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) \tag{7}$$

перетворює рівняння (6) на таке, що не містить $\bar{L}v$.

Другий множник у правій частині формули (7) не належить X, оскільки за межами кулі B_R дорівнює одиниці, а тому має необмежений носій. Запишемо (7) у вигляді

$$u(x) = v(x) +$$
$$+v(x)\Biggl(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) - 1\Biggr).$$

Врахуємо лейбніцевську властивість оператора $\bar{L}$, властивість (2) та нільпотентність півгрупи $T(t)$:

$$(\bar{L}u)(x) = (\bar{L}v)(x) +$$
$$+(\bar{L}v)(x)\Biggl(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) - 1\Biggr) +$$
$$+\frac{1}{2}v(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) \times$$
$$\times \int_0^{t_0}\frac{\partial}{\partial t}(T(t)a_1)(x)dt =$$
$$= \left((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2}a_1(x)v(x)\right) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right). \tag{8}$$

Формулу (8) застосуємо рекурсивно до себе:

$$(\bar{L}^2u)(x) = \Biggl(\bar{L}\left((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2}a_1(x)v(x)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}a_1(x)\left((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2}a_1(x)v(x)\right)\Biggr) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) = \Bigl((\bar{L}^2v)(x) -$$
$$-a_1(x)(\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2}(\bar{L}a_1)(x)v(x) + \frac{1}{4}a_1^2(x) \times$$

$$\times v(x)\Bigg)\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right). \qquad (9)$$

Підстановка формул (7)-(9) у рівняння (6) та наступне спрощення приводять до рівняння:

$$(\bar{L}^2v)(x)+\left(a_2(x)-\frac{1}{2}(\bar{L}a_1)(x)-\frac{1}{4}a_1^2(x)\right)\times$$

$$\times v(x)=f(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right).$$

Підкреслимо, що наведені перетворення можливі лише за умови $a_1\in D(\bar{L})$.

Приклад 2. Доведемо, що для рівняння

$$(\bar{L}^3u)(x)+a_1(x)(\bar{L}^2u)(x)+a_2(x)(\bar{L}u)(x)+$$
$$+a_3(x)u(x)=f(x), \qquad (10)$$

де a_1 задовольняє додаткову умову $a_1 \in D(\bar{L}^2)$, а $a_2,a_3,f\in X$, заміна

$$u(x)=v(x)\exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right)$$

перетворює рівняння (10) на таке, що не містить $\bar{L}^2v$.

Аналогічними міркуваннями отримуємо:

$$(\bar{L}u)(x)=\left((\bar{L}v)(x)-\frac{1}{3}a_1(x)v(x)\right)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right);$$

$$(\bar{L}^2u)(x)=\Bigg((\bar{L}^2v)(x)-\frac{2}{3}a_1(x)(\bar{L}v)(x)-$$

$$-\frac{1}{3}(\bar{L}a_1)(x)v(x)+\frac{1}{9}a_1^2(x)v(x)\Bigg)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right);$$

$$(\bar{L}^3u)(x)=\Bigg((\bar{L}^3v)(x)-a_1(x)(\bar{L}^2v)(x)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}a_1^2(x)-(\bar{L}a_1)(x)\right)(\bar{L}v)(x)+\Bigg(\frac{1}{3}a_1(x)\times$$

$$\times(\bar{L}a_1)(x)-\frac{1}{3}(\bar{L}^2a_1)(x)-\frac{1}{27}a_1^3(x)\Bigg)v(x)\Bigg)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right).$$

Підстановка наведених формул у рівняння (10) та наступне спрощення приводять до рівняння, що не містить $\bar{L}^2v$.

Викладені в роботі результати були представлені на Всеукраїнській науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа.— М.: Наука, 1967.— 512 с.

2. *Feller M.N.* The Lévy Laplacian.— Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005.— 153 p.

3. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, №6.— С. 781—784.

4. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, №5.— С. 584—590.

5. *Bogdansky Yu.V., Dalecky Yu.L.* Cauchy problem for the simpliest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator // Suppl. to chapters IV, V in book: *Dalecky Yu.L., Fomin S.V.* Measures and differential equations in infinite-dimensional space.— Amsterdam—New York: Kluwer Acad. Publ., 1991.— P. 309—322.

6. *Богданський Ю.В., Статкевич В.М.* Лінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірними операторами // Наукові вісті НТУУ "КПІ".— 2008.— №2.— С. 144—147.

7. *Богданський Ю.В., Статкевич В.М.* Нелінійні рівняння з суттєво нескінченновимірними диференціальними операторами // Укр. мат. журн.— 2010.— **62**, №11.— С. 1571—1576.

8. *Статкевич В.М.* Системи суттєво нескінченновимірних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн.— 2011.— **63**, №9.— С. 1257—1262.

9. *Статкевич В.М.* Суттєво нескінченновимірні диференціальні рівняння лінійного типу // Всеукраїнська наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці", Чернівці, 11—13 червня 2012 р.— С. 99.

УДК 517.5

©2013 р. С. О. Чайченко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ

ОБЕРНЕНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ОРЛИЧА

Отримано аналог відомої нерівності Бернштейна для $(\psi;\beta)$-похідної відносно метрики вагових просторів Орлича. Використовуючи отриману нерівність, доведено обернені теореми теорії наближення в цих просторах.

We obtain an analog of known Bernstein's inequality for $(\psi;\beta)$-derivative in the metric of weighted Orlicz spaces. With its help we prove inverse theorems of the approximation theory in these spaces.

1. Означення і постановка задачі. Наведемо спочатку деякі відомості з теорії опуклих функцій і вагових просторів Орлича (див. [1, 2]).

Означення 1. *Неперервна опукла функція* $\Phi : \mathbb{R} \mapsto [0;\infty)$ *називається функцією Юнга, якщо* Φ *є парною і задовольняє умови*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=\infty.$$

Означення 2. *Кажуть, що функція Юнга* Φ *задовольняє умову* Δ_2 ($\Phi\in\Delta_2$), *якщо існує стала* $c>0$ *така, що*

$$\Phi(2x)\le c\,\Phi(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Означення 3. *Невід'ємна функція* $M=M(t)$, $t\ge 0$ *називається квазіопуклою функцією Юнга, якщо існує опукла функція Юнга* Φ *і така стала* $c>1$, *що виконується нерівність*

$$\Phi(x)\le M(x)\le \Phi(cx),\quad \forall x\ge 0.$$

Позначимо через $\mathcal{QC}$ множину всіх квазіопуклих функцій Юнга.

Означення 4. *Нехай* $M\in\mathcal{QC}$. *Тоді через* $\tilde{L}_{M,\omega}$ *позначають клас* 2π*-періодичних вимірних за Лебегом функцій* f, *які задовольняють умову*

$$\int\limits_0^{2\pi} M(|f(x)|)\omega(x)dx<\infty,$$

де $\omega(x)$ — 2π*-періодична вимірна і майже скрізь додатна функція (вага), а через* $L_{M,\omega}$ *позначають лінійну оболонку класу* $\tilde{L}_{M,\omega}$.

Множина $L_{M,\omega}$ стає нормованим простором, якщо

$$\|f\|_{M,\omega}:=\sup\left\{\int\limits_0^{2\pi}|f(t)g(t)|\omega(t)\,dt:\right.$$

$$\left.:\quad\int\limits_0^{2\pi}\tilde{M}(|g(t)|)\omega(t)\,dt\le 1\right\},$$

де $\tilde{M}(y):=\sup_{x\ge 0}(xy-M(x))$, $y\ge 0$, — доповнювальна до $M(x)$ функція.

Кажуть, що вагова функція $\omega=\omega(t)$ належить до класу Макенхаупа A_p, $1<p<\infty$, якщо ω є 2π-періодичною і

$$\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\omega(t)\,dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\frac{1}{\omega^{1/(p-1)}(t)}\,dt\right)^{p-1}\le$$

$$\le c,$$

де $[a,b]$ довільний відрізок з $[0,2\pi]$.

Для квазіопуклої функції M визначимо величину

$$\frac{1}{\wp(M)}:=\inf\{\wp:\quad \wp>0,\ M^{\wp}\in\mathcal{QC}\},$$

$$\wp'(M):=\frac{\wp(M)}{\wp(M)-1},$$

яка вперше була введена в роботі [3]. Якщо $\omega\in A_{\wp(M)}$, то $L_{M,\omega}\subset L$, де L — простір 2π-періодичних сумовних на проміжку $[0,2\pi]$

функцій і $L_{M,\omega}$ стає банаховим простором з нормою Орлича. Банахів простір $L_{M,\omega}$ називається ваговим простором Орлича.

Через $\mathcal{QC}_2^\theta$ позначають клас функцій $M = M(t)$, які задовольняють умову Δ_2 і таких, що M^θ є квазіопуклою для довільного $\theta \in (0;1)$.

Нам також знадобиться визначення $(\psi;\beta)$-похідної і множин L_β^ψ, яке належить О.І. Степанцю [4, с. 142 – 143].

Означення 5. *Нехай* $f \in L$ *і*

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x) \qquad (1)$$

— її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi(k)$ *— довільна дійснозначна функція натурального аргументу і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Припустимо, що ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right) \qquad (2)$$

є рядом Фур'є деякої функції з L. *Цю функцію позначають через* $f_\beta^\psi(\cdot)$ *(або* $(D_\beta^\psi f)(\cdot)$*) і називають* $(\psi;\beta)$*-похідною функції* $f(\cdot)$*, а множину функцій* $f(\cdot)$*, у яких існують* $(\psi;\beta)$*-похідні, позначають через* L_β^ψ.

Через $L_\beta^\psi L_{M,\omega}$ будемо позначати множини $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій $f \in L$, для яких $f_\beta^\psi \in L_{M,\omega}$.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина послідовностей дійсних чисел $\psi(k) > 0$, які задовольняють умови:

1. $\psi(k) - \psi(k+1) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$;
3. $\psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) > 0, \quad k \in \mathbb{N}$;

а $\mathfrak{M}'$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} < \infty$.

Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}'$ і $\beta \in \mathbb{R}$, то, як показано в монографії [4, с. 143 – 144], завжди знайдеться функція $f_\beta^\psi \in L^0$, $L^0 := \{\varphi \in L : \ \varphi \perp 1\}$, ряд Фур'є якої співпадає з (2). Відзначимо при цьому, що якщо $f_\beta^\psi \in L_{M,\omega} \cap L^0$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$, то на підставі співвідношення (14) в сенсі збіжності за метрикою просторів $L_{M,\omega}$ виконується рівність

$$f_\beta^\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \qquad (3)$$

З розкладу (3) випливають формули зв'язку між коефіцієнтами Фур'є функцій f_β^ψ і f:

$$a_k(f) = \psi(k)\left(a_k(f_\beta^\psi)\cos\frac{\beta\pi}{2} - b_k(f_\beta^\psi)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (4)$$

$$b_k(f) = \psi(k)\left(a_k(f_\beta^\psi)\sin\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f_\beta^\psi)\cos\frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (5)$$

і

$$a_k(f_\beta^\psi) = \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (6)$$

$$b_k(f_\beta^\psi) = \frac{1}{\psi(k)}\left(b_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (7)$$

У цій роботі отримано аналог відомої нерівності Бернштейна для $(\psi;\beta)$-похідної відносно метрики просторів $L_{M,\omega}$. Використовуючи цю нерівність, доведено обернені теореми теорії наближення на множинах $L_\beta^\psi L_{M,\omega}$.

2. Допоміжні твердження. Позначимо, як звичайно,

$$S_n(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx),\ n = 0,1,\ldots, \qquad (8)$$

— частинні суми ряду Фур'є порядку n функції f.

Сформулюємо твердження з книги [1, с. 278], яке носить допоміжний характер і використовуватиметься при доведенні основних результатів цієї роботи.

Теорема А. *Якщо $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$, то для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ і довільного натурального n виконуються нерівності*

$$\int\limits_0^{2\pi} M(|S_n(f;t)|)\omega(t)\ dt \le$$

$$\le C\int\limits_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\ dt, \qquad (9)$$

і

$$\int\limits_0^{2\pi} M(|\tilde{f}(t)|)\omega(t)\ dt \le C\int\limits_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\ dt, \qquad (10)$$

де $\tilde{f}$ — функція, тригонометрично спряжена з f і C — додатна стала, яка не залежить від f і n.

З теореми А, зокрема, випливає, що оператори Фур'є і тригонометричного спряження є рівномірно обмеженими відносно $n \in \mathbb{N}$ в просторі $L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$, тобто для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$,

$$\|S_n(f)\|_{M,\omega} \le C\|f\|_{M,\omega}, \qquad (11)$$

$$\|\tilde{f}\|_{M,\omega} \le C\|f\|_{M,\omega}. \qquad (12)$$

Позначимо через

$$E_n(\varphi)_{M,\omega} := \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_{M,\omega}, \varphi \in L_{M,\omega},$$

— найкраще наближення функції φ за допомогою підпростору $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометричних поліномів порядку, не вище $n-1$. У роботі [5, лема 3] показано, що для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ і довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться тригонометричний поліном $T(x)$, для якого

$$\int\limits_0^{2\pi} M(|f(x) - T(x)|)\omega(x)\ dx < \varepsilon.$$

Це означає, що

$$\|f - T\|_{M,\omega} < \varepsilon,$$

звідки отримуємо

$$E_n(f)_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (13)$$

Із співвідношень (11), (12) і (13) випливає, що за умов теореми А

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (14)$$

і

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} = \mathcal{O}(1)E_n(f)_{M,\omega} = \qquad (15)$$

$$= \mathcal{O}(1)E_n(\tilde{f})_{M,\omega},$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно n.

Далі знадобитися наступне твердження, яке також носить допоміжний характер, але й не позбавлене самостійного інтересу. Позначимо через $\mathfrak{M}^*$ множину послідовностей $\psi(k) > 0$, які задовольняють тільки перші дві умови з визначення множини $\mathfrak{M}$, тобто:

$$\mathfrak{M}^* = \Big\{\{\psi(k)\}_{k=1}^\infty : (\forall k \in \mathbb{N})(\psi(k) - \psi(k+1) > 0),$$
$$\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0\Big\}.$$

Лема 1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$. Тоді для довільного тригонометричного полінома T_n порядку, не вище n, виконується нерівність*

$$\|D_\beta^\psi T_n\|_{M,\omega} \le \frac{K}{\psi(n)}\|T_n\|_{M,\omega}, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (16)$$

де $1/\psi(0) := 0$, а K — додатна стала, яка не залежить від β і n.

Співвідношення (16) є аналогом класичної нерівності для максимуму модуля похідної тригонометричного полінома, отриманої С.Н. Бернштейном в роботі [6]. Надалі ця нерівність уточнювалася і узагальнювалася в роботах багатьох авторів. З основними результатами щодо нерівності С.Н. Бернштейна і коментарями до них можна ознайомитися, наприклад, у книзі М.П. Корнійчука , В.Ф. Бабенко і А.О. Лигуна [7] (див., також, монографії О.П. Тімана [8] , Н.І. Ахієзера [9]) . Відзначимо також, що за умови $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, лема 1 доведена в роботі [10]. У випадку метрики просторів L_p, $1 \le p \le \infty$ і $\omega(t) \equiv 1$, нерівність (16) отримано О.І. Степанцем і О.К. Кушпелем в статті [11] .

Доведення. Якщо

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— тригонометричний поліном порядку, не вище n, то відповідно до рівності (3)

$$(D^{\psi}_{\beta}T_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi(k)} a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}\Big(a_k \cos kx +$$

$$+ b_k \sin kx\Big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}\Big(a_k \sin kx - b_k \cos kx\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(T_n;x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(\tilde{T}_n;x) =$$

$$= \cos\frac{\beta\pi}{2}(D^{\psi}_{0}T_n)(x) - \sin\frac{\beta\pi}{2}(D^{\psi}_{0}\tilde{T}_n)(x). \quad (17)$$

Покладемо

$$R^{\psi}_{m}(\varphi;x) := \sum_{k=0}^{m-1} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right] A_k(\varphi;x), \quad (18)$$

де $m = 1, 2, \ldots,$ і $1/\psi(0) := 0$.

З рівності (17) випливає, що функція

$$\varphi_1(x) := \psi(n)(D^{\psi}_{0}T_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(T_n;x),$$

є тригонометричним поліномом порядку, не вище n (тобто $A_k(\varphi_1;x) \equiv 0, \quad k > n$). Враховуючи це, використовуючи перетворення Абеля, для довільного натурального числа $m \geq n$ отримуємо

$$R^{\psi}_{m}(\varphi_1;x) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right] A_k(\varphi_1;x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right] \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(T_n;x) =$$

$$= \psi(n) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{\psi(k)} - \frac{1}{\psi(k+1)}\right] \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{k} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n;x) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n;x) =$$

$$= \psi(n) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{\psi(k)} - \frac{1}{\psi(k+1)}\right] r^{\psi,m}_{k}(T_n;x) +$$

$$+ r^{\psi,m}_{n}(T_n;x), \quad (19)$$

де

$$r^{\psi,m}_{k}(T_n;x) := \sum_{i=0}^{k} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n;x),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n.$$

Знову скориставшись перетворенням Абеля, матимемо

$$r^{\psi,m}_{k}(T_n;x) = \psi(m) \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{1}{\psi(i+1)} - \frac{1}{\psi(i)}\right] \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{i} A_j(T_n;x) + \psi(m)\left[\frac{1}{\psi(m)} - \frac{1}{\psi(k)}\right] \sum_{j=0}^{k} A_j(T_n;x) =$$

$$= \psi(m) \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{1}{\psi(i+1)} - \frac{1}{\psi(i)}\right] S_i(T_n;x)$$

$$+ \psi(m)\left[\frac{1}{\psi(m)} - \frac{1}{\psi(k)}\right] S_k(T_n;x).$$

Звідси, враховуючи монотонність послідовності $\psi(k)$ і співвідношення (11), отримуємо нерівність

$$\|r^{\psi,m}_{k}(T_n;\cdot)\|_{M,\omega} \leq$$

$$\leq K\psi(m) \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{1}{\psi(i+1)} - \frac{1}{\psi(i)}\right] \|T_n(\cdot)\|_{M,\omega} +$$

$$+ K\psi(m)\left[\frac{1}{\psi(m)} - \frac{1}{\psi(k)}\right] \|T_n(\cdot)\|_{M,\omega} \leq$$

$$\leq K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}, \quad (20)$$

де $K = K_M$ — додатна величина, яка залежить від функції M.

Застосовуючи тепер оцінку (20) до рівності (19), для довільного натурального числа $m \geq n$ знаходимо

$$\|R^{\psi}_{m}(\varphi_1;\cdot)\|_{M,\omega} \leq K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}. \quad (21)$$

Аналогічно, для функції

$$\varphi_2(x) := \psi(n)(D_0^{\psi}\tilde{T}_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(\tilde{T}_n; x),$$

враховуючи співвідношення (12), для довільного натурального числа $m \geq n$ отримуємо, що

$$\|R_m^{\psi}(\varphi_2; \cdot)\|_{M,\omega} \leq K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}. \tag{22}$$

Покладемо

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi; x) := \frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} R_{m_2}^{\psi}(\varphi; x)$$

$$-\frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} R_{m_1}^{\psi}(\varphi; x), \tag{23}$$

де $m_1 < m_2 \in \mathbb{N}$, а $R_m^{\psi}(\varphi; x)$ — величина, яка визначається у співвідношенні (18).

Вважаючи, що послідовності $\psi(k)$ з множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множину натуральних чисел неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, відповідно до [4, с. 159] через $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ позначимо функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1.$$

Звідси, внаслідок строгої монотонності та спадання до нуля ψ, функція $\eta(t)$ для всіх $t \geq 1$ визначається однозначно

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \tag{24}$$

де ψ^{-1} — функція, обернена до ψ.

