

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

## НОВІ ХАРАКТЕРИЗАЦІЇ ДЕЯКИХ ОСЛАБЛЕНЬ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Досліджуються характеристики різних ослаблень неперервності в термінах замикання. Зокрема встановлено, що відображення  $f$  є  $B$ -квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  для довільної передвідкритої множини  $A$ , такої, що  $\text{int}\overline{A}$  – область.

We study characterizations of various weakening of continuity in terms of the closure. In particular, we prove that a mapping  $f$  is a  $B$ -quasi-continuous if and only if  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  for any pre-open set  $A$  such that  $\text{int}\overline{A}$  is a connected open set.

**1. Вступ.** Добре відомою є характеристика неперервності відображення в термінах його замикання: відображення  $f$  між топологічними просторами  $X$  та  $Y$  є неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для довільної підмножини  $A$  простору  $X$ , де  $\overline{A}$  означає замикання множини  $A$ .

К.Келлум у [1] увів поняття функції Гібсона, а саме, відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *функцією Гібсона*, якщо  $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$  для всіх відкритих множин  $U$  в  $X$ . В [2] О.Карлова та В.Михайлюк встановили, що поняття майже неперервності та поняття функції Гібсона означають одне і теж.

П.С.Келлер в [3] увів властивість щільності відображення ("dense mapping property", коротко DMP). Відображення  $f : X \rightarrow Y$  має властивість DMP, якщо  $f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$  для довільної підмножини  $D$  простору  $X$ , такої, що  $\overline{D}$  є зв'язною множиною. Р.Мімна в [4] встановив, що функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли вона має властивість DMP. В [5] Я.Борсіком було показано, що якщо відображення  $f : X \rightarrow Y$  між топологічними просторами  $X$  та  $Y$  має властивість DMP, то  $f$  є  $B$ -квазінеперервним, а також наведено приклад функції  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є  $B$ -квазінеперервною, але не має властивості DMP. Також в [4] Р.Мімна показав, що функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неперервна тоді і тільки

тоді, коли  $f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)}$  для довільної ніді не щільної множини  $N$ .

Крім майже неперервності та двосторонньої квазінеперервності існує велика кількість інших ослаблень неперервності (квазінеперервність, периферійна неперервність, ледь неперервність тощо). Виникає природний інтерес дослідити чи допускають інші ослаблення неперервності подібну характеристику з допомогою включення  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ , що виконується для множини  $A$  з певної системи  $\mathcal{A}$ . В цій статті характеристики знайдено для властивості Юнга,  $B$ -квазінеперервності,  $\alpha$ -неперервності, ледь неперервності та майже ледь неперервності. Досліджено також з цієї точки зору і периферійну неперервність. На жаль, для квазінеперервності такої характеристики не знайдено.

**2.  $\mathcal{A}$ -неперервність.** Нехай  $X$  і  $Y$  – топологічні простори,  $\mathcal{A}$  – деяка система підмножин простору  $X$  і  $f : X \rightarrow Y$  – відображення. Ми кажемо, що відображення  $f$  є  $\mathcal{A}$ -неперервним, якщо  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  для довільної множини  $A \in \mathcal{A}$ .

Спочатку перенесемо результат Р.Мімни з [4] на випадок топологічних просторів.

**Теорема 2.1.** *Нехай  $X$  та  $Y$  – топологічні простори, причому простір  $X$  задовольняє умову:*

(\*) *для довільної підмножини  $A$  в  $X$  і точки  $x \in \overline{A} \setminus A$  існує ніді не щільна множина  $N$  в  $X$ , така, що  $N \subseteq A$  і  $x \in \overline{N}$ ,*

*і  $\mathcal{N}$  – система ніді не щільних підмножин*

простору  $X$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є неперервним тоді і тільки тоді, коли  $f$  є  $\mathcal{N}$ -неперервним.

**Доведення.** Необхідність є очевидною. Встановимо достатність. Припустимо, що відображення  $f$  є  $\mathcal{N}$ -неперервним і не є неперервним в деякій точці  $x_0 \in X$ . Тоді існує відкритий окіл  $V$  точки  $f(x_0)$  в  $Y$  такий, що для довільного околу  $U$  точки  $x_0$  в  $X$  існує точка  $x_U \in U$ , така, що  $f(x_U) \in Y \setminus V$ . Розглянемо множину  $A = \{x_U \in X : U - \text{окіл точки } x_0\}$ . Очевидно, що  $x_0 \in \overline{A} \setminus A$  і  $f(A) \subseteq Y \setminus V$ . Тоді за умовою існує ніде не щільна множина  $N$  в  $X$ , така, що  $N \subseteq A$  і  $x_0 \in \overline{N}$ . З  $\mathcal{N}$ -неперервності відображення  $f$ , замкненості множини  $Y \setminus V$  і умови  $N \subseteq A$  випливає, що

$$f(x_0) \in f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Однак,  $f(x_0) \in V$ , що приводить до суперечності.

Зауважимо, що якщо простір має ізольовані точки, то він не задовольняє умову (\*). Те, що простір  $X$  в теоремі 2.1 не має ізольованих точок, є істотною умовою. Це показує наступний приклад.

**Приклад.** Нехай  $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  – простір з індукованою топологією. Визначимо функцію  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  так:  $f(x) = 0$ , якщо  $x \neq 0$  і  $f(0) = 1$ . Так визначена функція є розривною в точці  $x = 0$ . Єдиною непорожньою ніде не щільною множиною в  $X$  є одноточкова множина  $N = \{0\}$ . Зрозуміло, що  $\overline{N} = N$ . Тоді

$$f(\overline{N}) = f(N) = \{1\} = \overline{\{1\}} = \overline{f(N)}.$$

Отже, функція  $f$  є  $\mathcal{N}$ -неперервною, але розривною.

