УДК 515.12, 517.51

©2013 р. О.Д. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПЛОЩИНІ СІДРА

Досліджено множину точок неперервності нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{M}$, визначених на добутку зв'язних топологічних просторів зі значеннями в площині Сідра $\mathbb{M}$.

We investigate the continuity points set of separately continuous mappings $f : X_1 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{M}$ defined on a product of connected topological spaces with values in the Ceder plane $\mathbb{M}$.

1. Вступ. З кінця XX століття активно ведуться дослідження сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ та їх аналогів зі значеннями в неметризовних просторах. Важливими типами просторів близьких до метризовних є індуктивні границі, σ-метризовні та сильно σ-метризовні простори, простори Мура, вичерпні та напіввичерпні простори. Множина $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями в згаданих просторах, крім вичерпних та напіввичерпних, вже досить добре вивчена. Отримано також деякі результати про нарізно неперервні відображення зі значеннями в конкретних напіввичерпних просторах, таких як $C_p[0,1]$ та площина Бінґа [1,2]. Дж.Сідр [3] навів цікавий приклад неметризовного вичерпного простору, який ми називаємо площиною Сідра і позначаємо $\mathbb{M}$. Узагальнення цієї конструкції вивчалося в [4-6]. Тому природно постало питання про дослідження точок розриву нарізно неперервних відображень зі значеннями у площині Сідра, що і здійснюється в даній статті.

2. Зв'язні множини та їх властивості. У цьому підрозділі ми введемо потрібні для нас поняття, що стосуються зв'язності, і доведемо деякі факти про компоненти зв'язності.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *зв'язним*, якщо його неможливо подати у вигляді диз'юнктного об'єднання $A \sqcup B$ двох непорожніх відкритих в X множин. Підмножина E простору X називається *зв'язною*, якщо підпростір E простору X з індукованою з X топологією є зв'язним.

Ми будемо використовувати такий факт.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{A}$ – система зв'язних підмножин топологічного простору X, B – зв'язна підмножина простору X, така, що $B \subseteq S = \bigcup \mathcal{A}$ і $B \cap A \neq \varnothing$ для довільної множини A з $\mathcal{A}$. Тоді і S – це зв'язна множина.*

Доведення. Нехай E – непорожня відкрито-замкнена множина в підпросторі S. Покажемо, що $E = S$, звідки і буде випливати зв'язність S.

Оскільки, $E \neq \varnothing$, то існує точка $x_0 \in E$. Але $E \subseteq S$, тому і $x_0 \in S$, а значить, існує елемент $A_0 \in \mathcal{A}$, такий, що $x_0 \in A_0$. Перетин $A_0 \cap E$ непорожній, бо $x_0 \in A_0 \cap E$, причому $A_0 \cap E$ – це відкрито-замкнена підмножина зв'язної множини A_0. Тому $A_0 \cap E = A_0$, тобто $A_0 \subseteq E$. Але $B \cap A_0 \neq \varnothing$ за умовою, отже, і $E \cap B \neq \varnothing$. Оскільки множина E відкрито-замкнена в S і $B \subseteq S$, то $E \cap B$ буде відкрито-замкненою множиною в B. Але і множина B зв'язна, отже, $E \cap B = B$, тобто $B \subseteq E$. Нехай A – довільний елемент з $\mathcal{A}$. За умовою $A \cap B \neq \varnothing$, а значить $A \cap E \neq \varnothing$, звідки негайно випливає, що $A \cap E = A$, тобто $A \subseteq E$. В такому разі і $S = \bigcup \mathcal{A} \subseteq E$, а значить і $S = E$, адже $E \subseteq S$.

Зауважимо, що умова $B \subseteq S$ в лемі 1 істотна. Справді, розглянемо на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ систему $\mathcal{A}$ зв'язних множин $A_x = \{x\} \times [0, +\infty)$, де x пробігає множину $X_0 =$

$[0,1]\cup[2,3]$, а за B візьмемо зв'язну множину $[0,3]\times\{0\}$. Ясно, що $A_x\cap B=\{(x,0)\}$ для кожного $x\in X_0$, отже, $A\cap B\neq\varnothing$ для кожного $A\in\mathcal{A}$. Але множина

$$S=\bigcup\mathcal{A}=\bigcup_{x\in X_0}A_x=X_0\times[0,+\infty)=$$

$$=([0,1]\times[0,+\infty))\sqcup([2,3]\times[0,+\infty)),$$

очевидно, не зв'язна, адже тут $B\nsubseteq S$.