Нехай тепер $m_1 = n$ і $m_2 = [\eta(n)]$, где $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді виконуються співвідношення

$$\frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} = \mathcal{O}(1),$$

$$\frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} = \mathcal{O}(1). \tag{25}$$

На підставі співвідношень (21) – (25), знаходимо, що

$$\|Q_{n,[\eta(n)]}^{\psi}(\varphi_i; \cdot)\|_{M,\omega} \leq K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}, \tag{26}$$

$$n = 1, 2, \ldots, \ i = 1, 2.$$

Оскільки справедлива рівність

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi; x) = \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m_2-1} \left(\frac{1}{\psi(m_2)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) A_k(\varphi; x) -$$

$$-\frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} \sum_{k=0}^{m_1-1} \left(\frac{1}{\psi(m_1)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) A_k(\varphi; x),$$

яка за допомогою перетворення Абеля приймає вигляд

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi; x) = \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} \times$$

$$\times \sum_{k=m_1}^{m_2-1} \left(\frac{1}{\psi(k+1)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) S_k(\varphi; x),$$

то для довільного тригонометричного полінома T_m, порядок якого неперевищує m_1, матимемо

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(T_m; x) = T_m(x). \tag{27}$$

Беручи тепер до уваги те, що

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(c\varphi; x) = cQ_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi; x), \quad c = \mathrm{const},$$

враховуючи співвідношення (17), (26) і (27), знаходимо, що

$$\|(D_{\beta}^{\psi}T_n)(\cdot)\|_{M,\omega} \leq \|(D_0^{\psi}T_n)(\cdot)\|_{M,\omega} +$$

$$+\|(D_0^{\psi}\tilde{T}_n)(\cdot)\|_{M,\omega} = \left\|\frac{1}{\psi(n)} Q_{n,[\eta(n)]}^{\psi}(\varphi_1; \cdot)\right\|_{M,\omega} +$$

$$+\left\|\frac{1}{\psi(n)} Q_{n,[\eta(n)]}^{\psi}(\varphi_2; \cdot)\right\|_{M,\omega} \leq \frac{K}{\psi(n)}\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}, \tag{28}$$

$n = 0, 1, \ldots$, що й потрібно було довести. Теорема доведена.

Зауважимо, що нерівність (16) є непокращуваною за порядком, оскільки для тригонометричного полінома $t_n^*(x) = \cos nx$ будемо мати

$$(D_0^{\psi}t_n^*)(x) = \frac{1}{\psi(n)} \cos nx$$

і

$$\|D_0^{\psi}t_n^*)\|_{M,\omega} = \|\frac{1}{\psi(n)} \cos nx\|_{M,\omega} = \frac{1}{\psi(n)}\|t_n^*\|_{M,\omega}.$$

Добре відомо (див., наприклад [4, с. 133]), що у випадку, коли $\psi_r(k) = k^{-r}$, $r > 0$, множини L^{ψ}_{β} збігаються з множинами W^r_{β} функцій, диференційовних в розумінні Вейля-Надя. Позначивши через $D^r_{\beta}(T_n)$ $(r;\beta)$-похідну Вейля-Надя тригонометричного полінома T_n і враховуючи очевидну належність $\psi_r(k) \in \mathfrak{M}^*$, $r > 0$, лему 1 можна записати в наступному вигляді.

Лемма 1′. *Нехай $M \in \mathcal{QC}^{\theta}_2$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільного тригонометричного полінома T_n порядку, не вище n, виконується нерівність*

$$\|D^r_{\beta}(T_n)\|_{M,\omega} \le \frac{K}{n^r}\|T_n\|_{M,\omega}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

де $1/0 := 0$, а K — додатна стала, яка не залежить від β і n.

3. Основні результати. Використовуючи лему 1 можна довести так звані обернені теореми теорії наближення на множинах L^{ψ}_{β}, $L_{M,\omega}$. Для формулювання результатів будемо використовувати визначення множин $\mathfrak{M}_0$ і F, які належать О.І. Степанцю ([4, с. 160, с. 165]):

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad 0 < \frac{t}{\eta(\psi;t) - t} \le K,\ t \ge 1\},$$

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \eta'(\psi;t) \le K\},$$

де $\eta(\psi;t)$ є функція, визначена у співвідношенні (24).

Теорема 1. *Нехай $M \in \mathcal{QC}^{\theta}_2$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ матимемо:*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f^{ψ}_{β}, така що

$$E_n(f^{\psi}_{\beta})_{M,\omega} \le C_1 \sum_{k=n}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)|^{-1}. \quad (29)$$

2. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|k\psi(k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f^{ψ}_{β}, така що

$$E_n(f^{\psi}_{\beta})_{M,\omega} \le C_2 \Bigg(\frac{E_n(f)_{M,\omega}}{\psi(n)} + \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|k\psi(k)|^{-1}\Bigg). \quad (30)$$

3. Якщо $\psi \in F$, $\eta(\psi;t) - t \ge K > 0$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f^{ψ}_{β}, така що

$$E_n(f^{\psi}_{\beta})_{M,\omega} \le C_3 \Bigg(\frac{E_n(f)_{M,\omega}}{\psi(n)} + \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1}\Bigg), \quad (31)$$

де $n \in \mathbb{N}$, C_i, $i = 1, 2, 3$, величини, рівномірно обмежені відносно f, β і n.

Якщо $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то тоді твердження теореми 1 співпадає з теоремою 2.13 з роботи [10]. О.І. Жукіна [12] і О.І. Степанець [13] отримали аналогічний результат для монотонних послідовностей ψ відносно метрик просторів L_p, $1 < p < \infty$. Результат для $\psi(n) = n^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ і $1 < p < \infty$ було встановлено в роботі [14]. Для $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$ і $1 < p < \infty$ теорема 1 була доведена О.П. Тіманом [8].

Доведення. Для доведення теореми будемо використовувати схему, запропоновану в книзі [15, с. 120 – 126]. Переконаємося спочатку у справедливості твердження пункту 1 теореми. Нехай $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність тригонометричних поліномів, які здійснюють найкраще наближення функції $f \in L_{M,\omega}$. Тоді ряд

$$t_n(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (t_k(x) - t_{k-1}(x)) \quad (32)$$

збігається до $f(x)$ за нормою простору $L_{M,\omega}$, і його частинні суми T_m при $m > n$ співпадають з поліномами $t_m(x)$.

Доведемо, що ряд

$$(D^{\psi}_{\beta}t_n)(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(D^{\psi}_{\beta}(t_k-t_{k-1}))(x) \qquad (33)$$

збігається до суми $T(x)$, що має ряд Фур'є вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \qquad (34)$$

Тим самим, існування похідної $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ буде встановлено. Оскільки різниця $u_k(x)=t_k(x)-t_{k-1}(x)$ є поліномом порядку k, то застосовуючи лему 1 отримуємо

$$\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{M,\omega}\le\frac{C}{|\psi(k)|}\|u_k(\cdot)\|_{M,\omega}\le\frac{C}{|\psi(k)|}\times$$

$$\times\Big(\|t_k(\cdot)-f(\cdot)\|_{M,\omega}+\|f(\cdot)-t_{k-1}(\cdot)\|_{M,\omega}\Big)\le$$

$$\le 2CE_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)|^{-1}, \qquad (35)$$

де C — додатна константа, яка не залежить від f, β і n. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{M,\omega}\le$$

$$\le C\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)|^{-1}, \qquad (36)$$

причому за умовою пункту 1 теореми ряд у правій частині нерівності (36) збігається. Це означає, що ряд (33) також збігається в просторі $L_{M,\omega}$ до деякої функції $T(x)\in L_{M,\omega}$.

Нехай $a^{(n)}_k=a_k(t_n)$ і $b^{(n)}_k=b_k(t_n)$, $k=0,1,2,\ldots,$ — коефіцієнти Фур'є поліномів $t_n(\cdot)$. Тоді у відповідності з рівностями (4) і (5) коефіцієнти $\alpha^{(n)}_k$ і $\beta^{(n)}_k$ поліномів $(D^{\psi}_{\beta}t_k)(\cdot)$ мають вигляд

$$\alpha^{(n)}_k=\frac{1}{\psi(k)}\left(a^{(n)}_k\cos\frac{\beta\pi}{2}+b^{(n)}_k\sin\frac{\beta\pi}{2}\right) \qquad (37)$$

$$\beta^{(n)}_k=\frac{1}{\psi(k)}\left(b^{(n)}_k\cos\frac{\beta\pi}{2}-a^{(n)}_k\sin\frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (38)$$

Оскільки рівність

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}(D^{\psi}_{\beta}t_n)(x)$$

виконується відносно метрики просторів $L_{M,\omega}$, то

$$a_k(T)=\lim_{n\to\infty}\alpha^{(n)}_k,\quad b_k(T)=\lim_{n\to\infty}\beta^{(n)}_k,$$

$$k=0,1,\ldots\ .$$

Беручи до уваги те, що

$$\lim_{n\to\infty}a^{(n)}_k=a_k(f),\quad \lim_{n\to\infty}b^{(n)}_k=b_k(f),$$

$$k=0,1,\ldots\ ,$$

з рівностей (37) – (38) отримуємо

$$a_k(T)=\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2}+b_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

$$b_k(T)=\frac{1}{\psi(k)}\left(b_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2}-a_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Звідси випливає, що ряд Фур'є функції $T(x)$ співпадає з рядом (34). Це означає, що функція $f(x)$ має $(\psi;\beta)$-похідну $f^{\psi}_{\beta}(x)$, яка належить простору $L_{M,\omega}$, і при кожному $n\in\mathbb{N}$ виконується рівність

$$f^{\psi}_{\beta}(x)=(D^{\psi}_{\beta}t_n)(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(D^{\psi}_{\beta}[t_k-t_{k-1}])(x), \qquad (39)$$

відносно метрики простору $L_{M,\omega}$.

Для завершення доведення пункту 1 теореми залишилося зауважити, що нерівність(29) випливає зі співвідношення (39), з урахуванням оцінки (36).