**Теорема 2.2.** Якщо  $X$  – гаусдорфовий простір з першою аксіомою зліченності без ізольованих точок, то він задовольняє умову (\*).

**Доведення.** Нехай  $A \subseteq X$ ,  $x \in \overline{A} \setminus A$  і  $\mathcal{V}$  – зліченна база точки  $x$ . Візьмемо довільну точку  $x_1 \in A$ . З гаусдорфовості випливає, що існують відкриті околи  $U_1$  і  $V_1$  точок  $x_1$  і  $x$  відповідно, такі, що  $V_1 \in \mathcal{V}$  і  $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ .

Оскільки  $x \in \overline{A}$ , то існує точка  $x_2 \in V_1 \cap A$ . Знову з гаусдорфовості простору  $X$  випливає, що існують відкриті околи  $U_2$  і  $V_2$  точок  $x_2$  і  $x$  відповідно, такі, що  $V_2 \in \mathcal{V}$  і  $V_2 \subseteq V_1$ ,  $U_2 \subseteq V_1$  і  $U_2 \cap V_2 = \emptyset$ . Зауважимо, що  $U_2 \cap U_1 = \emptyset$ . Продовживши це процес до безмежності ми отримаємо послідовність точок  $(x_n)$  і послідовність попарно неперетинних відкритих множин  $(U_n)$ , такі, що  $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq A$  і  $x_n \in U_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

Покажемо, що множина  $N$  ніде не щільна. Розглянемо довільну відкриту непорожню множину  $G$  в  $X$ . Нехай  $G \cap N \neq \emptyset$ . Тоді існує номер  $n_0$ , такий, що  $x_{n_0} \in G$ . Оскільки простір  $X$  без ізольованих точок, то існує точка  $x' \in G \cap U_{n_0}$  і  $x' \neq x_{n_0}$ . З гаусдорфовості простору  $X$  випливає, що існує відкритий окіл  $G'$  точки  $x'$ , такий, що  $x_{n_0} \notin G'$ . Тоді множина  $H = G \cap G' \cap U_{n_0}$  відкрита непорожня,  $x_{n_0} \notin H$  і  $H \subseteq G$ . Крім того,  $H \cap U_n = \emptyset$  для всіх номерів  $n \neq n_0$ , бо послідовність  $(U_n)$  складається із попарно неперетинних відкритих множин. Тому  $H \cap N = \emptyset$  і це означає, що множина  $N$  ніде не щільна.

**3. Майже неперервність та функції Гібсона.** Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *майже неперервним* (в розумінні Гусейна) в точці  $x \in X$  [6], якщо для кожного околу  $V$  точки  $y = f(x)$  в  $Y$  існує множина  $A$  в  $X$ , така, що  $x \in \text{int}\overline{A}$  і  $f(A) \subseteq V$ , де  $\text{int}A$  означає внутрішність множини  $A$ . Якщо відображення  $f$  майже неперервне в кожній точці, то воно називається *майже неперервним*.

О.Карлова та В.Михайлюк в [2] встановили наступний результат.

**Теорема 3.1.** Нехай  $X$  та  $Y$  – топологічні простори і  $\mathcal{G}$  – система відкритих підмножин простору  $X$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є майже неперервне тоді і тільки тоді, коли  $f$  є  $\mathcal{G}$ -неперервним.

Цю теорему можна доповнити таким чином. Підмножина  $A$  простору  $X$  називається *напіввідкритою* [7], якщо  $A \subseteq \text{int}\overline{A}$ . Очевидно, що кожна відкрита множина є напіввідкритою.

**Теорема 3.2.** Нехай  $X$  та  $Y$  – топологи-

чні простори,  $\mathcal{G}_s$  – система напіввідкритих множин в  $X$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є майже неперервним тоді і тільки тоді, коли  $f \in \mathcal{G}_s$ -неперервним.

**Доведення.** Якщо  $f$  – майже неперервне, то за теоремою 3.1  $f$  є функцією Гібсона, тобто  $f(\overline{G}) \subseteq \overline{f(G)}$  для кожної відкритої множини  $G$ , а тоді для кожної напіввідкритої множини  $A$  маємо, що

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(\text{int}A)} \subseteq \overline{f(\text{int}A)} \subseteq \overline{f(A)},$$

бо множина  $G = \text{int}A$  відкрита і  $A \subseteq \overline{\text{int}A}$ .

Навпаки, нехай відображення  $f \in \mathcal{G}_s$ -неперервним. Оскільки  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_s$  і відображення  $f \in \mathcal{G}_s$ -неперервним, то відображення  $f \in \mathcal{G}$ -неперервним. Тоді з теореми 3.1 випливає, що  $f$  є майже неперервним.

З теорем 3.1 та 3.2 одержуємо наступний очевидний результат.

**Наслідок 3.3.** Для топологічних просторів  $X$  та  $Y$  і відображення  $f : X \rightarrow Y$  наступні умови рівносильні:

- (1)  $f$  – майже неперервне;
- (2)  $f$  є функцією Гібсона;
- (3)  $f \in \mathcal{G}_s$ -неперервним.

