УДК 517.51

©2013р. О. В. Маслюченко, Д. П. Онипа

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГРАНИЧНІ КОЛИВАННЯ ЛОКАЛЬНО СТАЛИХ ФУНКЦІЙ

В даній роботі встановлюється, що кожна невід'ємна неперервна функція, яка визначена на замкненій ніде не щільній множині без ізольованих точок, є граничним коливанням деякої локально сталої функції, що визначена на доповненні до цієї множини.

In this paper we prove that every nonnegative continuous function defined on a closed nowhere dense subset of the reals without isolated points is the limiting oscillation of some locally constant function defined on the complement to this set.

Вступ. Перший результат про побудову функцій із заданим коливанням був одержаний П. Костирком [1]. Він довів, що для довільної напівнеперервної зверху функції $f : X \to [0; +\infty]$, що визначена на метризовному берівському просторі X без ізольованих точок, існує функція $g : X \to \mathbb{R}$, коливання ω_g якої рівне f. Пізніше його дослідження були продовжені З. Дужинським, З. Гранде, С. Пономарьовим і Й. Евертом у працях [2-4]. Загальнішу задачу про побудову функцій з певного функціонального класу з даним коливанням детально вивчена в роботах [5-9].

Проте у згаданих працях розглядалися функції, що визначені на всьому просторі. Але для функцій, що визначені на підмножинах певного топологічного простору коливання природно розглядати на замиканні їх області визначення. Якщо G – деяка відкрита підмножина топологічного простору X і $g : G \to \mathbb{R}$ – деяка функція, то її коливання $\omega_g : \overline{G} \to [0; +\infty]$ визначається формулою

$$\omega_g(x) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup_{u,v \in U \cap G} |g(u) - g(v)|, x \in \overline{G}.$$

Таким чином, раніше вивчалися тільки звуження $\omega_g|_G$ коливання на область визначення функції g. Але актуально дослідити також і поведінку функції g на межі $F = \overline{G} \setminus G$. Звуження $\widetilde{\omega}_g = \omega_g|_F$ ми називатимемо *граничним коливанням.* В даній роботі ми розпочинаємо вивчення наступної загальної проблеми.

Проблема 1. *Нехай X – топологічний простір, P – деяка властивість функцій, G – відкрита підмножина X і $F = \overline{G} \setminus G$. Для яких функцій $f : F \to [0; +\infty]$ існує функція $g : G \to \mathbb{R}$, яка має властивість P і $\widetilde{\omega}_g = f$?*

Зрозуміло, що граничне коливання $\widetilde{\omega}_g$, так само як і звичайне коливання ω_g, є напівнеперервною зверху невід'ємною функцією. Цікаво з'ясувати, чи можуть певні жорсткі локальні умови на функцію g зумовлювати специфічну поведінку функції на межі F. А саме нас цікавитиме наступна задача.

Проблема 2. *Нехай G – відкрита всюди щільна підмножина $\mathbb{R}$ і $F = \overline{G} \setminus G$ – її межа. Для яких напівнеперервних зверху функцій $f : F \to [0; +\infty]$ існує локально стала функція $g : G \to \mathbb{R}$, для якої $\widetilde{\omega}_g = f$?*

У даній роботі ми розв'яжемо цю задачу для неперервних функцій f.

1. Допоміжні твердження. Для замкненої множини $F \subseteq \mathbb{R}$ і точки $x \in \mathbb{R} \setminus F$ символом $U_F(x)$ позначатемемо компоненту зв'язності точки x в $\mathbb{R} \setminus F$ [10, с. 523]. Насправді множина $U_F(x)$ – це інтервал суміжності множини F, тобто максимальний інтервал, що містить точку x і не перетинається з F. Позначимо

$$\mathcal{U}_F = \{U_F(x) : x \in \mathbb{R} \setminus F\}.$$

Таким чином $\mathcal{U}_F$ є диз'юнктною системою відкритих непорожніх інтервалів, причому $\bigcup \mathcal{U}_F = \mathbb{R} \setminus F$.