Для доведення пунктів 2 і 3 теореми будемо використовувати ту ж саму схему. Нехай $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність тригонометричних поліномів, які здійснюють найкраще наближення функції f в просторі $L_{M,\omega}$. Покладемо для кожного натурального n

$$n_0=n, n_1=[\eta(n)]+1,\ldots,n_k=[\eta(n_{k-1})]+1,\ldots.$$

Тоді ряд

$$t_{n_0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(t_{n_k}(x)-t_{n_{k-1}}(x))$$

буде збігатися до функції f в просторі $L_{M,\omega}$. Розглянемо ряд

$$(D^{\psi}_{\beta}t_{n_0})(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(D^{\psi}_{\beta}[t_{n_k}-t_{n_{k-1}}])(x) \qquad (40)$$

і переконаємося, що він буде збігатися в просторі $L_{M,\omega}$ до суми $T(x)$, ряд Фур'є якої має вигляд (34). Застосовуючи нерівність (16) до різниці $u_k(x)=t_{n_k}(x)-t_{n_{k-1}}(x)$, одержуємо

$$\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{M,\omega}\le CE_{n_{k-1}+1}(f)_{M,\omega}|\psi(n_k)|^{-1},$$

внаслідок чого

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{M,\omega}\le C\bigg(E_{n+1}(f)_{M,\omega}(\psi(n))^{-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}E_{n_k+1}(f)_{M,\omega}|\psi(n_k)|^{-1}\bigg). \qquad (41)$$

Використовуючи оцінку (див. [15, с. 124 – 125])

$$\frac{E_{n_k+1}(f)}{\psi(n_k)}\le\sum_{\nu=n_{k-1}}^{n_k-1}\frac{E_{\nu+1}(f)}{\nu\psi(\nu)},\quad \psi\in\mathfrak{M}_0,$$

зі співвідношення (41) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{M,\omega}\le C\bigg(E_{n+1}(f)_{M,\omega}(\psi(n))^{-1}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}E_{k}(f)_{M,\omega}|k\psi(k)|^{-1}\bigg). \qquad (42)$$

Відповідно до умов пункту 2 теореми, ряд з правої частини нерівності(42) збігається. Звідси випливає, що і ряд (40) буде збігатися в просторі $L_{M,\omega}$ до деякої функції $f\in L_{M,\omega}$ і для закінчення доведення пункту 2 теореми, залишилося показати, що $S[T]=S[f^{\psi}_{\beta}]$. Для цього повторимо міркування, які були використані для отримання рівності (39), і отримаємо нерівність (30) шляхом застосування аналогу рівності (39) і співвідношення (42).

Доведення пункту 3 теореми проводиться аналогічно, з урахуванням наступного аналогу нерівності (42), отриманого в монографії [15, с. 125 – 126]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{M,\omega}\le C\bigg(E_{n+1}(f)_{M,\omega}(\psi(n))^{-1}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}E_{k}(f)_{M,\omega}|\psi(k)(\eta(k)-k)|^{-1}\bigg).$$

Теорему доведено.

Нехай $f\in L_{M,\omega}$, $M\in\mathcal{QC}^{\theta}_2$, $\omega\in A_{\wp(M)}$ і

$$f_h(x):=\frac{1}{h}\int\limits_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}}f(t)\,dt,\quad 0<h<1,\ x\in[0;2\pi],$$

оператор Стєклова функції f. В роботі [1] було отримано наступне твердження.

Теорема B. *Якщо $M\in\mathcal{QC}^{\theta}_2$ і $\omega\in A_{\wp(M)}$, то для довільної функції $f\in L_{M,\omega}$ виконується нерівність*

$$\int\limits_0^{2\pi}M(|f_h(t)|)\omega(t)\ dt\le C\int\limits_0^{2\pi}M(|f(t)|)\omega(t)\ dt, \qquad (43)$$

де C — додатна стала, яка не залежить від f.

Враховуючи теорему B, в роботі [10] були введені до розгляду модулі неперервності дробового порядку

$$\Omega_{\alpha}(f;\delta)_{M,\omega}:=\sup_{h_i,h<\delta}\bigg\|\prod_{i=1}^{[\alpha]}(f-f_{h_i})\sigma^{\beta}_h(f)\bigg\|_{M,\omega},$$

$$\beta=\alpha-[\alpha],$$

$$\sigma^{\beta}_h(f)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\beta}{k}\frac{1}{h^k}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\dots\int\limits_{-h/2}^{h/2}f(x+\sum_{j=1}^{k}u_k)\prod_{j=1}^{k}du_k,$$

$$\binom{\beta}{k}:=\frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{k!},\ k>1;$$

$$\binom{\beta}{1}:=\beta;\quad \binom{\beta}{0}:=1,\ \ 0<\beta<1,$$

і для цих величин було доведено наступне твердження.

Теорема C. *Нехай $M\in\mathcal{QC}^{\theta}_2$ і $\omega\in A_{\wp(M)}$. Тоді якщо $\alpha>0$ і $f\in L_{M,\omega}$, то для $n=0,1,\dots,$ виконується нерівність*

$$\Omega_{\alpha}\Big(f;\frac{\pi}{n+1}\Big)_{M,\omega}\le$$

$$\le\frac{K}{(n+1)^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}E_k(f)_{M,\omega}, \qquad (44)$$

де K – додатна величина, яка не залежить від f і n.

Використовуючи теореми 1 і С, отримуємо.

Теорема 2. *В умовах теореми 1 для довільного $\alpha > 0$ мають місце такі твердження.*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |\psi(k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f_β^ψ для якої

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \leq$$

$$\leq C_1 \left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{\psi(k)} E_k(f)_{M,\omega} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (45)$$

2. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |k\psi(k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f_β^ψ для якої

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \leq$$

$$\leq C_2 \left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\psi(k)} E_k(f)_{M,\omega} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{k\psi(k)} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (46)$$

3. Якщо $\psi \in F$, $\eta(\psi; t) - t \geq K > 0$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f_β^ψ для якої

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \leq C_3 \left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \times \right.$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{\psi(k)(\eta(k)-k)} E_k(f)_{M,\omega} +$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)(\eta(k)-k)} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (47)$$

де C_i, $i = 1, 2, 3$, – величини, які не залежать від f, β і n.

Доведення. Застосовуючи теорему С до функції f_β^ψ, існування якої гарантовано теоремою 1, і оцінюючи величини найкращих наближень $(\psi; \beta)$-похідної $E_k(f_\beta^\psi)_{M,\omega}$ за допомогою співвідношення(29), отримуємо

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \leq$$

$$\leq \frac{C}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} \sum_{j=k}^{\infty} E_j(f)_{M,\omega} |\psi(j)|^{-1}.$$

Беручи до уваги тотожність

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=k}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{j=0}^{k} a_j + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sum_{j=0}^{n} a_j,$$

і нерівність

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \sum_{j=0}^{k} (j+1)^{\alpha-1} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j+1}{k+1} \right)^{\alpha-1} \leq$$

$$\leq 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

отримуємо оцінку (45). Пункти 2 і 3 теореми доводяться аналогічно.

Враховуючи належність $\psi_r(k) \in \mathfrak{M}_0$, з теорем 1 і 2 отримуємо наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ і $r > 0$ за умови, що ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} k^{r-1}$$

збігається, існує така похідна f_β^r, що

$$E_n(f_\beta^\psi)_{M,\omega} \leq C \left(E_n(f)_{M,\omega} n^r + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} k^{r-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наслідок 2. *В умовах наслідку 1 для довільного $\alpha > 0$ існує похідна f_β^r для якої*

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \le$$

$$\le C\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{r+\alpha-1}E_k(f)_{M,\omega}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(f)_{M,\omega}k^{r-1}\right), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Зазначимо, що у випадку $\beta = r$ твердження наслідків 1 і 2 співпадають, відповідно, з твердженнями теорем 2.13 і 2.14 роботи [10].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Genebashvili I., Gogatishvili A., Kokilashvili V.Krbec M. Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type. — Longman, Harlow, UK: vol. 92 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — 1998.

2. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. — 271 с.

3. Gogatishvili A., Kokilashvili V. Criteria of weighted inequalities in Orlicz classes for maximal functions defined on homogeneous type spaces // Georgian Mathematical Journal. — 1994.— **1,** № 6. — P. 641–673.

4. Степанец А.И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. — 427 с.

5. Khabazi M. The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. – 2002. – **129.** — P. 65 -– 75.

6. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912). — Собрание сочинений, Изд. АН СССР. — т. I. (1952) — С. 11 – 104.

7. Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. — Киев: Наукова думка, 1992. — 304 с.

8. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.

9. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука 1965. — 407 с.

10. Akgün R. Approximating polynomials for functions of Weighted Smirnov-Orlicz spaces // Jorn. of funct. spacas and applic. — 2012. — P. 1 – 41.

11. Степанец А.И., Кушпель А.К. Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39,** № 4. — С. 483 – 492.

12. Жукина Е.И. Теоремы вложения // Приближение периодических функций в метрике пространсва L_p. — Киев, 1987. — С. 3 – 32. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 87.47)

13. Степанец А.И. Обратные теоремы приближения периодических функций // Укр. мат. журн. — 1995. — **47,** № 9. — С. 1266 – 1273.

14. Конюшков А.А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сборник. — 1958. — **44 (86),** № 1. — С. 53 – 84.

15. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.

УДК 517.9

©2013 р. С.М. Чуйко, О.В. Чуйко

Слов'янський державний педагогічний університет, Слов'янськ

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ПЕРІОДИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ ІМПУЛЬСНОГО ВПЛИВУ

Знайдено умови регуляризації лінійної періодичної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу. Побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдено вигляд імпульсного збурення регуляризованої лінійної періодичної крайової задачі.

Using an impulse influence, we find conditions for the regularization of a linear periodic boundary value problem for a system of ordinary differential equation. We construct generalized Green's operator and find a form for impulse perturbation of a linear periodic boundary value problem.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про знаходження T-періодичних розв'язків

$$z(t) \in C^1[0,T]$$

системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t), \tag{1}$$

яка некоректно поставлена [2,3]. Це означає, що

$$\int_0^T H^*(s)f(s)ds \neq 0$$

для довільної неперервної функції $f(t)$; тут $A(t)$ — неперервна на відрізку $[0,T]$ матриця, $H^*(t))$ — фундаментальна матриця системи, спряженої до однорідної частини системи (1).

Нами досліджено умови регуляризації [1, 2, 4] крайової задачі для системи (1) з періодичною граничною умовою

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0 \tag{2}$$

та імпульсним впливом [1, 3, 5–7]

$$\Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) + \mu, \tag{3}$$

$$\Delta z(\tau) := z(\tau + 0) - z(\tau - 0).$$

На відміну від того, як це зроблено в монографії [1] та статті [3], поставимо задачу не про умови розв'язності лінійної періодичної крайової задачі для системи (1) з фіксованим імпульсним впливом (3), а дослідимо задачу про знаходження T-періодичних розв'язків

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

а також матриці $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, яка б для фіксованого вектора $\mu := 0$ гарантувала розв'язність цієї задачі для довільної неперервної функції $f(t)$. Поставлена задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу, наведених у монографії [1, с. 248] та статті [3] на випадок $\mu := 0$ та нефіксованої матриці S.