**4. Властивість Юнга та слабкі функції Гібсона.** У [2], поряд з поняття функції Гібсона, розглядається поняття слабкої функції Гібсона. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *слабкою функцією Гібсона*, якщо  $f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}$  для довільної області (відкритої та зв'язної множини)  $O$  в  $X$ .

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має властивість Юнга [8], якщо для кожної точки  $x \in \mathbb{R}$  існують послідовності  $(x'_n)$  і  $(x''_n)$ , такі, що  $x'_n \leq x'_{n+1} < x$ ,  $x''_n \geq x''_{n+1} > x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = f(x)$ .

**Теорема 4.1.** Нехай  $\mathcal{O}$  – система всіх областей в  $\mathbb{R}$  (тобто, система всіх інтервалів в  $\mathbb{R}$ ). Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має властивість Юнга тоді і тільки тоді, коли  $f \in \mathcal{O}$ -неперервною.

**Доведення.** Нехай  $f$  має властивість Юнга і  $A \in \mathcal{O}$ . Розглянемо довільну точку  $y \in f(\overline{A})$  і окіл  $V$  точки  $y$ . Нехай  $x$  – це така точка, що  $x \in \overline{A}$  і  $f(x) = y$ . Якщо  $x \in A$ ,

то  $y \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ . Нехай  $x \notin A$ . Оскільки  $A$  є відкритим інтервалом і  $x \in \overline{A} \setminus A$ , то  $A = (x, \omega)$ , де  $x < \omega \leq +\infty$ , або  $A = (\omega, x)$ , де  $-\infty \leq \omega < x$ . Припустимо, що  $A = (x, \omega)$ . Оскільки  $f$  має властивість Юнга, то існує послідовність  $(x_n)$ , така, що  $x_n \geq x_{n+1} > x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ . Тоді існує такий номер  $N$ , що  $x_N \in A$  і  $f(x_N) \in V$ . Тому  $f(A) \cap V \neq \emptyset$  і  $y \in \overline{f(A)}$ . Аналогічно міркується у випадку  $A = (\omega, x)$ . Отже,  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ . Таким чином,  $f \in \mathcal{O}$ -неперервною.

Навпаки, нехай функція  $f \in \mathcal{O}$ -неперервною. Припустимо, що функція  $f$  не має властивості Юнга. Тоді існують точка  $x_0$ , відкритий окіл  $V$  точки  $f(x_0)$  та інтервали  $A = (x, x + \delta)$ , або  $A = (x, x - \delta)$ , де  $\delta > 0$ , такі, що  $f(A) \subseteq \mathbb{R} \setminus V$ . Оскільки  $x_0 \in \overline{A}$ ,  $A \in \mathcal{O}$ , функція  $f \in \mathcal{O}$ -неперервною і множина  $\mathbb{R} \setminus V$  замкнена, то

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus V} = \mathbb{R} \setminus V.$$

Це суперечить тому, що  $V$  є околом точки  $x_0$ . Одержана суперечність завершує доведення.

**Наслідок 4.2.** Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має властивість Юнга тоді і тільки тоді, коли  $f \in \mathcal{G}_s$ -неперервним.

**5. Периферійна неперервність.** Для множини  $A$  топологічного простору  $X$  через  $\text{fr}A = \overline{A} \setminus \text{int}A$  позначимо її межу. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *периферійно неперервним у точці  $x \in X$*  [9], якщо для довільних відкритих околів  $U$  і  $V$  точок  $x$  в  $X$  і  $y = f(x)$  в  $Y$  відповідно, існує відкритий окіл  $G$  точки  $x$  в  $X$ , такий, що  $G \subseteq U$  і  $f(\text{fr}G) \subseteq V$ , і просто *периферійно неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці. Для  $X = Y = \mathbb{R}$  периферійна неперервність еквівалентна властивості Юнга [8, с. 495].

**Теорема 5.1.** Нехай  $X$  –  $T_1$ -простір та  $Y$  – топологічний простір,  $\mathcal{C}$  – система зв'язних множин в  $X$  і  $f : X \rightarrow Y$  – периферійно неперервне відображення. Тоді  $f \in \mathcal{C}$ -неперервним.

**Доведення.** Нехай відображення  $f$  периферійно неперервне. Розглянемо зв'язну

множину  $A$  в  $X$ . Нехай  $y \in f(\overline{A})$ ,  $V$  – окіл точки  $y$  в  $Y$ , точка  $x \in \overline{A}$ , така, що  $f(x) = y$ .

Якщо для довільного околу  $U$  точки  $x$  маємо, що  $U \cap A \supseteq A$ , то  $A = \{x\}$ . Справді, якщо  $A \neq \{x\}$ , то існує точка  $a \in A$ , так, що  $a \neq x$ . Оскільки простір  $X$  задовольняє аксіому  $T_1$ , то існує окіл  $U_a$  точки  $x$ , такий, що  $a \notin U_a$  і тоді  $U_a \not\supseteq A$ . А це суперечить тому, що  $U \cap A \supseteq A$  для довільного околу  $U$  точки  $x$ . Таким чином, якщо для довільного околу  $U$  точки  $x$  маємо, що  $U \cap A \supseteq A$ , то  $A = \{x\}$  і тому  $y = f(x) \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ .

Нехай існує відкритий окіл  $U_0$  точки  $x$ , такий, що  $U_0 \cap A \not\supseteq A$ . З периферійної неперервності відображення  $f$  в точці  $x$  випливає, що існує відкрита непорожня  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq U_0$  і  $f(frG) \subseteq V$ . Оскільки  $G \cap A \neq \emptyset$ , бо  $x \in \overline{A}$ ,  $G \not\supseteq A$ , бо  $G \subseteq U_0$  і множина  $A$  є зв'язною, то  $frG \cap A \neq \emptyset$ . Візьмемо точку  $a \in frG \cap A$ . Тоді  $f(a) \in f(frG) \subseteq V$ . Отже,  $f(A) \cap V \neq \emptyset$  і тому  $y \in \overline{f(A)}$ .

В обох випадках ми одержуємо, що  $y \in \overline{f(A)}$ , отже  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ . Таким чином,  $f$  є  $\mathcal{C}$ -неперервним.

**Наслідок 5.2.** Для функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  наступні умови еквівалентні:

- (1)  $f$  має властивість Юнга;
- (2)  $f$  є слабкою функцією Гібсона;
- (3)  $f$  периферійно неперервна;
- (4)  $f$  є  $\mathcal{C}$ -неперервною.

**Доведення.** Імплікацію (1)  $\Leftrightarrow$  (2) доведено у пункті 4 (наслідок 4.2). Те, що (1)  $\Leftrightarrow$  (3) встановлено у [8, с. 495]. Імплікація (3)  $\Rightarrow$  (4) випливає з теореми 5.1. З означення  $\mathcal{C}$ -неперервності легко вивести, що (4)  $\Rightarrow$  (2).

**Питання.** Нехай  $\mathcal{C}$  – система зв'язних множин в  $\mathbb{R}^2$  і  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  є  $\mathcal{C}$ -неперервна функція. Чи буде  $f$  периферійно неперервною?

**6. В-квазінеперервність.** Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *В-квазінеперервним у точці*  $x \in X$  [5], якщо для довільного околу  $V$  точки  $y = f(x)$  в  $Y$  і довільної області  $O$  в  $X$ , такої, що  $x \in \overline{O}$  існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq O$  і  $f(U) \subseteq V$ . Якщо відображення  $B$ -

квазінеперервне у кожній точці, то воно називається *В-квазінеперервним*. Поняття  $B$ -квазінеперервності є узагальненням поняття двосторонньої квазінеперервності на випадок відображень між довільними топологічними просторами.

Підмножина  $A$  простору  $X$  називається *передвідкритою* [10], якщо  $A \subseteq \text{int}\overline{A}$ .

**Лема 6.1.** Якщо  $O$  – область в топологічному просторі  $X$ ,  $A \subseteq X$  і  $A \subseteq O \subseteq \overline{A}$ , то  $\text{int}\overline{A}$  – область в  $X$ .

**Доведення.** Якби множина  $\text{int}\overline{A}$  була не зв'язною, то існували б відкриті непорожні множини  $U_1$  та  $U_2$ , такі, що  $U_1 \cap \text{int}\overline{A} \neq \emptyset$ ,  $U_2 \cap \text{int}\overline{A} \neq \emptyset$  і  $\text{int}\overline{A} \subseteq U_1 \sqcup U_2$ . Зрозуміло, що тоді б  $U_i \cap \overline{A} \neq \emptyset$  при  $i = 1, 2$ . Оскільки  $\overline{A} = \overline{O}$ , то  $U_i \cap \overline{O} \neq \emptyset$  при  $i = 1, 2$ . З властивості множини  $U_i$  випливає, що  $U_i \cap O \neq \emptyset$  при  $i = 1, 2$ . Оскільки  $O \subseteq \text{int}\overline{A}$  і  $\text{int}\overline{A} \subseteq U_1 \sqcup U_2$ , то  $O \subseteq U_1 \sqcup U_2$ . Тоді  $O = (U_1 \cap O) \sqcup (U_2 \cap O)$ , що суперечить зв'язності множини  $O$ . Отже, множина  $\text{int}\overline{A}$  зв'язна. Таким чином,  $\text{int}\overline{A}$  – область.

**Теорема 6.2.** Нехай  $X$  та  $Y$  – топологічні простори,  $\mathcal{O}_p = \{A \in 2^X : A \text{ – передвідкрита множина і } \text{int}\overline{A} \text{ – область}\}$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є  $B$ -квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли  $f$  є  $\mathcal{O}_p$ -неперервним.

**Доведення.** Нехай спочатку відображення  $f$  є  $B$ -квазінеперервним і  $A \in \mathcal{O}_p$ , тобто,  $A$  – передвідкрита множина, така, що  $\text{int}\overline{A}$  – область. Візьмемо довільну точку  $y \in f(\overline{A})$  та окіл  $V$  точки  $y$ . Нехай  $x$  – це така точка з множини  $\overline{A}$ , що  $f(x) = y$ . Покажемо, що  $x \in \text{int}\overline{A}$ . Справді, нехай  $U$  – довільний окіл точки  $x$ . Оскільки  $x \in \overline{A}$ , то  $U \cap A \neq \emptyset$ . Але з передвідкритості множини  $A$  випливає, що  $\emptyset \neq U \cap A \subseteq U \cap \text{int}\overline{A}$ . Отже,  $x \in \text{int}\overline{A}$ .

За умовою  $\text{int}\overline{A}$  є областю. Тоді з  $B$ -квазінеперервності відображення  $f$  випливає, що існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq \text{int}\overline{A}$ , а отже,  $G \subseteq \overline{A}$ , і  $f(G) \subseteq V$ . Оскільки  $G$  – відкрита непорожня множина і  $G \subseteq \overline{A}$ , то  $G \cap A \neq \emptyset$ . Тому  $f(A) \cap V \neq \emptyset$  і, таким чином,  $y \in f(A)$ . Оскільки  $y$  була довільною точкою множини  $f(\overline{A})$ , то  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ . Це означає, що

відображення  $f \in \mathcal{O}_p$ -неперервне.