Слід зазначити, що лему 1 можна було б вивести і з теореми 6.1.9 монографії Р.Енгелькінга [7, с. 520], коли долучити множину B до системи $\mathcal{A}$, зауваживши при цьому, що об'єднання не зміниться, адже $B\subseteq S$. Теорему 6.1.9 можна подати в наступному еквівалентному переформулюванні, підсиливши тим самим лему 1.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{A}$ – система зв'язних підмножин топологічного простору X, B – зв'язна підмножина X, $B\subseteq S=\bigcup\mathcal{A}$ і $\overline{A}\cap B\neq\varnothing$ або $A\cap\overline{B}\neq\varnothing$ для кожного A з $\mathcal{A}$. Тоді і множина S зв'язна в X.*

Доведення. Міркуючи так само як при доведенні леми 1, візьмемо непорожню відкрито-замкнену множину E в S і доведемо, що $E=S$. Існує така множина $A_0\in\mathcal{A}$, що $A_0\cap E\neq\varnothing$, а значить, $A_0\subseteq E$. За умовою $\overline{A_0}\cap B\neq\varnothing$ або $A_0\cap\overline{B}\neq\varnothing$.

Припустимо, що $\overline{A_0}\cap B\neq\varnothing$. Оскільки $A_0\subseteq E$, то і $\overline{E}\cap B\neq\varnothing$, адже $\overline{E}\cap B\supseteq\overline{A_0}\cap B$. Зауважимо, що символом $\overline{M}$ ми позначаємо замикання множини M у просторі X. Замикання ж множини $M\subseteq S$ у підпросторі S позначимо символом $\overline{M}^S$. Як добре відомо $\overline{M}^S=\overline{M}\cap S$. У нашому випадку $\overline{E}\cap B\subseteq B\subseteq S$, отже $\overline{E}\cap B=\overline{E}\cap B\cap S=\overline{E}\cap S\cap B=\overline{E}^S\cap B=E\cap B$, адже множина E замкнена в S. Тому $E\cap B\neq\varnothing$, звідки, як і в доведенні леми 1, випливає, що $B\subseteq E$.

Нехай $A_0\cap\overline{B}\neq\varnothing$. З включення $A_0\subseteq E$ випливає, що і $E\cap\overline{B}\neq\varnothing$. Оскільки $E\subseteq S$, то $\varnothing\neq E\cap\overline{B}=E\cap S\cap\overline{B}=E\cap\overline{B}^S$. Але множина E відкрита в S. Тому з умови $E\cap\overline{B}^S\neq\varnothing$ випливає, що $E\cap B\neq\varnothing$, звідки, як і раніше, знову отримуємо, що $B\subseteq E$.

Таким чином, ми встановили, що $B\subseteq E$. Нехай тепер A – довільна множина з $\mathcal{A}$. За умовою $\overline{A}\cap B\neq\varnothing$ або $A\cap\overline{B}\neq\varnothing$. Замінюючи в попередньому міркуванні A_0 на B, а B на A, отримуємо, що $A\subseteq E$. Тому і $S\subseteq E$, а значить, $S=E$, щ.т.б.д.

Насправді нам буде потрібна тільки лема 1, а не сильніша від неї теорема 1.

Зокрема, з леми 1 легко вивести

Наслідок 1. *Нехай $\mathcal{A}$ – система зв'язних підмножин топологічного простору X, така, що $\bigcap\mathcal{A}\neq\varnothing$. Тоді об'єднання $S=\bigcup\mathcal{A}$ – це зв'язна множина.*

Доведення. Оскільки $\bigcap\mathcal{A}\neq\varnothing$, то існує така точка $x_0\in X$, що $x_0\in A$ для кожного $A\in\mathcal{A}$. Одноточкова множина $B=\{x_0\}$ зв'язна і $B\subseteq S$. Крім того, $A\cap B=\{x_0\}\neq\varnothing$ для кожного $A\in\mathcal{A}$. Отже, за лемою 1 множина S зв'язна.