Позначимо через $X_0(t)$ нормальну ($X_0(\tau) = I_n$) фундаментальну матрицю [8, 9] однорідної частини системи (1). Загальний розв'язок

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}, \quad 0 < \tau < T$$

диференціальної системи з імпульсним впливом (1), (3) зобразимо у вигляді

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) :=$$

$$-X_0(t)\int_t^\tau X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [0,\tau[,$$

$$X_0(t)\int_\tau^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [\tau,T]$$

узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(\tau)=0$ для диференціальної системи (1) та $X(t)-$ нормальна ($X(\tau-0)=I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (1) з імпульсним впливом (3)

$$X(t)=\begin{array}{ll} X_0(t), & t\in[0,\tau[,\\ X_0(t)(I_n+S), & t\in[\tau,T]. \end{array}$$

Позначимо матриці $Q:=\ell X_0(\cdot)$, $\mathcal{Q}:=\ell X(\cdot)$ й ортопроектор [1] $P_{\mathcal{Q}^*}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{N}(Q^*)$. Диференціальна система (1) з періодичною крайовою умовою (2) та імпульсним впливом (3) розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$, якщо $P_{\mathcal{Q}^*}=0$. Таким чином, отримуємо рівняння для знаходження матриці $S\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\Big[Q-X(T)S\Big]\cdot\Big[Q-X(T)S\Big]^+=I_n. \quad (4)$$

Припустимо, що рівняння (4) має дійсний розв'язок $\mathcal{S}$, якому відповідає нормальна фундаментальна матриця однорідної частини системи (1) з імпульсним впливом (3):

$$X(t)=\begin{array}{ll} X_0(t), & t\in[0,\tau[,\\ X_0(t)(I_n+\mathcal{S}), & t\in[\tau,T]. \end{array}$$

Матриці $X(t)$ відповідає не менш ніж один розв'язок задачі (1), (2), (3)

$$z(t,c)=\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)-X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot).$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема. *Якщо задача про знаходження T-періодичних розв'язків $z(t)\in C^1[0,T]$ системи (1) некоректно поставлена і рівняння (4) має дійсний корінь $\mathcal{S}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, то для для довільної неперервної функції $f(t)$ у просторі*

$$z(t)\in C^1\Big\{[0,T]\setminus\{\tau\}_I\Big\}$$

існує не менш ніж один розв'язок

$$z(t)=\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)$$

крайової задачі з періодичною крайовою умовою та імпульсним впливом (1), (2), (3), де $S=\mathcal{S}$, $\mu:=0$,

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t):=$$

$$=\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)-X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію T-періодичних розв'язків системи (1) за допомогою імпульсного впливу (3).

У залежності від матриці $\mathcal{S}$ імпульсний вплив (3) за умови

$$\det\Big(I_n+\mathcal{S}\Big)\neq 0$$

— невироджений [1,5], або ж вироджений [8, 9]:

$$\det\Big(I_n+\mathcal{S}\Big)=0.$$

Приклад *Умови доведеної теореми виконуються у випадку 2π-періодичної задачі для системи (1), яка для довільної неперервної функції $f(t)$ не має розв'язків у класі $z(t)\in C^1[0;2\pi]$; в той же час у класі функцій*

$$z(t)\in C^1\Big\{[0,2\pi]\setminus\{\tau\}_I\Big\},\quad \tau:=\pi$$

крайова задача для системи з періодичною крайовою умовою та імпульсним впливом

$$dz/dt=Az+f(t),\ t\neq\tau,\ \ell z(\cdot)=0,$$

$$\Delta z(\tau)=Sz(\tau-0) \quad (5)$$

розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$. Тут

$$A(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

Справді, у випадку крайової задачі для диференціальної системи (5) з 2π-

періодичною умовою та імпульсним впливом рівняння (4) має дійсний розв'язок

$$\mathcal{S}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

якому відповідає нормальна ($X(\pi-0)=I_3$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (5) з виродженим ($\det(I_3+\mathcal{S})=0$) імпульсним впливом:

$$X(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}e^{t-\pi}&0&0\\0&-\cos t&-\sin t\\0&\sin t&-\cos t\end{bmatrix}, & t\in[0,\tau[,\\[2mm] \begin{bmatrix}e^{t-\pi}&0&e^{t-\pi}\\-\sin t&-2\cos t&-\sin t\\-\cos t&2\sin t&-\cos t\end{bmatrix}, & t\in[\tau,T].\end{cases}$$

Для довільної неперервної функції $f(t)$ та знайденої матриці $X(t)$ існує єдиний розв'язок крайової задачі для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом. Зокрема, для функції

$$f(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\\sin t\end{bmatrix}$$

2π-періодична задача для диференціальної системи (5) нерозв'язна, в той же час регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та виродженим імпульсним впливом має єдиний розв'язок

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\3\pi\cos t-t\cos t+\sin t\\-3\pi\sin t+t\sin t\end{bmatrix},\quad t\in[0,\tau[,$$

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\5\pi\cos t-t\cos t+\sin t\\-5\pi\sin t+t\sin t\end{bmatrix},\quad t\in[\tau,T].$$

Рівняння (4) має також дійсний розв'язок

$$\mathcal{S}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

, якому відповідає нормальна ($X_1(\pi-0)=I_3$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (5) з невиродженим ($\det(I_3+\mathcal{S}_1)\neq 0$) імпульсним впливом:

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}e^{t-\pi}&0&0\\0&-\cos t&-\sin t\\0&\sin t&-\cos t\end{bmatrix},\quad t\in[0,\pi[;$$

для $t\in[\pi,2\pi]$:

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}e^{t-\pi}&e^{t-\pi}&0\\-\sin t&-\cos t&-\sin t-\cos t\\-\cos t&\sin t&\sin t-\cos t\end{bmatrix}.$$

Для тієї ж функції $f(t)$ регуляризована крайова задача для системи диференціальних рівнянь (5) з 2π-періодичною умовою та виродженим імпульсним впливом має єдиний розв'язок; для $t\in[0,\pi[$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\(2\pi+1)\sin t+(\pi-t)\cos t\\2\pi\cos t-(\pi-t)\sin t\end{bmatrix};$$

для $t\in[\pi,2\pi]$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\3\pi\cos t-t\cos t+(2\pi+1)\sin t\\2\pi\cos t+(t-3\pi)\sin t\end{bmatrix}.$$

Згідно традиційної класифікації крайових задач [1] регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом є некритичною. Дійсно, для матриці $S=\mathcal{S}$ має місце рівність $P_{\mathcal{Q}^*}=0$, де

$$\mathcal{Q}=\begin{bmatrix}e^{-\pi}-e^{\pi}&0&1\\0&1&0\\-e^{\pi}&0&0\end{bmatrix}.$$

Так само, для матриці $S=\mathcal{S}_1$ має місце рівність $P_{\mathcal{Q}_1^*}=0$, де

$$\mathcal{Q}_1=\begin{bmatrix}e^{-\pi}-e^{\pi}&1&0\\0&0&1\\-e^{\pi}&0&0\end{bmatrix},$$

отже, регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом є некритичною.

На завершення зазначимо, що побудована нами матриця $\mathcal{S}$, а отже і умова регуляризації лінійної періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу $P_{Q^*} = 0$, не залежать від вибору довільної неперервної функції $f(t)$ на відміну від схеми, запропонованої в монографії [1].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

2. *Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.

3. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Бифуркация решений импульсной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 1. — С. 21 — 31.

4. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.

5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк, 1987. — 287 с.

6. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**. № 8. — С. 1132 — 1135.

7. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**. — № 1, С. 51 — 65.

8. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 5. — С. 588 — 594.

9. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доповіді НАНУ. — 1999. — № 6. — С. 43 — 47.

MSC2000 34C05

©2013 year Dumitru Cozma

Tiraspol State University, Chişinău, Republic of Moldova

CENTERS IN CUBIC DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH HOMOGENEOUS INVARIANT STRAIGHT LINES

We solve the problem of the center with at least three invariant straight lines for a cubic differential system with a singular point $O(0,0)$ of a center or focus type having homogeneous invariant straight lines.

1. Introduction

Consider the cubic differential system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + \\ &\quad + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x,y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + \\ &\quad + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

where $P(x,y)$ and $Q(x,y)$ are real and coprime polynomials in the variables x and y. The origin $O(0,0)$ is a singular point of a center or a focus type for (1). It arises the problem of distinguishing between a center and a focus, i.e. of finding the coefficient conditions under which $O(0,0)$ is a center. In this paper we study the problem of the center assuming that (1) has invariant straight lines.

The derivation of necessary conditions for a singular point $O(0,0)$ to be a center for (1) often involves extensive use of computer algebra and we obtain them by calculating the Lyapunov quantities, which are polynomials in the coefficients of (1). The necessary conditions are shown to be sufficient by a variety of methods. A number of techniques, of progressively wider application, have been developed.

A theorem of Poincaré in [9] says that a singular point $O(0,0)$ is a center for (1) if and only if the system has a nonconstant analytic first integral $F(x,y) = C$ in a neighborhood of $O(0,0)$. It is known [1] that the origin is a center for system (1) if and only if the system has an analytic integrating factor of the form

$$\mu(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x,y)$$

in a neighborhood of $O(0,0)$, where μ_k are homogeneous polynomials of degree k.

There exists a formal power series $F(x,y) = \sum F_j(x,y)$ such that the rate of change of $F(x,y)$ along trajectories of (1) is a linear combination of polynomials $\{(x^2+y^2)^j\}_{j=2}^{\infty}$:

$$dF/dt = \sum_{j=2}^{\infty} L_{j-1}(x^2+y^2)^j.$$

Quantities L_j, $j = \overline{1,\infty}$ are polynomials with respect to the coefficients of system (1) called to be the Lyapunov quantities [8]. The origin $O(0,0)$ is a center for (1) if and only if

$$L_j = 0,\ j = \overline{1,\infty}.$$

An algebraic curve $f(x,y) = 0$ is said to be an invariant algebraic curve of system (1) if there exists a polynomial $K(x,y)$ such that

$$P \cdot \partial f/\partial x + Q \cdot \partial f/\partial y = K \cdot f.$$

The polynomial K is called the cofactor of the invariant algebraic curve $f = 0$. If the cubic system (1) has sufficiently many invariant algebraic curves $f_j(x,y) = 0$, $j = \overline{1,q}$, then in most cases the first integral (integrating factor) can be constructed in the Darboux form

$$f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_q^{\alpha_q} \tag{2}$$

with $\alpha_j \in \mathbb{C}$ not all zero. In this case we say that system (1) is Darboux integrable.

System (1) has the Darboux first integral (Darboux integrating factor) of form (2) if and only if there exist constants $\alpha_j \in \mathbb{C}$, not all identically zero such that

$$\alpha_1 K_1(x,y) + \cdots + \alpha_q K_q(x,y) \equiv 0$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j K_j(x,y) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0\Big),$$

where K_j is the cofactor of Φ_j for $j = \overline{1,q}$.