Навпаки, нехай тепер відображення  $f \in \mathcal{O}_p$ -неперервним. Покажемо, що  $f$  –  $B$ -квазінеперервне відображення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай відображення  $f$  не є  $B$ -квазінеперервним в деякій точці  $x_0 \in X$ . Тоді існують відкритий окіл  $V$  точки  $y_0 = f(x_0)$  в  $Y$  і область  $O$  в  $X$ , для якої  $x_0 \in \overline{O}$ , такі, що для довільної відкритої непорожньої множини  $G \subseteq O$  маємо, що  $f(G) \not\subseteq V$ . Таким чином, для довільної відкритої непорожньої множини  $G$  в  $X$ , такої, що  $G \subseteq O$ , існує точка  $x_G \in G$ , що  $f(x_G) \notin V$ . Розглянемо множину  $A = \{x_G \in X : G \text{ – відкрита непорожня множина в } X \text{ і } G \subseteq O\}$ . Зрозуміло, що  $f(A) \subseteq Y \setminus V$ .

Зауважимо, що  $A \subseteq O \subseteq \overline{A}$ . Тоді  $O = \text{int}O \subseteq \text{int}\overline{A}$  і  $A \subseteq O \subseteq \text{int}\overline{A}$ . Отже, множина  $A$  передвідкрита, а згідно з лемою 6.1 множина  $\text{int}\overline{A}$  зв'язна.

Оскільки відображення  $f \in \mathcal{O}_p$ -неперервне, то

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Але з другого боку,  $f(x_0) \in V$ , бо  $V$  – окіл точки  $f(x_0)$ . Одержана суперечність завершує доведення.

Наведемо ще одну характеристику  $B$ -квазінеперервності. Нагадаємо, що відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *квазінеперервним в точці  $x \in X$*  [11], якщо для довільних околів  $U$  і  $V$  відповідно точок  $x \in X$  і  $y = f(x) \in Y$  існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$  така, що  $G \subseteq U$  і  $f(G) \subseteq V$ . Відображення називається *квазінеперервним*, якщо вона є таким в кожній точці. Кажуть, що функція  $f : X \rightarrow Y$  має *властивість Дарбу* [12], якщо  $f(A)$  є зв'язною множиною для довільної зв'язної множини  $A$  в  $X$ . В [13] Я.Борсік встановив, що коли функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є квазінеперервною і має властивість Дарбу, то вона двосторонньо квазінеперервна. Там же було наведено приклад функції, який показує, що обернене твердження не вірне. Тут ми узагальнимо цей результат.

**Теорема 6.3.** *Нехай  $X$  – локально зв'яз-*

*ний простір і  $Y$  – топологічний простір. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є  $B$ -квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли  $f$  є квазінеперервним і є слабкою функцією Гібсона.*

**Доведення.** Нехай відображення  $f : X \rightarrow Y$  є  $B$ -квазінеперервним. Перевіримо спочатку, що  $f$  є слабкою функцією Гібсона. Розглянемо довільну область  $O$  в просторі  $X$ . Оскільки множина  $O$  відкрита, то  $O \subseteq \text{int}\overline{O}$  і тому  $O$  – передвідкрита множина. Згідно з лемою 6.1 множина  $\text{int}\overline{O}$  є областю. Таким чином,  $O \in \mathcal{O}_p$ . Тоді з  $B$ -квазінеперервності відображення  $f$  випливає, що

$$f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}.$$

Це означає, що  $f$  є слабкою функцією Гібсона.

Тепер встановимо квазінеперервність. Розглянемо довільну точку  $x \in X$  та околи  $U$  і  $V$  точок  $x$  в  $X$  і  $f(x)$  в  $Y$  відповідно. Існує відкритий зв'язний окіл  $O$  точки  $x$ , такий, що  $O \subseteq U$ . Таким оком буде компонента зв'язності будь-якого відкритого околу точки  $x$ , що містить цю точку і міститься в  $U$ . Оскільки відображення  $f$   $B$ -квазінеперервне, то існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq O$  і  $f(G) \subseteq V$ . Отже, відображення  $f$  квазінеперервне в точці  $x$ .

Навпаки, нехай відображення  $f : X \rightarrow Y$  є квазінеперервним і є слабкою функцією Гібсона. Розглянемо довільну точку  $x \in X$ , відкритий окіл  $V$  точки  $f(x)$  в  $Y$  і область  $O$  в  $X$ , таку, що  $x \in \overline{O}$ . З означення слабкої функції Гібсона випливає, що  $f(O) \subseteq \overline{f(O)}$ . Оскільки  $x \in \overline{O}$ , то  $f(x) \in \overline{f(O)}$ , і тому  $V \cap \overline{f(O)} \neq \emptyset$ . Тоді існує точка  $x_1 \in O$ , така, що  $f(x_1) \in V$ . З квазінеперервності відображення  $f$  і того, що множини  $O$  і  $V$  є околами точок  $x_1$  в  $X$  і  $f(x_1)$  в  $Y$  відповідно випливає, що існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq O$  і  $f(G) \subseteq V$ . Отже,  $f$  –  $B$ -квазінеперервне в точці  $x$ .

**Наслідок 6.4.** *Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли  $f$  є квазінеперервною і має вла-*

стивість Юнга.