3. Компоненти зв'язності. Точки x_1 і x_2 топологічного простору X назвемо *зв'язними* (позначається $x_1\sim x_2$), якщо існує така зв'язна підмножина C простору X, що $\{x_1,x_2\}\subseteq C$. Легко перевірити, що $\sim$ – це відношення еквівалентності на просторі X. Його рефлексивність випливає з того, що кожна одноточкова множина $\{x\}$ в X є зв'язною, симетричність очевидна. Транзитивність доводиться так. Нехай $x_1\sim x_2$ і $x_2\sim x_3$. Тоді існують такі зв'язні множини C_1 і C_2, що $\{x_1,x_2\}\subseteq C_1$ і $\{x_2,x_3\}\subseteq C_2$. В такому разі $x_2\in C_1\cap C_2$, отже, $C_1\cap C_2\neq\varnothing$, а тому за наслідком 1 множина $C=C_1\cup C_2$ зв'язна. Але $\{x_1,x_3\}\subseteq C$, отже, $x_1\sim x_3$.

Як добре відомо [8, теорема 2, с.43] відношення еквівалентності породжує розбиття $\mathcal{C}=\mathcal{C}(X)$ на класи еквівалентних елементів, які називаються *компонентами зв'язності простору* X. Для точки $x\in X$ та множина C з $\mathcal{C}(X)$, для якої $x\in C$, називається *компонентою зв'язності точки* x в X і позначається символом C_x. Ясно, що $C_x=\{y\in X:x\sim y\}$.

Теорема 2. *Нехай X топологічний простір, $x\in E\subseteq X$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) E – компонента зв'язності точки x в X;

(ii) E – найбільша зв'язна множина, що містить точку x.

Доведення. $(i)\Rightarrow(ii)$. Нехай $E=C_x\in$

$\mathcal{C}(X)$ і $\mathcal{C}_x$ – це система всіх зв'язних підмножин C простору X, таких, що $x \in C$. За наслідком 1 множина $\tilde{C}_x = \bigcup \mathcal{C}_x$ зв'язна. Зрозуміло з означення, що $\tilde{C}_x$ – це найбільша зв'язна в X множина, яка містить точку x. Залишилося довести, що $E = \tilde{C}_x$.

Зауважимо, що множина E є зв'язною. Справді для кожної точки $y \in E$ існує така зв'язна в X множина A_y, що $\{x, y\} \subseteq A_y$. Множина $S = \bigcup\limits_{y \in E} A_y$ буде зв'язною за наслідком 1, бо $\bigcap\limits_{y \in E} A_y \ni x$. Зрозуміло, що $S \supseteq E$, адже $y \in A_y$ для кожного $y \in C_x$. Навпаки, нехай $z \in S$. Тоді існує таке $y \in C_x$, що $z \in A_y$. В такому разі $\{x, z\} \subseteq A_y$, отже, $x \sim z$, а тому $z \in E$. Таким чином, і $S \subseteq E$, отже, $E = S$, що і дає нам зв'язність множини E.

Оскільки множина E зв'язна і $x \in E$, то $E \subseteq \tilde{C}_x$ за побудовою $\tilde{C}_x$. Навпаки, нехай $y \in \tilde{C}_x$. Тоді існує така зв'язна множина C, що містить точку x, тобто елемент з $\mathcal{C}_x$, що $y \in C$. Для цієї множини $\{x, y\} \subseteq C$, отже, $x \sim y$, тому $y \in E$.

Таким чином, $E = \tilde{C}_x$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай $C_x = \{y \in X : x \sim y\}$ – компонента зв'язності точки x в X і E – найбільша зв'язна множина в X, що містить точку x. За доведеним вище і C_x є найбільшою зв'язною множиною в X, що містить x. Зрозуміло, що така множина єдина, отже, $E = C_x$ і E – це компонента зв'язності точки x в X.