The problem of the center was solved for quadratic systems and for cubic symmetric systems. If cubic system (1) contains both quadratic and cubic nonlinearities, then the problem of finding a finite number of necessary and sufficient conditions for the center is still open. It was possible to find a finite number of conditions for the center only in some particular cases (see, for example, [2-7, 10-14]).

The problem of the center was solved for some cubic systems with at least three invariant straight lines ([2, 3, 7, 14]) and for some classes of cubic systems (1) with two invariant straight lines and one invariant conic ([4, 5]).

The goal of this paper is to obtain the center conditions for cubic differential system (1) with homogeneous invariant straight lines.

The paper is organized as follows. In Section 2 we find conditions for cubic system (1) to have two homogeneous invariant straight lines. In Sections 3 and 4 we solve the problem of the center for (1) with four invariant straight lines and with three invariant straight lines of which two are homogeneous. In Section 5 for cubic system (1) with two homogeneous invariant straight lines we find sufficient conditions for $O(0,0)$ to be a center.

2. Two homogeneous invariant straight lines

In this section we find conditions under which cubic system (1) has two homogeneous invariant straight lines.

Definition 1. *A straight line*

$$1 + Ax + By = 0, \ A, B \in \mathbb{C} \tag{3}$$

is said to be invariant for (1), if there exists a polynomial with complex coefficients $K(x,y)$ such that the following identity holds

$$\begin{aligned} AP(x,y) + BQ(x,y) \equiv \\ (1 + Ax + By)K(x,y). \end{aligned} \tag{4}$$

If cubic system (1) has complex invariant straight lines then obviously they occur in complex conjugated pairs $1+Ax+By=0$ and $1+\overline{A}x+\overline{B}y=0$. As homogeneous invariant straight lines $Ax+By=0$ the cubic system (1) can have only the lines [3]

$$x - iy = 0, \ x + iy = 0, \ i^2 = -1. \tag{5}$$

Identifying the coefficients of the monomials $x^\nu y^j$ in (4), we reduce this identity to a system of nine equations for the unknowns A, B, $c_{\nu j}$, $\nu + j = 1, 2$. We find that $K(x,y) = -Bx + Ay + (aA - gB + AB)x^2 + (cA - dB + B^2 - A^2)xy + (fA - bB - AB)y^2$ and A, B are the solutions of the system

$$\begin{aligned} &F_1 \equiv (A+b)B^2 - (l + fA)B + rA = 0, \\ &F_2 \equiv (B+a)A^2 - (k + gB)A + sB = 0, \\ &F_3 \equiv B^3 - 2A^2B + fA^2 - dB^2 + \\ &\qquad + (c-b)AB - pA + nB = 0, \\ &F_4 \equiv A^3 - 2AB^2 - cA^2 + gB^2 + \\ &\qquad + (d-a)AB + mA - qB = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Theorem 1. *Cubic system (1) has two homogeneous invariant straight lines $x \pm iy = 0$ if and only if the following set of conditions holds*

$$\begin{aligned} &g = b + c, \ f = a + d, \\ &q = p + l - k, \ s = m + n - r. \end{aligned} \tag{7}$$

Proof. Let cubic system (1) have homogeneous invariant straight lines. Then by Definition 1 the straight lines $l_{1,2} \equiv x \mp iy = 0$ are invariant straight lines for (1) if and only if

$$P(x,y) \mp iQ(x,y) \equiv (x \mp iy)K(x,y), \tag{8}$$

where $K(x,y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$.

Identifying in (8) the coefficients of the monomials in x and y, we find that

$$\begin{aligned} &c_{10} = a \pm ig, \ c_{20} = k \pm is, \\ &c_{02} = p - k - q \pm i(m + n - s), \\ &c_{00} = \pm i, \ c_{01} = c - g \pm i(a + d), \\ &c_{11} = m - s \pm i(k + q) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &f - a - d \pm i(b + c - g) = 0, \\ &r + s - m - n \pm i(l - k + p - q) = 0. \end{aligned}$$

Direct calculations show that $f - a - d = 0$, $b + c - g = 0$, $r + s - m - n = 0$, $l - k + p - q = 0$ and cubic system (1) has two homogeneous invariant straight lines of form (5) if and only if set of conditions (7) holds. The cofactors of the invariant straight lines are $K_2(x,y) = \overline{K_1(x,y)}$, $K_1(x,y) = i + (a + i(b + c))x + (-b + i(a + d))y + (k + is)x^2 + (m - s + i(k + q))xy + (p - k - q + i(m + n - s))y^2$.

3. Four invariant straight lines and centers

In this section we find conditions for cubic system (1) to have four distinct invariant straight lines, two of which are homogeneous, i.e. of the form $l_{1,2} \equiv x \mp iy = 0$, $i^2 = -1$. Then we obtain necessary and sufficient conditions for $O(0,0)$ to be a center.

For this purpose, we assume that set of conditions (7) holds. In what follows we will consider the problem of finding conditions for the existence of two more invariant straight lines of form (3) and divide the study into two subcases: invariant straight lines (3) are parallel and invariant straight lines (3) are nonparallel.

3.1. Let cubic system (1) have two parallel invariant straight lines l_3 and l_4 of form (3) (real or complex conjugated $l_4 = \overline{l_3}$), then by a rotation of axes we can make them to be parallel to the axis of ordinates Oy. Note that by a rotation of axes the linear part of (1) and the invariant straight lines $x \mp iy = 0$ stay their forms respectively.

For $f = a + d,\ g = b + c,\ l = k - p + q,\ r = m + n - s$ and $B = 0$, $A \neq 0$, system (6) becomes

$$\begin{array}{l} m + n - s = 0,\ aA - k = 0, \\ (a + d)A - p = 0,\ A^2 - cA + m = 0. \end{array} \tag{9}$$

Then (9) has two distinct solutions if and only if $s = m + n,\ a = k = d = p = 0$, $m(c^2 - 4m) \neq 0$. In this case we obtain the following set of conditions for the existence of four distinct invariant straight lines:

(e1) $a = d = f = k = p = r = 0,\ g = b + c,\ l = q,\ s = m + n,$

$m(c^2 - 4m) \neq 0$. The invariant straight lines are $x \pm iy = 0,\ 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0$.

3.2. Let now cubic system (1) have two nonparallel invariant straight lines l_3 and l_4 of form (3) (real or complex conjugated) intersecting at a point (x_0, y_0). The intersection point (x_0, y_0) is a singular point for (1) with real coordinates. By rotating the system of coordinates and rescaling the axes of coordinates, we obtain that $x_0 = 0,\ y_0 = 1$. As a point $(0,1)$ is a singular point for (1), then $P(0,1) = Q(0,1) = 0$. These equalities yield

$$s = a + d + m + n + 1,\ q = -b - k + p.$$

In this case the equation of each invariant straight line can be written into the form $1 + Ax - y = 0$. For $f = a + d,\ g = b + c,\ l = k - p + q,\ r = m + n - s$ and $B = -1$, system (6) becomes

$$\begin{array}{l} F_2 \equiv (a-1)A^2 + (b + c - k)A - \\ \quad - a - d - m - n - 1 = 0, \\ F_3 \equiv (a + d + 2)A^2 + (b - c - p)A - \\ \quad - d - n - 1 = 0, \\ F_4 \equiv A^3 - cA^2 + (a - d + m - 2)A + \\ \quad + c - k + p = 0. \end{array} \tag{10}$$

Reduce the equation $F_3 = 0$ of (10) by n from $F_2 = 0$ and by p from $F_4 = 0$, then $F_3 \equiv f_1 f_2 = 0$, where $f_1 = A^2 - cA + a + m,\ \ f_2 = A^2 + 1$.

Suppose $f_1 = 0$. We reduce the equations $F_2(A) = 0, F_4(A) = 0$ by A^2 from $f_1 = 0$, then system (10) becomes

$$\begin{array}{l} F_2 \equiv (ac + b - k)A - a^2 - \\ \quad - am - d - n - 1 = 0, \\ F_4 \equiv (d + 2)A + k - c - p = 0, \\ f_1 \equiv A^2 - cA + a + m = 0. \end{array} \tag{11}$$

System (11) has two distinct solutions if $F_2 \equiv 0,\ F_4 \equiv 0$ and $c^2 - 4(a + m) \neq 0$. Under the above assumptions we get the following set of conditions for the existence of four distinct invariant straight lines

(e2) $d = -2,\ f = a - 2,\ g = b + c,\ k = ac + b,\ l = -b,\ q = -(b + c),\ n = 1 - a^2 - am,\ p = ac + b - c,\ r = 1 - a,\ s = (a + m)(1 - a),$

$c^2 - 4(a + m) \neq 0$. The invariant straight lines are $x \mp iy = 0,\ \ 1 + A_1 x - y = 0,\ \ 1 + A_2 x - y = 0$, where A_1, A_2 are distinct roots of the equation $A^2 - cA + a + m = 0$.

Assume $f_1 \neq 0$ and let $f_2 = 0$. In this case $f_2 = 0$ yields $A = \pm i$. Substituting this into (11) we obtain

$$\begin{array}{l} (b + c - k)i - (d + 2a + m + n) = 0, \\ (a - d + m - 3)i + (2c - k + p) = 0. \end{array} \tag{12}$$

The equations of (12) imply $k = b + c,\ m = 3 - a + d,\ n = -a - 2d - 3,\ p = b - c$. From this we get the following set of conditions for the existence of four distinct invariant straight lines

(e3) $f = a + d,\ k = g = b + c,\ l = -b,\ m = 3 - a + d,\ s = 1 - a,\ n = -a - 2d - 3,\ p = b - c,\ q = -b - 2c,\ r = -a - d - 1,$

$((a-1)^2 + b^2)((a-2)^2 + b^2) \neq 0$. The invariant straight lines are $x \pm iy = 0,\ 1 \pm ix - y = 0,\ 1 + (-b \pm i(1-a))x + (1 - a \pm bi)y = 0$.