Лема 1. *Нехай A – нескінченна лінійно впорядкована множина. Тоді в A існує строго монотонна послідовність елементів.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли A є цілком впорядкованою множиною. Тоді кожна її непорожня підмножина має мінімальний елемент. Візьмемо $A_1 = A$. Тоді A_1 нескінченна, а значить, непорожня, а тому існує $x_1 = \min A_1$. Позначимо $A_2 = A_1 \setminus \{x_1\}$. Оскільки A_1 нескінченна, то такою буде і множина A_2. Значить, множина A_2 непорожня і тому існує $x_2 = \min A_2$. Але $x_2 \in A_2 \subseteq A_1$ і $x_1 = \min A_1$, тому $x_2 \geq x_1$. А оскільки $x_2 \in A_2$ і $x_1 \notin A_2$, то $x_1 \neq x_2$. Отже, $x_2 > x_1$. Далі позначимо $A_3 = A_2 \setminus \{x_2\}$. Знову ж таки, з того, що A_2 є нескінченною випливає, що нескінченною буде і множина A_3. Значить, $A_3 \neq \emptyset$, і тому існує $x_3 = \min A_3$. Оскільки $A_3 \subseteq A_2$ і $x_2 \notin A_3$, то $x_3 > x_2$. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо строго зростаючу послідовність точок x_n множини A.

Нехай тепер A не є цілком впорядкованою множиною. Тоді існує непорожня множина $E \subseteq A$ така, що для довільного $x \in E$ існує $y \in E$ таке, що $y < x$. Використавши цю властивість для деякої фіксованої точки $x = x_1 \in E$ знайдемо $y = x_2 \in E$ таке, що $x_2 < x_1$. Далі використавши цю ж властивість для $x = x_2$ побудуємо $y = x_3$ таке, що $x_3 < x_2$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, будуємо спадну послідовність точок $x_n \in E \subseteq A$.

Нагадаємо, що підмножина F числової прямої $\mathbb{R}$ називається *досконалою*, якщо вона є замкненою і не має ізольованих точок.

Лема 2. *Нехай $F \subseteq \mathbb{R}$ – досконала ніде не щільна множина, U – відкрита в $\mathbb{R}$ множина, така, що $U \cap F \neq \emptyset$. Тоді множина $\mathcal{U}_F(U) = \{V \in \mathcal{U}_F : V \subseteq U\}$ нескінченна.*

Доведення. Виберемо непорожній відкритий інтервал $U_0 \subseteq U$ такий, що $U_0 \cap F \neq \emptyset$. Оскільки F не містить ізольованих точок, то множина $F_0 = U_0 \cap F$ нескінченна. За лемою 1 існує строго монотонна послідовність (x_n) в F_0. Нехай, для певності, (x_n) строго зростає. Тоді інтервали $U_n = (x_n; x_{n+1})$ непорожні, причому $U_n \cap U_m = \emptyset$ при $n \neq m$ і $U_n \subseteq U_0$. Оскільки F ніде не щільна, то для довільного n інтервал $U_n \nsubseteq F$, а тому існує y_n таке, що $y_n \in U_n$ і $y_n \notin F$. Покладемо $V_n = U_F(y_n)$. Оскільки інтервал V_n містить y_n, але не містить точки x_n та x_{n+1}, то $V_n \subseteq U_n$. Тому $V_n \cap V_m = \emptyset$ при $n \neq m$. Зокрема, $V_n \neq V_m$ при $n \neq m$ і $\mathcal{U}_F(U) \supseteq \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Значить, система множин $\mathcal{U}_F(U)$ нескінченна.

Лема 3. *Нехай $F \subseteq \mathbb{R}$ досконала ніде не щільна множина. Тоді існують системи множин $\mathcal{V}_F$ і $\mathcal{W}_F$ такі, що*
(i) $\mathcal{U}_F = \mathcal{V}_F \sqcup \mathcal{W}_F$;
(ii) для довільного $x \in F$ і його околу U існують $V \in \mathcal{V}_F$ і $W \in \mathcal{W}_F$ такі, що $V, W \subseteq U$.