Лема 2. *Нехай $X = \bigsqcup\limits_{i \in I} X_i$, де всі X_i – це компоненти зв'язності простору X. Тоді $\mathcal{C}(X) = \{X_i : i \in I\}$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{A} = \{X_i : i \in I\}$. Ясно, що $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$. Навпаки, нехай C – якась компонента зв'язності непорожнього простору X. Тоді $C \neq \varnothing$, отже, існує елемент $x \in C$. Оскільки $X = \bigsqcup\limits_{i \in I} X_i$, то існує таке $i \in I$, що $x \in X_i$. Множина $C \cup X_i$ зв'язна за наслідком 1, бо такими є C і X_i, причому $x \in C \cap X_i$, отже, $C \cap X_i \neq \varnothing$. Крім того, $C \subseteq C \cup X_i \supseteq X_i$. Оскільки і C, і X_i – це компоненти зв'язності, то за теоремою 2 $C = C \cup X_i = X_i$, отже, $C \in \mathcal{A}$. Таким чином, $\mathcal{C}(X) = \mathcal{A}$.

Твердження 1. *Нехай X – топологічний простір, $(Y_i : i \in I)$ – сім'я непорожніх відкрито-замкнених зв'язних множин у просторі X, X_0 – непорожня зв'язна множина в X і $X = X_0 \sqcup (\bigsqcup\limits_{i \in I} Y_i)$. Тоді $\mathcal{C}(X) = \{Y_i : i \in I\} \cup \{X_0\}$.*

Доведення. Доведемо, що Y_i – компонента зв'язності простору X. Оскільки Y_i – непорожня відкрито-замкнена зв'язна множина в просторі X, то існує точка $x \in Y_i$, і нехай B – зв'язна множина в X, така, що $x \in B$. Покажемо, що $B \subseteq Y_i$. Будемо міркувати від супротивного, нехай $B \nsubseteq Y_i$. Тоді існує точка $y \in B \setminus Y_i$. Оскільки множина Y_i відкрита в X, то $B \cap Y_i$ – відкрита в B і $x \in B \cap Y_i$. Але множина Y_i, крім того, ще й замкнена в просторі X, отже доповнення до неї $X \setminus Y_i$ – відкрита множина в просторі X. Тоді $B \setminus Y_i = B \cap (X \setminus Y_i)$ – це відкрита множина в B і точка y належить до неї. Таким чином, множина B подається у вигляді диз'юнктного об'єднання двох непорожніх відкритих в підпросторі B множин, а це суперечить зв'язності множини B. Отже, $B \subseteq Y_i$, тому Y_i – максимальна зв'язна множина, що містить точку x.

Покажемо тепер, що X_0 – компонента зв'язності простору X. Нехай $x \in X_0$ і C – зв'язна множина в просторі X, така, що $x \in C$. Доведемо, що $C \subseteq X_0$. Знову будемо міркувати від супротивного. Нехай це не так, отже, існує точка $y \in C \setminus X_0$. Оскільки, $y \notin X_0$, то існує $i \in I$, таке, що $y \in Y_i$. Покладемо $C_0 = C \cap Y_i$ і $C_1 = C \cap (X \setminus Y_i)$. Множини C_0 і C_1 відкриті в підпросторі C, як сліди відкритих множин Y_i та $X \setminus Y_i$ відповідно в просторі X, і непорожні, бо $x \in C_0$, а $y \in C_1$. Виходить, що множина $C = C_0 \sqcup C_1$ розбивається на дві неперетинні непорожні відкриті в C множини, що суперечить зв'язності C. Отже, $C \subseteq X_0$, а значить, X_0 – компонента зв'язності простору X. Крім того, із зображення $X = X_0 \sqcup (\bigsqcup\limits_{i \in I} Y_i)$ і того, що множини X_0 та Y_i для всіх $i \in I$ є компонентами зв'язності, з леми 2 випливає, що інших компонент зв'язності простору X не-має. Тому $\mathcal{C}(X) = \{Y_i : i \in I\} \cup \{X_0\}$.

4. Площина Сідра та її розбиття. Для довільних $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$ і $y > 0$ введемо такі позначення: $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $V_\varepsilon(0) = [0, \varepsilon)$ і $V_\varepsilon(y) = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$.

Площиною Сідра $\mathbb{M}$ ми називаємо топологічний простір, що складається з точок півплощини $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, топологічна структура на якому вводиться так: множина W буде околом точки $p = (x, y)$ з $y > 0$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon \in (0, y)$, що $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times V_\varepsilon(y) \subseteq W$, і околом точки $p = (x, 0)$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $W_\varepsilon(p) = U_\varepsilon(x) \overset{x}{\times} V_\varepsilon(0) = (U_\varepsilon(x) \times V_\varepsilon(0)) \setminus (\{x\} \times (0, \varepsilon)) \subseteq W$.