**7.  $\alpha$ -неперервність.** Множина  $A$  називається  $\alpha$ -відкритою [14], якщо  $A \subseteq \text{int}(\overline{\text{int}A})$ . Легко переконатися [14, твердження 4], що множина  $A$  є  $\alpha$ -відкритою в  $X$  тоді і тільки тоді, коли  $A = U \setminus N$ , де  $U$  – відкрита множина в  $X$ , а  $N$  – ніде не щільна. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається  $\alpha$ -неперервним у точці  $x \in X$  [15], якщо для кожного околу  $V$  точки  $f(x)$  в  $Y$  існує  $\alpha$ -відкрита множина  $A$  в  $X$ , така, що  $x \in A$  і  $f(A) \subseteq V$ , і просто  $\alpha$ -неперервним, якщо воно є таким у кожній точці.

**Лема 7.1.** Нехай  $(A_s)_{s \in S}$  – система передвідкритих множин в  $X$ . Тоді множина  $A = \bigcup_{s \in S} A_s$  передвідкрита.

**Доведення.** Нехай  $x \in A$ . Тоді існує  $s \in S$ , що  $x \in A_s$ . Оскільки множина  $A_s$  передвідкрита, то  $x \in \text{int}\overline{A_s}$ . Тоді  $x \in \text{int}\overline{A_s} \subseteq \text{int}\overline{A}$ . Отже,  $A$  – передвідкрита множина.

**Теорема 7.2.** Нехай  $X$  та  $Y$  – топологічні простори,  $\mathcal{G}_p$  – система всіх передвідкритих множин в  $X$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є  $\alpha$ -неперервним тоді і тільки тоді, коли  $f$  є  $\mathcal{G}_p$ -неперервним.

**Доведення.** Нехай спочатку відображення  $f : X \rightarrow Y$  є  $\alpha$ -неперервним. Розглянемо довільну множину  $A \in \mathcal{G}_p$ , точку  $y \in f(\overline{A})$  і  $V$  – окіл точки  $y$  в  $Y$ . Тоді існує точка  $x \in \overline{A}$ , така, що  $f(x) = y$ . Оскільки відображення  $f$  є  $\alpha$ -неперервним в точці  $x$ , то існує  $\alpha$ -відкрита множина  $E$ , така, що  $x \in E$  і  $f(E) \subseteq V$ . З  $\alpha$ -відкритості множини  $E$  випливає, що існують відкрита множина  $U$  в  $X$  і ніде не щільна множина  $N$  в  $X$ , такі, що  $E = U \setminus N$ . Зрозуміло, що  $U$  – окіл точки  $x$ . Оскільки  $x \in \overline{A}$ , то  $U \cap A \neq \emptyset$ . З передвідкритості множини  $A$  випливає, що  $\emptyset \neq U \cap A \subseteq U \cap \text{int}\overline{A}$ . Покладемо  $G = U \cap \text{int}\overline{A}$ . Оскільки  $G \subseteq \text{int}\overline{A} \subseteq \overline{A}$ , то множина  $A$  щільна в множині  $G$ . Тоді  $A \cap (G \setminus N) \neq \emptyset$ , бо множина  $N$  ніде не щільна. З того, що  $G \subseteq U$  ми одержуємо, що  $A \cap (U \setminus N) \neq \emptyset$ , отже,  $A \cap E \neq \emptyset$ . Тоді існує точка  $a \in A \cap E$ , а тому  $f(a) \in V$ . Отже,  $f(A) \cap V \neq \emptyset$  і  $y \in \overline{f(A)}$ . Таким чи-

ном,  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ , і значить відображення  $f$  є  $\mathcal{G}_p$ -неперервним.

Навпаки, нехай  $f$  є  $\mathcal{G}_p$ -неперервним. Припустимо, що  $f$  не є  $\alpha$ -неперервним в деякій точці  $x_0$ . Тоді існує відкритий окіл  $V$  точки  $f(x_0)$  в  $Y$ , такий, що для довільного околу  $U$  точки  $x_0$  і довільної ніде не щільної множини  $N$  в  $X$  існує точка  $x_N \in U \setminus N$ , така, що  $f(x_N) \notin V$ . Розглянемо множину  $A_U = \{x_N : N \text{ – ніде не щільна підмножина } U\}$ . Множина  $A_U$  десь щільна, бо якби вона була ніде не щільна, то існувала б точка  $x_{A_U} \in U \setminus A_U$ , яка за визначенням множини  $A_U$  їй належала. Таким чином, існує відкритий окіл  $V$  точки  $f(x_0)$  в  $Y$ , такий, що для довільного околу  $U$  точки  $x_0$  існує десь щільна в  $U$  множина  $A_U$ , така, що  $A_U \subseteq U$  і  $f(A_U) \not\subseteq V$ .

Для кожного відкритого околу  $U$  точки  $x_0$  розглянемо множину  $E_U = A_U \cap \text{int}\overline{A_U}$ . Зрозуміло, що  $E_U \neq \emptyset$  і  $E_U \subseteq U$ . Покажемо, що множина  $E_U$  є передвідкритою. Для цього треба встановити, що  $E_U \subseteq \text{int}\overline{E_U}$ . Зауважимо, що оскільки  $G = \text{int}\overline{A_U} \subseteq \overline{A_U}$ , то

$$G \subseteq \overline{A_U \cap G} = \overline{A_U \cap \text{int}\overline{A_U}} = \overline{E_U}.$$

З відкритості множини  $G$  випливає, що  $G = \text{int}G \subseteq \text{int}\overline{E_U}$ . Таким чином,

$$E_U = A_U \cap \text{int}\overline{A_U} = A_U \cap G \subseteq \text{int}\overline{E_U}.$$

Отже, множина  $E_U$  передвідкрита.