Lemma 1. *The following six sets of conditions are sufficient conditions for the origin to be a center for system (1):*

(i) $a = d = f = k = l = p = q = r = 0,\ g = b + c,\ l = q,\ s = m + n;$

(ii) $d = -2,\ f = a - 2,\ g = b + c,\ k = ac + b,\ l = -b,\ q = -(b+c),\ n = 1 - a^2 - am,\ p = ac + b - c,\ s = (a+m)(1-a),\ r = 1 - a;$

(iii) $b = c = g = k = l = p = q = 0,\ f = a + d,\ s = 1 - a,\ m = d - a + 3,\ n = -a - 2d - 3,\ r = -a - d - 1;$

(iv) $a = 1,\ b = l = s = 0,\ f = d + 1,\ k = g = c,\ p = -c,\ m = d + 2,\ r = -d - 2,\ n = 2(-d-2),\ q = -2c;$

(v) $d = -2,\ f = a - 2,\ k = g = b,\ l = -b,\ m = 1 - a,\ c = 0,\ n = 1 - a,\ p = b,\ q = -b,\ r = s = 1 - a;$

(vi) $c = -2b,\ d = -2a,\ f = -a,\ g = k = l = -b,\ m = -3(a-1),\ n = 3(a-1),\ p = q = 3b,\ r = a - 1,\ s = -(a-1).$

Proof. If one of conditions (i)–(v) holds the cubic system (1) has four invariant straight lines two of which are homogeneous invariant straight lines. In cases (i), (ii), (iv) and (v) we find the first integral of the Darboux form

$$l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} l_3^{\alpha_3} l_4^{\alpha_4} = C,$$

which consists of invariant straight lines:

In case (i): $l_{1,2} = x \pm iy,\ l_{3,4} = 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = m\sqrt{c^2 - 4m},\ \alpha_3 = n\sqrt{c^2 - 4m} + 2bm - cn,\ \alpha_4 = n\sqrt{c^2 - 4m} - 2bm + cn$.

In case (ii): $l_{1,2} = x \pm iy,\ l_{3,4} = 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4a - 4m})x - 2y$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = -\sqrt{c^2 - 4a - 4m},\ \alpha_3 = a\sqrt{c^2 - 4a - 4m} - ac - 2b,\ \alpha_4 = a\sqrt{c^2 - 4a - 4m} + ac + 2b$.

In case (iv): $l_{1,2} = x \pm iy,\ l_{3,4} = 1 \pm ix - y$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

In case (v): $l_{1,2} = x \pm iy,\ l_{3,4} = 1 \pm ix - y$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -a - ib,\ \alpha_4 = -a + ib$.

In case (iii) we find an integrating factor of the Darboux form

$$\mu = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} l_3^{\alpha_3} l_4^{\alpha_4},$$

where $l_{1,2} = x \pm iy,\ l_{3,4} = 1 \pm ix - y$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = (d - 2a + 6)/(2a - 2),\ \alpha_3 = \alpha_4 = (4a + d)/(2 - 2a)$.

If condition (vi) holds then cubic system (1) has six invariant straight lines two of which are homogeneous invariant straight lines. We find the first Darboux integral of the form

$$l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} l_3^{\alpha_3} l_4^{\alpha_4} l_5^{\alpha_5} l_6^{\alpha_6} = C,$$

where $l_{1,2} = x \pm iy,\ l_{3,4} = 1 \pm ix - y,\ l_5 = 1 + (i - ia - b)x + (1 - a + ib)y,\ l_6 = 1 + (-i + ia - b)x + (1 - a - ib)y$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = (a-2)^2 - b^2,\ \alpha_{3,4} = 1 - 2 \mp ib,\ \alpha_{5,6} = 3a - a^2 - 2 - b^2 \mp ib$.

Theorem 2. *Suppose cubic system (1) has at least four invariant straight lines two of which are homogeneous. Then the origin $O(0,0)$ is a center for (1) if and only if $L_1 = L_2 = 0$.*

Proof. We compute the first two Lyapunov quantities L_1 and L_2 for (1) by algorithm proposed in [13] assuming that one set of conditions (e1)–(e3) holds. In the expressions of L_j, we will neglect the denominators and non-zero factors.

In case (e1) the vanishing of L_1 gives $q = 0$, then use Lemma 1, (i).

In case (e2) we find $L_1 = 0$, then use Lemma 1, (ii).

In case (e3) the first Lyapunov quantity is $L_1 = c(a-1) - b(d+2)$. Assume $b = 0$. If $c = 0$, then $L_1 = 0$ and use Lemma 1, (iii). If $c \neq 0, a = 1$, then $L_1 = 0$ and use Lemma 1, (iv).

Assume $b \neq 0$, then $L_1 = 0$ yields $d = (ac - 2b - c)/b$. The second Lyapunov quantity is $L_2 = c(2b + c)$. If $c = 0$, then $L_2 = 0$ and use Lemma 1, (v). If $c \neq 0$ and $c = -2b$, then $L_2 = 0$ and use Lemma 1, (vi).

4. Three invariant straight lines and centers

In this section we find conditions for the existence of three invariant straight lines two of which are homogeneous and solve the problem of the center.

Theorem 3. *Cubic system (1) has three invariant straight lines of the form*

$$l_{1,2} \equiv x \pm iy = 0, \ l_3 \equiv 1 - x = 0 \qquad (13)$$

if and only if the following set of conditions is satisfied

$$\begin{aligned} &f = a + d, \ g = b + c, \ k = -a, \\ &m = -c - 1, \ l = d + q, \ r = 0, \\ &p = -a - d, \ n = c + s + 1. \end{aligned} \qquad (14)$$

Proof. Assume condition (7) holds and let cubic system (1) have one nonhomogeneous invariant line of the form $1 + Ax + By = 0$. This line is real, otherwise, we must have also the invariant straight line $1 + \bar{A}x + \bar{B}y = 0$. The problem of the center for cubic system (1) with four invariant straight lines two of which are homogeneous was considered in Section 3. Via a rotation of axes about the origin and under the transformation $x \to \gamma x, \ y \to \gamma y, \ \gamma \in R \setminus 0$, the invariant line $1 + Ax + By = 0$ becomes $1 - x = 0$. For $1 - x = 0$ identity (4) gives $k = -a, \ m = -c - 1, \ p = -f, \ n = s - m$ and we obtain set of conditions (14). The cofactor of $l_3 \equiv 1 - x = 0$ is $K_3(x, y) = -y - ax^2 - (c + 1)xy - (a + d)y^2$.

Lemma 2. *The following three sets of conditions are sufficient conditions for the origin to be a center for system (1):*

(i) $d = l = m = q = r = 0, \ c = -1, \ f = a, \ k = p = -a, \ g = b - 1, \ n = s$;

(ii) $c = -2, \ d = r = 0, \ q = f = l = a, \ g = b - 2, \ m = 1, n = s - 1, \ k = p = -a$;

(iii) $b = m = 1/2, \ c = (-3)/2, \ f = a + d, \ g = -1, \ k = -a, \ r = 0, \ l = (a + d)/2, \ p = -(a + d), \ q = (a - d)/2, \ s = (2n + 1)/2$.

Proof. If either condition (i) or (ii) holds, then cubic system (1) has three invariant straight lines of form (13). We find a Darboux integrating factor of the form

$$\mu = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} l_3^{\alpha_3}$$

with $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$ in case (i) and $\alpha_1 = \alpha_2 = -1, \ \alpha_3 = -2$ in case (ii).

If (iii) holds then cubic system (1) with invariant straight lines (13) is rationally reversible. Indeed, in this case there exists a transformation [6] $X = 2x/(2 - x), \ Y = 2y/(2 - x)$ that brings system (1) to the system

$$\begin{aligned} &\dot{X} = (4 - X^2)(Y + aX^2 + (a + d)Y^2), \\ &\dot{Y} = -X(4 + 4dY + (4n + 1)X^2 + \\ &\quad + (4n + 2)Y^2 + aX^2Y + (a + d)Y^3) \end{aligned}$$

for which $X = 0$ is an axes of symmetry. The obtained system has a center at $X = Y = 0$ and hence the origin is a center for (1).

Lemma 3. *The following two sets of conditions are sufficient conditions for the origin to be a center for system (1):*

(i) $a = d = f = k = l = p = q = r = 0, \ g = b + c, \ m = -c - 1, \ n = c + s + 1$;

(ii) $f = a + d, \ g = b + c, \ k = -a, \ m = -c - 1, \ l = bd - a(c+1), \ n = [(c+1)(bd - a(c+2))]/d, \ q = d(b-1) - a(c+1), \ p = -a - d, \ s = [(c+1)(d(b-1) - a(c+2))]/d, \ r = 0$.

Proof. In these two cases the system (1) has four invariant straight lines and the Darboux first integral

$$(x^2 + y^2) l_3^{\alpha_3} l_4^{\alpha_4} = C.$$

In case (i): $l_3 = 1 - x, \ l_4 = 1 + (c + 1)x$ and $\alpha_3 = -2(b + c + s + 1)/(c + 2), \ \alpha_4 = 2(b + bc - c - s - 1)/((c + 1)(c + 2))$, where $(c + 1)(c + 2) \neq 0$.

In (ii): $l_3 = 1 - x, \ l_4 = 1 + (c + 1)x + dy$ and $\alpha_3 = 2(a + ac - bd)/d, \ \alpha_4 = 2a/d$, where $d \neq 0$.

Theorem 4. *Suppose cubic system (1) has three invariant straight lines of form (13). Then the origin O(0, 0) is a center for (1) if and only if* $L_j = 0, \ j = \overline{1, 7}$.

Proof. We compute the first seven Lyapunov quantities for (1) by algorithm proposed in [13] assuming that set of conditions (13) holds. In the expressions of $L_j, \ j =$

$\overline{1,7}$, we will neglect the denominators and nonzero factors.

The vanishing of the first Lyapunov quantity gives $q = bd - ac - a - d$. The second Lyapunov quantity looks like $L_2 = f_1 f_2$, where

$f_1 = a(c+1)(c+2) - d(c+1)(b-1) + ds,$
$f_2 = 4b + 2c + 1.$

If $f_1 = 0$ and $d = 0$, we find $a(c+1)(c+2) = 0$. If $a = 0$, then use Lemma 3, (i); if $a \neq 0,\ c = -1$, then use Lemma 2, (i); if $a \neq 0,\ c = -2$, then use Lemma 2, (ii).

If $f_1 = 0$ and $d \neq 0$, we have $s = [(c+1)(d(b-1) - a(c+2))]/d$. In this case the origin is a center by Lemma 3, (ii).