Позначимо $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$, де $x \in \mathbb{R}$ і $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$, і зауважимо, що відображення $\varphi : \mathbb{R} \to X_0$, для якого $\varphi(x) = (x, 0)$, і всі відображення $\psi_x : (0, +\infty) \to Y_x$, такі, що $\psi_x(y) = (x, y)$, є гомеоморфізмами.

Теорема 3. *Підпростори $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$ площини Сідра $\mathbb{M}$ є відкритими, замкненими і зв'язними, а підпростір $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ зв'язний і замкнений в $\mathbb{M}$, при цьому $\mathbb{M} = (\bigsqcup\limits_{x \in \mathbb{R}} Y_x) \sqcup X_0$.*

Доведення. Доведемо, що множина Y_x відкрита в $\mathbb{M}$. Справді, нехай $x \in X$ і $p = (x, y) \in Y_x$. Візьмемо будь-яке $0 < \varepsilon < y$. Тоді $V_\varepsilon(y) \subseteq (0, +\infty)$, отже $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times V_\varepsilon(y) \subseteq \{x\} \times (0, +\infty) = Y_x$. Тому Y_x – це окіл довільної своєї точки p, а значить, відкрита множина.

Для доведення замкненості підпростору Y_x розглянемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{M} \setminus Y_x$. Якщо $x_0 = x$ і $y_0 = 0$, то для довільного $\varepsilon > 0$ множина $W = W_\varepsilon(p_0)$ буде околом точки p_0, таким, що $W \cap Y_x = \varnothing$. Якщо ж $x_0 \neq x$, а $y_0 > 0$, то $W = \{x_0\} \times (0, +\infty)$ є околом точки p_0 в $\mathbb{M}$ і $W \cap Y_x = \varnothing$. Розглянемо нарешті випадок, коли $x_0 \neq x$, а $y_0 = 0$. Тоді $|x_0 - x| = \varepsilon > 0$ і множина $W = ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times [0, +\infty))$ є околом точки p_0 в $\mathbb{M}$, таким, що $W \cap Y_x = \varnothing$. Це показує, що множина Y_x містить всі свої точки дотику, отже, є замкненою в $\mathbb{M}$.

Підпростір Y_x є зв'язним, як образ зв'язної множини $(0, +\infty)$ при побудованому вище неперервному відображенні $\psi_x : (0, +\infty) \to Y_x$.

Доведемо тепер замкненість підпростору X_0 площини Сідра. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{M} \setminus X_0$. Тоді обов'язково $y_0 > 0$ і множина $W = \{x_0\} \times (0, +\infty) = Y_{x_0}$ є околом точки p_0 в $\mathbb{M}$, таким, що $W \cap X_0 = \varnothing$, звідки випливає замкненість X_0.

Зв'язність підпростору X_0 отримується з того, що X_0 гомеморфний до числової прямої $\mathbb{R}$, яка є зв'язним простором.

Якщо $x_1 \neq x_2$, то очевидно, що $Y_{x_1} \cap Y_{x_2} = \varnothing$. Перетин підпросторів Y_x та X_0 також порожній, оскільки для довільної точки $p = (x, y) \in Y_x$ обов'язково $y > 0$, а для $p = (x, y) \in X_0$ мусить виконуватись умова, що $y = 0$. При цьому точка $p = (x, y) \in \mathbb{M}$ входить в X_0, якщо $y = 0$ і в Y_x, якщо $y > 0$.

З твердження 1 та теореми 3 негайно випливає

Наслідок 2. *Нехай $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$, $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ – підпростори площини Сідра $\mathbb{M}$. Тоді $\mathcal{C}(\mathbb{M}) = \{Y_x : x \in \mathbb{R}\} \cup \{X_0\}$ – система усіх компонент зв'язності площини Сідра $\mathbb{M}$.*

5. Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень від двох змінних зі значеннями в площині Сідра. Нам буде потрібне таке

Твердження 2. *Нехай X, Y – зв'язні топологічні простори, Z – топологічний простір і $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення. Тоді $f(X \times Y)$ – зв'язна множина.*