Доведення. Виберемо зліченну множину E таку, що $\overline{E} = F$, і занумеруємо

$$E \times \{\tfrac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\} = \{(x_n, \varepsilon_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Покладемо $U_n = (x_n - \varepsilon_n; x_n + \varepsilon_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зараз індуктивно визначимо послідовність різних множин $V_n, W_n \in \mathcal{U}_F$ таких, що $V_n, W_n \subseteq U_n$. Припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{N}$ уже визначені множини V_k, W_k для $k < n$. За лемою 2 система множин $\mathcal{U}_F(U_n)$ є нескінченною. Виберемо різні множини $V_n, W_n \in \mathcal{U}_F(U)$ такі, що $V_n, W_n \notin \{V_k : k < n\} \cup \{W_k : k < n\}$. Тоді всі V_k і W_k при $k \leq n$ є різними, причому $V_k, W_k \subseteq U_k$ при $k \leq n$. Чим і завершується індуктивна побудова.

Покладемо $\mathcal{V}_F = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $\mathcal{W}_F = \mathcal{U}_F \setminus \mathcal{V}_F$. Перевіримо, що системи шукані.

Властивість (i) випливає з побудови. Доведемо (ii). Візьмемо $x_0 \in F$ і відкритий окіл U точки x_0. Оскільки $\overline{E} = F$, то існує $x \in E \cap U$. Виберемо $m \in \mathbb{N}$ таке, що $(x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}) \subseteq U$. Потім знайдемо $n \in \mathbb{N}$, для якого $x_n = x$ і $\varepsilon_n = \frac{1}{m}$. Тоді $V_n \in \mathcal{V}_F$, $W_n \in \mathcal{W}_F$ і $V_n, W_n \subseteq U_n = (x_n - \frac{1}{m}, x_n + \frac{1}{m})$. А тому $V_n, W_n \subseteq U$.

2. Основний результат. Нехай X – топологічний простір, $G \subseteq X$ і $g : G \to \overline{\mathbb{R}}$, де $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$. *Верхня та нижня граничні функції* $g^\vee, g^\wedge : \overline{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ визначаються формулами

$$g^{\vee}(x) = \limsup_{u\to x} f(u) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup_{u\in U\cap G} f(u),$$

$$g^{\wedge}(x) = \liminf_{u\to x} f(u) = \sup_{U\text{- окіл } x} \inf_{u\in U\cap G} f(u).$$

Як відомо

$$\omega_g(x) = g^{\vee}(x) - g^{\wedge}(x),$$

якщо $x \in \overline{G}$ таке, що $g^{\vee}(x) > -\infty$ і $g^{\wedge}(x) < +\infty$.

Ми скористаємося цією формулою при доведенні наступної теореми, що є основним результатом цієї роботи.

Теорема. *Нехай* $F \subseteq \mathbb{R}$ *– досконала ніде не щільна множина,* $G = \mathbb{R} \setminus F$ *і* $f : F \to [0; +\infty]$ *– неперервна функція. Тоді існує локально стала функція* $g : G \to [0; +\infty)$ *така, що* $\widetilde{\omega}_g = f$.

Доведення. Оскільки нескінченний відрізок $[0; +\infty]$ гомеоморфний відрізку $[0; 1]$, то за теоремою Тітце-Урисона [10, с. 116] існує неперервна функція $f_1 : \mathbb{R} \to [0; +\infty]$ така, що $f_1(x) = f(x)$ на F. Далі за теоремою Веденісова [10, с. 82] існує неперервна функція $f_2 : \mathbb{R} \to [0; +\infty]$ така, що $F = f_2^{-1}(+\infty)$. Визначимо неперервну функцію $f_0 : \mathbb{R} \to [0; +\infty]$ за правилом

$$f_0(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$$

для довільного $x \in \mathbb{R}$. Тоді $f_0(x) = f(x)$ на F і $f_0(x) < +\infty$ на G, адже $f_0(x) \le f_2(x)$. Далі виберемо $\mathcal{V}_F$ і $\mathcal{W}_F$ згідно з лемою 3. Для довільного $U \in \mathcal{U}_F = \mathcal{V}_F \sqcup \mathcal{W}_F$ покладемо

$$h_U = \begin{cases} \inf f_0(U), & \text{якщо } U \in \mathcal{V}_F, \\ 0 & \text{, якщо } U \in \mathcal{W}_F. \end{cases}$$