Assume $f_1 \neq 0$ and let $f_2 = 0$, then $b = -(1+2c)/4$. The third Lyapunov quantity looks like $L_3 = g_1 g_2$, where $g_1 = 2c + 3$ and

$g_2 = 48a^2 + 40ad + 2c + 8d^2 + 8s + 3.$

If $g_1 = 0$, then use Lemma 2, (iii) and if $g_1 \neq 0$, $g_2 = 0$, then $s = -(48a^2 + 40ad + 2c + 8d^2 + 3)/8$. In this case $L_4 = h_1 h_2$, where

$h_1 = 4(2a+d)^2 + 1,$
$h_2 = 80a^2 + 88ad - 2c^2 - 6c + 22d^2 - 5.$

It is evident that $h_1 = 0$ has no real solutions. In the next three Lyapunov quantities the factor h_1 will be omitted. Next we reduce the Lyapunov quantities L_5, L_6 by h_2, and L_7 by h_2 and L_5. We have

$$L_5 = 1280a^4 + 1536a^3 d + 384a^2 d^2 - 416a^2 - 128ad^3 - 480ad - 48d^4 - 136d^2 + 1,$$

$$L_6 = L_5(1488a^2 + 1480ad - 66c + 368d^2 - 79),$$

$$L_7 = 20971520a^8 - 45132ad + 31457280a^7 d + 15728640a^6 d^2 - 12684d^2 - 11390976a^6 + 2621440a^5 d^3 + 69264ad^3 - 15857664a^5 d - 6986752a^4 d^2 + 1641728a^4 - 952832a^3 d^3 + 2085312a^3 d + 773312a^2 d^2 - 42320a^2 + 93.$$

The system $h_2 = L_5 = L_6 = L_7 = 0$ has no real solutions. Note that $h_2 = L_5 = 0$ (i.e. $h_2 = L_5 = L_6 = 0$) has real solutions.

Indeed, if we assume $a = 0$, then it is evident that the system $h_2 = 22d^2 - 2c^2 - 6c - 5 = 0$, $L_5 = 1 - 136d^2 - 48d^4 = 0$ has real solutions. Hence, the vanishing of the Lyapunov quantities $L_j,\ j = \overline{1,6}$ does not imply the origin to be a center for (1). Theorem is proved.

We summarize necessary and sufficient conditions for the origin to be a center in the following theorem.

Theorem 5. *The origin is a center for (1), with at least three invariant straight lines two of which are homogeneous, if and only if one of the conditions of Lemmas 1–3 holds.*

5. Two homogeneous invariant straight lines and centers

In this section assuming that cubic system (1) has two homogeneous invariant straight lines we find sufficient conditions for the origin to be a center for (1).

Lemma 4. *The following three sets of conditions are sufficient conditions for the origin to be a center for system (1):*

(i) $c = -2b,\ d = -2a,\ f = -a,\ n = 2r - m,\ g = -b,\ p = -l,\ q = -k,\ s = r;$

(ii) $a = d = f = 0,\ g = b + c,\ k = l,\ m = (2br + cn - cr)/(2b),\ p = q = [l(b+c)]/b,\ s = (2bn + cn - cr)/(2b);$

(iii) $c = (bd)/a,\ f = a + d,\ g = [b(a+d)]/a,\ p = q = [l(a+d)]/a,\ k = l,\ m = (2ar + dn - dr)/(2a),\ s = (2an + dn - dr)/(2a).$

Proof. Assume condition (7) is satisfied, then cubic system (1) has two homogeneous invariant straight lines of the form $x \pm iy = 0$. We find the integrating factor of the form

$$\mu = (x+iy)^{\alpha_1}(x-iy)^{\alpha_2}.$$

In case (i): $\alpha_2 = \alpha_1 = -2$; in case (ii): $\alpha_2 = \alpha_1 = (c-2b)/(2b)$; in case (iii): $\alpha_2 = \alpha_1 = (d-2a)/(2a)$.

Lemma 5. *The following four sets of conditions are sufficient conditions for the origin to be a center for system (1):*

(i) $b = c = g = k = l = p = q = 0,\ f = a + d,\ r = m + n - s;$

(ii) $b = [a(1-u^2)]/(2u),\ c = [d(1-u^2)]/(2u),\ g = [(a+d)(1-u^2)]/(2u),\ n = [(q-3k)(u^4 - 6u^2 + 1) + 4m(u^3 - u)]/[4u(u^2-1)],\ l = k,\ f = a + d,\ r = [(q-k)(u^4 - 6u^2 + 1) + 4m(u^3 - u)]/[4u(u^2-1)],\ p = q,\ s = [k(6u^2 - u^4 - 1) + 2mu(u^2-1)]/[2u(u^2-1)];$

(iii) $c=-3b$, $f=a+d$, $g=-2b$, $k=-2ab$, $l=b(a+d)$, $m=2b^2$, $p=-2b(a+d)$, $q=b(a-d)$, $r=0$, $s=2b^2+n$;

(iv) $c=[(3a+d)(1-u^2)-6bu]/(2u)$, $g=[(3a+d)(1-u^2)-4bu]/(2u)$, $l=[a(3a+d)(u^2-1)+2(3ab+bd+k)u]/(2u)$, $m=[r(u^2+1)^4+2(au^2-a+2bu)((5a+2d)(u^6-1)+(11a-2d)(u^2-u^4)+b(10u^5-12u^3+10u))]/(u^2+1)^4$, $s=[n(u^2+1)^4+2(au^2-a+2bu)((5a+2d)(u^6-1)+(11a-2d)(u^2-u^4)+b(10u^5-12u^3+10u))]/(u^2+1)^4$, $f=a+d$, $q=[2pu+(3a+d)(au^2-a+2bu)]/(2u)$, $r=[2(5ab+bd+k)(u^{11}-u)+2(4b^2-9a^2-3ad)(u^{10}+u^2)+a(3a+d)(u^{12}+1)+2(3k-5bd-33ab)(u^9-u^3)+(61a^2-ad-64b^2)(u^8+u^4)+4(45ab-3bd+k)(u^7-u^5)+4(28b^2-23a^2+3ad)u^6]/[4u^2(u^2+1)^4]$, $n=[2(k-10ab-2bd)(u^9+u)+8(10ab+k)(u^7+u^3)+2(14a^2+ad-12b^2)(u^8-u^2)+4(10b^2+ad-8a^2)(u^6-u^4)+4(3k-14ab+2bd)u^5+2a(2a+d)(1-u^{10})]/[(u^2+1)^4(u^2-1)]$, $p=[(12ab+2bd+k)(u^9+u)+(12b^2-5ad-19a^2)(u^8-u^2)+4(k-16ab-2bd)(u^7+u^3)+2(21a^2-3ad-26b^2)(u^6-u^4)+a(3a+d)(u^{10}-1)+2(52ab-10bd+3k)u^5]/[u(u^2+1)^4]$.

Proof. If one of conditions (i)–(iv) holds, the cubic system is rationally reversible. We find a transformation of the form [6]

$$x=\frac{a_1X+b_1Y}{a_3X+b_3Y-1},\ y=\frac{a_2X+b_2Y}{a_3X+b_3Y-1}$$

with $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$ and $a_j,\ b_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2,3$ which brings system (1) to one equivalent with a polynomial system

$$\begin{aligned}\dot X&=Y+M(X^2,Y),\\ \dot Y&=-X(1+N(X^2,Y)).\end{aligned}$$

The obtained system has an axis of symmetry $X=0$ and therefore $O(0,0)$ is a center for (1).

In case (i): $x=X/(Y+1)$, $y=Y/(Y+1)$; in case (ii): $x=(2uX-u^2Y+Y)/[(u^2+1)(Y-1)]$, $y=(2uY+u^2X-X)/[(u^2+1)(Y-1)]$; in case (iii): $x=X/(1+bX)$, $y=Y/(1+bX)$; in case (iv): $x=(2uX-u^2Y+Y)/[(au^2+2bu-a)X-u^2-1]$, $y=(2uY+u^2X-X)/[(au^2+2bu-a)X-u^2-1]$.

Acknowledgements. This research was supported by FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338.

REFERENCES

1. *Amel'kin, V.V., Lukashevich, N.A., Sadovsky, A.P.*, Non-linear oscillations in the systems of second order// Minsk. –1982 (in Russian).

2. *Cozma, D., Şubă, A.*, Partial integrals and the first focal value in the problem of centre// Nonlinear Differ. Equ. and Appl. –1995. – **2**,–P. 21–34.

3. *Cozma, D., Şubă, A.*, The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines// Scientific Annals of the "Al.I.Cuza"University, Mathematics. –1998. – **XLIV**, s.I.a. – P. 517–530.

4. *Cozma, D.*, The problem of the center for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one invariant conic// Nonlinear Differ. Equ. and Appl. –2009. –**16**. – P. 213–234.

5. *Cozma D.*, Center problem for cubic systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant conic// Bull. of Acad. of Sci. of Moldova. Mathematics. –2012. –**68**, no.1. –P.32–49.

6. *Cozma D.*, Rationally reversible cubic systems// Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Series Mathematics. –2012. –**2**. –P. 114–119.

7. *Cozma, D., Şubă, A.*, Solution of the problem of the centre for a cubic differential system with three invariant straight lines// Qualitative Theory of Dynamical Systems. –2001. –**2**, no.1. –P. 129–143.

8. *Lyapunov, A. M.*, Probléme général de la stabilité du mouvement// Ann. of Math. Stud. –1947. –**17**. Princeton University Press.

9. *Poincaré, H.*, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle// Oeuvres de Henri Poincaré. –1951. –**1**, Gauthiers–Villars, Paris.

10. *Sadovskii, A.P.* Solution of the center and focus problem for a cubic system of nonlinear oscillations// Differ. Equa. –1997. –**33**, no.2. – P. 236–244.

11. *Sadovskii, A.P.* Solution of the center-focus problem for a cubic system reducible to a Lienard system// Differen. Uravn. –2006. –**42**, no.1. – P. 11–22.

12. *Sadovskii, A.P., Shcheglova T.V.* Solution of the center-focus problem for a nine-parameter cubic system// Differ. Equa. –2011. –**47**, no.2. – P. 208–223.

13. *Şubă, A.*, On the Liapunov quantities of two-dimensional autonomous system of differential equations with a critical point of centre or focus type// Bulletin of Baia Mare University, Math. and Infor. – 1998. –**13**. –P. 153—170.

14. *Şubă, A., Cozma, D.*, Solution of the problem of center for cubic differential systems with three invariant straight lines in generic position// Qualitative Theory of Dynamical Systems. –2005. –**6**. – P. 45–58.