Доведення. Зафіксуємо $x \in X$ і розглянемо множину $f^x(Y)$, яка є зв'язною, як образ зв'язної множини Y при неперервному відображенні $f^x : Y \to Z$. Зрозуміло, що $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$. Розглянемо $y_0 \in Y$ і відповідний горизонтальний розріз $f_{y_0}(X)$, він є зв'язною підмножиною простору Z, як образ зв'язної множини X при неперервному відображенні $f_{y_0} : X \to Z$. Оскільки $f(x, y_0) \in f^x(Y)$ і $f(x, y_0) \in f_{y_0}(X)$ для довільного x з X, то маємо, що $f_{y_0}(X) \cap f^x(Y) \neq \varnothing$ для всіх x з X. Отже, за лемою 1 множина $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$ є зв'язною.

Нагадаємо, що *множиною зліченного типу* називають таку підмножину B топологічного простору Y, що для неї існує послідовність відкритих в Y множин V_n, така, що для кожного $y \in B$ система $\{V_n : y \in V_n\}$ є базою околів точки y в Y.

Добре відома теорема Калбрі-Троалліка [9] твердить, що для довільних топологічних просторів X і Y, метризовного простору Z, нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ і множини B зліченного типу в Y існує така залишкова множина A в X, що $A \times B \subseteq C(f)$. З цієї теореми легко випливає, що для нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ зі значеннями в метризовному просторі Z множини $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ чи $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ будуть залишковими в X, якщо Y задовольняє першу чи другу аксіоми зліченності відповідно.

Теорема 4. *Нехай X і Y – зв'язні топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення і B – множина зліченного типу в Y. Тоді множина $C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X.*

Доведення. Оскільки X та Y – зв'язні простори, то за твердженням 2 множина $f(X \times Y)$ є зв'язною в $\mathbb{M}$, а значить, за теоремою 2 міститься в деякій компоненті зв'язності площини Сідра $\mathbb{M}$. В площині Сідра компонентами зв'язності є підпростори Y_x, де $x \in \mathbb{R}$, та X_0, що встановлено в наслідку 2, тому $f(X \times Y) \subseteq Y_x$ для деякого $x \in \mathbb{R}$ або $f(X \times Y) \subseteq X_0$. Оскільки для довільного $x \in \mathbb{R}$ підпростір Y_x гомеоморфний до метризовного підпростору $(0, +\infty)$ числової прямої $\mathbb{R}$, а X_0 гомеоморфний до числової прямої $\mathbb{R}$, то f набуває значень в метризовному підпросторі площини Сідра $\mathbb{M}$. Тому за теоремою Калбрі-Троалліка існує залишкова множина A в X, така що $A \times B \subseteq C(f)$. Тоді і множина $C_B(f)$ є залишковою в X, адже $A \subseteq C_B(f)$.

Наслідок 3. *Нехай X і Y – зв'язні топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множини $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ чи $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ будуть залишковими в X, якщо Y задовольняє першу чи другу аксіоми зліченності відповідно.*

Доведення. Нехай Y задовольняє першу аксіому зліченності, тобто для довільного y з Y існує система $\mathcal{V}_y = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин в Y, яка є базою околів точки y. Отже, будь-яка одноточкова множина $\{y\}$ буде множиною зліченного типу в Y. Тоді множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ є залишковою в X для кожного $y \in Y$ за теоремою 4.

Нехай тепер Y задовольняє другу аксіому зліченності, тобто існує $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. В цьому випадку сам простір Y є множиною зліченного типу. Отже, за теоремою 4 множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X.

6. Сукупна неперервність нарізно неперервних функцій від багатьох змінних зі значеннями в площині Сідра. Користуючись відомими результатами В. Маслюченка про величину множини точок неперервності нарізно неперервних відображень багатьох змінних зі значеннями в метризовних просторах [10], ми можемо перенести теореми попереднього розділу на випадок $n+1$ змінної. Для цього нам будуть потрібні такі теореми:

Теорема A. (Маслюченко В.К., 1998) *Якщо X_1 – довільний топологічний простір, простори $X_2, \dots, X_{n+1}$ задовольняють першу аксіому зліченності, простір Z метризовний і $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n+1} \to Z$ – нарізно неперервне відображення, то множина $C_y(f) = \{x \in X = X_1 \times \dots \times X_n : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y = X_{n+1}$ буде залишковою в X.*

Теорема B. (Маслюченко В.К., 1998) *Якщо X_1 – топологічний простір, $X_2, \dots, X_n$ задовольняють першу аксіому зліченності, $Y = X_{n+1}$ задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний, $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n+1} \to Z$ – нарізно неперервне відображення, то множина $C_Y(f) = \{x \in X = X_1 \times \dots \times X_n : (\{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ буде залишковою в X.*

Теорема 5. *Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – зв'язні топологічні простори, Z – топологічний простір і $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Z$ – нарізно неперервне відображення. Тоді*

$f(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)$ *– зв'язна множина в* Z.