Розглянемо множину

$$A = \bigcup \{E_U : U \text{ – відкритий окіл точки } x_0\}.$$

Зрозуміло, що  $x_0 \in \overline{A}$ . Згідно з лемою 7.1 множина  $A$  є передвідкритою. Тому за припущенням маємо, що

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} \subseteq Y \setminus V.$$

А це суперечить тому, що  $f(x_0) \in V$ .

**8. Ледь неперервність.** Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається ледь неперервним в точці  $x \in X$  [16], якщо для кожного околу  $V$  точки  $y = f(x)$  в  $Y$  існує відкрита непорожня множина  $G$ , така, що  $f(G) \subseteq V$ , і просто ледь неперервним, якщо воно є таким в кожній точці.

**Теорема 8.1.** *Нехай  $X$  та  $Y$  – топологічні простори,  $\mathcal{D} = \{A \in 2^X : \overline{A} = X\}$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли  $f \in \mathcal{D}$ -неперервним.*

**Доведення.** Досить встановити, що відображення  $f : X \rightarrow Y$  ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли  $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$  для всіх всюди щільних в  $X$  множин  $A$ .

Нехай відображення  $f : X \rightarrow Y$  ледь неперервне і  $A$  – всюди щільна в  $X$  множина. Розглянемо  $x \in X$ ,  $f(x) = y$  і  $V$  – окіл точки  $y$ . З ледь неперервності відображення  $f$  випливає, що існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $f(G) \subseteq V$ . Оскільки  $\overline{A} = X$ , то  $G \cap A \neq \emptyset$ . Візьмемо точку  $a \in G \cap A$ . Тоді  $f(a) \in V$ . Отже,  $f(A) \cap V \neq \emptyset$  і  $y \in \overline{f(A)}$ . Таким чином,  $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ .

Навпаки, нехай  $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$  для всіх всюди щільних в  $X$  множин  $A$ . Припустимо, що  $f : X \rightarrow Y$  не є ледь неперервним в точці  $x_0$ . Тоді існує відкритий окіл  $V$  точки  $f(x_0)$ , такий, що для довільної відкритої непорожньої множини  $G$  в  $X$  існує точка  $x_G \in G$ , така, що  $f(x_G) \in Y \setminus V$ . Розглянемо множину  $A = \{x_G : G \text{ – відкрита непорожня в } X\}$ . Очевидно, що множина  $A$  всюди щільна в  $X$ . Тоді

$$f(x_0) \in f(X) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$$

і разом з тим  $f(x_0) \in V$ . Одержана суперечність завершує доведення.

**9. Майже ледь неперервність.** Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *майже ледь неперервним* в точці  $x \in X$  [17], якщо для кожного околу  $V$  точки  $y = f(x)$  в  $Y$  існує множина  $A$  в  $X$ , така, що  $\text{int} A \neq \emptyset$  і  $f(A) \subseteq V$ , і просто *майже ледь неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

**Теорема 9.1.** *Нехай  $X$  та  $Y$  – топологічні простори,  $\mathcal{D}_n = \{X \setminus N : N \text{ – ніде не щільна множина в } X\}$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є майже ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли  $f \in \mathcal{D}_n$ -неперервним.*

**Доведення.** Як і при доведенні теореми 8.1 досить встановити, що відображення  $f : X \rightarrow Y$  майже ледь неперервне тоді і

тільки тоді, коли  $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$  для всіх множин  $A = X \setminus N$ , де  $N$  – ніде не щільна в  $X$ .

Нехай відображення  $f : X \rightarrow Y$  майже ледь неперервне і  $A = X \setminus N$ , де  $N$  – ніде не щільна в  $X$ . Розглянемо  $x \in X$ ,  $f(x) = y$  і  $V$  – окіл точки  $y$ . З майже ледь неперервності відображення  $f$  випливає, що існує десь щільна множина  $E$  в  $X$ , така, що  $f(E) \subseteq V$ . Оскільки  $N$  – ніде не щільна в  $X$ ,  $A = X \setminus N$  і множина  $E$  десь щільна в  $X$ , то  $E \cap A \neq \emptyset$ . Візьмемо точку  $a \in E \cap A$ . Тоді  $f(a) \in V$ . Отже,  $f(A) \cap V \neq \emptyset$  і тому  $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ .

Навпаки, нехай  $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$  для всіх множин  $A = X \setminus N$ , де  $N$  – ніде не щільна в  $X$ . Припустимо, що  $f : X \rightarrow Y$  не є майже ледь неперервним в точці  $x_0$ . Тоді існують відкритий окіл  $V$  точки  $f(x_0)$  та множина  $A = X \setminus N$ , де  $N$  – ніде не щільна в  $X$ , такі, що  $f(A) \in Y \setminus V$ . В такому разі

$$f(x_0) \in f(X) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V,$$

і разом з тим  $f(x_0) \in V$ . Отримана суперечність, яка і завершує доведення.