Визначимо функцію $g : G \to [0; +\infty)$, покладаючи $g(x) = h_U$ при $x \in U$ для довільного $U \in \mathcal{U}_F$. Перевіримо, що функція g шукана. Оскільки $\omega_f = f^{\vee} - f^{\wedge}$, то досить показати, що $g^{\wedge}(x) = 0$ і $g^{\vee}(x) = f(x)$ на F.

Виберемо довільне $x_0 \in F$. Ясно, що $0 \le g(x) \le f_0(x)$ на G. Оскільки f_0 неперервна, то $f_0 = f_0{}^{\vee}$. Тому $0 \le g^{\wedge}(x_0) \le$ $\le g^{\vee}(x_0) \le f_0{}^{\vee}(x_0) = f_0(x_0) = f(x_0)$. Покажемо, що $g^{\wedge}(x_0) \le 0$. Розглянемо окіл U точки x_0. За вибором системи $\mathcal{W}_F$ існує $W \in \mathcal{W}_F$ таке, що $W \subseteq U$. Візьмемо $x_1 \in W$. Для нього маємо, що $\inf g(U) \le g(x_1) = h_W = 0$. Тому $g^{\wedge}(x_0) = \sup\limits_{U\text{- окіл } x_0} \inf g(U) \le 0$.

Доведемо тепер, що $g^{\vee}(x_0) \ge f(x_0)$. Зафіксуємо $\gamma < f(x_0)$ і перевіримо, що $g^{\vee}(x_0) \ge \gamma$. З неперервності f_0 випливає, що існує такий окіл U_0 точки x_0, що для довільного $x \in U_0$ виконується, що $f_0(x) > \gamma$. Розглянемо довільний окіл U точки x_0. За вибором $\mathcal{V}_F$ існує $V \in \mathcal{V}_F$ таке, що $V \subseteq U \cap U_0$. Далі візьмемо $x_2 \in V$. Тоді $g(x_2) = h_V = \inf f_0(V) \ge \inf f_0(U_0) \ge \gamma$. А тому $\sup g(U) \ge g(x_2) \ge \gamma$. Таким чином, $g^{\vee}(x_0) = \inf\limits_{U\text{- окіл } x_0} \sup g(U) \ge \gamma$. Попрямувавши в попередній нерівності $\gamma \to f(x_0)$ отримаємо, що $g^{\vee}(x_0) \ge f(x_0)$. Таким чином, $\widetilde{\omega}_g(x_0) = g^{\vee}(x_0) - g^{\wedge}(x_0) = f(x_0) - 0 = f(x_0)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kostyrko P.* Some properties of oscilation // Math. Slovaca. – 1980. – **30.** – P.157–162.
2. *Duszynski Z.* On the ω–primitives // Math. Slovaka. – 2001. – **51**. – P.469–476.
3. *Ewert J., Ponomarev S.* Oscillation and ω–primitives // Real Anal. Exchange. – 2001–2002. – **26**. – P. 687–702.
4. *Ewert J., Ponomarev S.* On the existance of ω-primitives on arbitrary metric spaces // Math. Slovaca. – 2003. – **53**. – P.51–57.
5. *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних та різні аналоги компактних операторів: Дис...докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. - Чернівці, 2012. - 300 с.
6. *Maslyuchenko O.V.* The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces // Houston Journal of Mathematics. 2009. - **35**, N1. - P.113-130.
7. *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних: коливання суми функцій // Математичний вісник НТШ. – **5**. – 2008. – С.151–163.
8. *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних: сильно досяжні простори // Математичний вісник НТШ. – **6**. – 2009. – С.155–178.
9. *Маслюченко О.В.* Коливання нарізно локально ліпшицевих функцій // Карпатські математичні публікації.–2011.–**3**, N1.–С.22–33.
10. *Энгелькинг Р.* Общая топология // Москва: Мир, 1986. – 752с.