Доведення. Для доведення застосуємо індукцію відносно n. Для $n = 1$ твердження теореми це не що інше як добре відомий факт, яким ми не раз користувалися в даній роботі, про те, що образ зв'язної множини при неперервному відображенні є зв'язною множиною. При $n = 2$ ця теорема – це твердження 2. Припустимо, що ця теорема вірна для функцій від n змінних, де $n \geq 2$, і доведемо, що вона має місце і для функцій від $n + 1$ змінної.

Нехай $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ – зв'язні топологічні простори. Тоді добуток $X = X_1 \times ... \times X_n$ є також зв'язним [7, с. 521]. Покладемо $Y = X_{n+1}$ і будемо розглядати відображення з формулювання теореми, як відображення на добутку двох зв'язних просторів X та Y. Зрозуміло, що $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$. Всі множини $f^x(Y)$ зв'язні, оскільки відображення $f^x : Y \to Z$ неперервні і Y – зв'язний простір. Зафіксуємо $y_0 \in Y$ і розглянемо множину $f_{y_0}(X)$, яка є зв'язною за індуктивним припущенням, адже $f_{y_0} : X \to Z$ – нарізно неперервне відображення. Оскільки $f(x, y_0) \in f_{y_0}(X) \cap f^x(Y)$ для довільного $x \in X$, то $f^x(Y) \cap f_{y_0}(X) \neq \varnothing$ для кожного $x \in X$. Тому за лемою 1 множина $f(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n+1}) = f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$ є зв'язною.

Теорема 6. *Нехай $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ – зв'язні топологічні простори, $X_2, ..., X_n$ задовольняють першу аксіому зліченності, $X = X_1 \times ... \times X_n$, $Y = X_{n+1}$ і $f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множини $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ чи $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ будуть залишковими в X, якщо Y задовольняє першу чи другу аксіоми зліченності відповідно.*

Доведення. За теоремою 5 множина $f(X \times Y)$ є зв'язною в $\mathbb{M}$, а значить міститься в деякій компоненті зв'язності площини Сідра $\mathbb{M}$. Далі, міркуючи аналогічно як і в доведенні теореми 4, отримаємо, що множина значень $f(X \times Y)$ нашого відображення f міститься в метризовному підпросторі площини Сідра $\mathbb{M}$. Отже, якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то за теоремою A множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ буде залишковою в добутку $X = X_1 \times ... \times X_n$ для кожного $y \in Y$. Якщо ж простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то за теоремою B отримуємо залишковість множини $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ в просторі X.

Висловлюю щиру вдячність Маслюченку Володимиру Кириловичу за допомогу та постійну увагу при написанні цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори // Мат. вісн. НТШ. – 2010. – **7**. – С.111-121.
2. *Карлова О.О., Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Площина Бінґа і нарізно неперервні відображення // Мат. студії. – 2012. – **38**, №2. – С.188-193.
3. *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961.–**11**. – P. 105-126.
4. *В. Маслюченко, О. Мироник* Вичерпність гребінця Сідра // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. 20 - 26 лютого, Ворохта. - Ів.-Франківськ, 2012. - С.44-45.
5. *В. Маслюченко, О. Маслюченко, О. Мироник* Аксіоми відокремності і метризовність добутку Сідра // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. 25 лютого - 3 березня, Ворохта. - Ів.-Франківськ, 2013. - С. 63-64.
6. *В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник* Добуток Сідра та вичерпні простори // Бук. мат. журн. – 2013. – Т. 1, №1-2. С. 107-112.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
8. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
9. *Calbrix J., Troallic J.P.* Applications séparément continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. A. – 1979. – **288**. – P.647-648.
10. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 1998. – **41**, №4. – С. 39–45.