**10.  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -неперервність.** Узагальнюючи поняття  $B$ -квазінеперервності, введемо нове поняття. Нехай  $\mathcal{A}$  та  $\mathcal{B}$  – деякі системи підмножин простору  $X$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -неперервним в точці  $x \in X$ , якщо для довільного околу  $V$  точки  $f(x)$  і довільної непорожньої множини  $A \in \mathcal{A}$ , з умови  $x \in \overline{A}$  випливає, що існує множина  $B \in \mathcal{B}$ , така, що  $B \subseteq A$  і  $f(B) \subseteq V$ . Відображення  $f$  називається  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -неперервним, якщо воно є таким в кожній точці.

В [5] було показано, що відображення  $f : X \rightarrow Y$  між топологічними просторами  $X$  і  $Y$  є неперервним в точці  $x \in X$  тоді і тільки тоді, коли для довільного околу  $V$  точки  $f(x)$  і довільної відкритої множини  $U$  в  $X$  з умови  $x \in \overline{U}$  випливає, що існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq U$  і  $f(G) \subseteq V$ . Звідси слідує, що відображення  $f : X \rightarrow Y$  є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно  $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ -неперервне.

З означення  $B$ -квазінеперервності випливає, що відображення  $f : X \rightarrow Y$  є  $B$ -

квазінеперервним тоді і тільки, коли  $f$  є  $(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ -неперервним.

Очевидною є наступна проста характеристика  $\mathcal{A}$ -неперервності.

**Теорема 10.1.** *Нехай  $X$  та  $Y$  – топологічні простори,  $\mathcal{A}$  – система підмножин простору  $X$ . Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є  $\mathcal{A}$ -неперервним тоді і тільки тоді, коли для кожної точки  $x \in X$ , довільного околу  $V$  точки  $f(x)$  в  $Y$  та довільної множини  $A \in \mathcal{A}$  в  $X$ , такої, що  $x \in \overline{A}$  існує точка  $a \in A$ , що  $f(a) \in V$ .*

Позначимо через  $\mathcal{P}$  – систему всіх одноточкових множин в  $X$ . Використовуючи теорему 10.1 та встановлені вище результати ми одержуємо, що для відображення  $f : X \rightarrow Y$  між топологічними просторами  $X$  і  $Y$ :

майже неперервність рівносильна  $(\mathcal{G}_s, \mathcal{P})$ -неперервності (теорема 3.2);

$B$ -квазінеперервність рівносильна  $(\mathcal{O}_p, \mathcal{P})$ -неперервності (теорема 6.2);

$\alpha$ -неперервність рівносильна  $(\mathcal{G}_p, \mathcal{P})$ -неперервності (теорема 7.2);

ледь неперервність рівносильна  $(\mathcal{D}, \mathcal{P})$ -неперервності (теорема 8.1);

майже ледь неперервність рівносильна  $(\mathcal{D}_n, \mathcal{P})$ -неперервності (теорема 9.1).

Якщо простір  $X$  задовольняє умову  $(\star)$  з пункту 2, то для відображення  $f : X \rightarrow Y$  неперервність рівносильна  $(\mathcal{N}, \mathcal{P})$ -неперервності (теорема 2.1);

Для функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  властивість Юнга рівносильна  $(\mathcal{O}, \mathcal{P})$ -неперервності (теорема 4.1);

Автор вдячний Маслюченку Володимирі Кириловичу за корисні зауваження, які дозволили поліпшити оригінальну версію цієї статті.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kellum K.R. Functions that separate  $X \times \mathbb{R}$  // Real Anal. Exch. Summer Symposium 2009. – P. 21-23.
2. Karlova O.O. Mykhaylyuk V.V. On Gibson functions with connected graphs // Math. Slovaca. – 2013. – **63**, N3. – С. 479-492.
3. Keller P.S. Chaotic behavior of Newton's method // Real Anal. Exch. – 1993. – **18**, N. 2. – P. 490-507.

4. Mimna R.A. Omega-limit sets and non-continuous functions // Real Anal. Exch. – 1998. – **23**, N. 1. – P. 267-273.

5. Borsik J. Bilateral quasicontinuity in topological spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2004. – **28**. – P. 159-168.

6. Husain T. Almost continuous mappings // Pr. Mat. – 1966. – **10**. – P. 1-7.

7. Levine N. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces // Amer. Math. Monthly. – 1963. – **70**. – P. 36-41.

8. Gibson R.G., Natkaniec T. Darboux like functions // Real Anal. Exch. – 1996. – **22**, 2. – P. 492-533.

9. Stallings J. Fixed point theorem for connectivity maps // Fund. Math. – 1959. – **47**. – P. 249-263.

10. Mashhour A.S., Hasanein I.A., El-Deeb S.N. A note on semi-continuity and precontinuity // Indian J. Pure Appl. Math. – 1982. – **13**, N. 10. – P. 1119-1123.

11. Kempisty S. Sur les fonctions quasicontinues // Fundam. Math. – 1932. – **19**. – P. 184-197.

12. Bruckner A.M., Ceder Jack G. Darboux continuity // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. – 1965. – **67**. – P. 93-117.

13. Borsik J. On the points of bilateral quasicontinuity of functions // Real Anal. Exch. – 1994. – **19**, 2. – P. 529-536.

14. Njåstad O. On some classes of nearly open sets // Pacific J. Math. – 1965. – **15**. – P. 961-970.

15. Noiri T. A function which preserves connected spaces // Casopis Pest. Mat. – 1982. – **101**. – P. 393-396.

16. Frolík Z. Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings // Czech. Math. J. – 1961. – **11**. – P. 381-385.

17. Маслюченко В.К. Про нарізні та сукупні модифікації неперервності // Мат. Студії. – 2006. – **25**, N.2. – С. 213-218.