УДК 517.977

©2013 р. А.С. Перцов

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГАРАНТОВАНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ ПРИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРАХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Досліджена проблема гарантованого оцінювання значень лінійних неперервних функціоналів від розв'язків крайової задачі Неймана для бігармонічного рівняння при інтегральних операторах спостережень та квадратичних обмеженнях на детерміновані дані.

The problem of guaranteed estimation of values of continuous linear functionals of solutions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation with integral operators observations and quadratic constraints on deterministic data is investigated.

Вступ. Мінімаксний метод оцінювання, який був започаткований в монографії [1], виявився досить корисним для систем з зосередженими та розподіленими параметрами в умовах невизначеності. В подальшому задачам мінімаксного оцінювання станів систем, які описуються звичайними диференційними рівняннями і рівняннями в частинних похідних було присвячено значну кількість робіт, зокрема [2], [3]. Окремо можна відзначити випадок, коли розв'язки крайових задач не визначені однозначно і існують лише тоді, коли дані цих задач задовольняють деяким умовам сумісності. В цьому напрямку досліджень відомі роботи [4], [5]. До описаного кола проблем відносяться і роботи [6], [7].

В роботі [6] за спостереженнями елемента вигляду

$$y = C\varphi + \eta, \tag{1}$$

у яких $\varphi(x)$ – розв'язок варіаційної задачі

$$\varphi(x) \in H^2(D), \tag{2}$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \right. \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right] dx = \\ = \int_D v(x) f(x)\, dx + \int_\Gamma v h_1 \, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2 \, d\Gamma \\ \forall v \in H^2(D), \tag{3}$$

$C \in \mathcal{L}(L^2(D), H_0)$ – лінійний неперервний оператор, $0 \le \sigma < 1$, за умови, що $F := (f, h_1 h_2) \in G_0$ і $\eta \in G_1$, була досліджена проблема знаходження мінімаксної оцінки значення функціоналу

$$l(\varphi) = \int_D l_0(x) \varphi(x)\, dx, \tag{4}$$

тобто такої оцінки вигляду

$$\widehat{\widehat{l(\varphi)}} = (y, \hat{u})_{H_0} + \hat{c},$$

для якої елемент $\hat{u}$ і число $\hat{c}$ визначаються із умови

$$\inf_{u \in H_0,\, c \in \mathbb{R}} \sigma(u, c) = \sigma(\hat{u}, \hat{c}),$$

де

$$\sigma(u,c) := \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \mathbb{E} |l(\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\varphi})}|^2,$$

$\tilde{\varphi}$ – будь-який розв'язок крайової задачі (2)–(3) при [1] $f(x) = \tilde{f}(x)$, $h_1 = \tilde{h}_1$, $h_2 = \tilde{h}_2$,

$$\widehat{l(\tilde{\varphi})} = (\tilde{y}, u)_{H_0} + c, \quad \tilde{y} = C\tilde{\varphi} + \tilde{\eta}.$$

Тут H_0 - сепарабельний гільбертовий простір[2] над $\mathbb{R}$ із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{H_0}$ та

[1] При цьому величина $\varrho := \sigma(\hat{u}, \hat{c})^{1/2}$ визначає похибку мінімаксного оцінювання виразу (4).

[2] Якщо H_0 – скінченновимірний простір, то тоді припускається, що $\dim H_0 > 3$.

нормою $\|\cdot\|_{H_0}$; D - обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з ліпшицевою границею Γ; $H^2(D)$ – простір Соболєва другого порядку в області D:

$$H^2(D)=\{v\in L^2(D):\ \mathcal{D}^\alpha v\in L^2(D)\quad \forall\alpha,\quad |\alpha|\leq 2\}$$

з відповідною нормою, де $\mathcal{D}^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$, а через $\mathcal{D}^\alpha v$ позначені узагальнені частинні похідні порядку α функції v; через G_0 позначено множину функцій $\tilde{F}:=(\tilde{f},\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)\in L^2(D)\times L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$, що задовольнять умови

$$\int_D Q(\tilde{f}-f_0)(x)(\tilde{f}(x)-f_0(x))\,dx+ +\int_\Gamma Q_1(\tilde{h}_1-h_1^{(0)})(\tilde{h}_1-h_1^{(0)})\,d\Gamma+ +\int_\Gamma Q_2(\tilde{h}_2-h_2^{(0)})(\tilde{h}_2-h_2^{(0)})\,d\Gamma\leq 1,$$

і

$$\int_D \tilde{f}(x)\,dx+\int_\Gamma \tilde{h}_1\,d\Gamma=0, \tag{5}$$

$$\int_D x_1\tilde{f}(x)\,dx+\int_\Gamma x_1\tilde{h}_1\,d\Gamma+\int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial\nu}\tilde{h}_2\,d\Gamma=0, \tag{6}$$

$$\int_D x_2\tilde{f}(x)\,dx+\int_\Gamma x_2\tilde{h}_1\,d\Gamma+\int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial\nu}\tilde{h}_2\,d\Gamma=0, \tag{7}$$

через G_1 позначено множину випадкових елементів $\tilde{\eta}=\tilde{\eta}(\omega)$, визначених на деякому ймовірносному просторі $(\Omega,\mathcal{B},P)$ із значеннями в H_0 таких, що $\mathbb{E}\|\tilde{\eta}(\omega)\|^2_{H_0}<\infty$ і нульовими середніми, що задовольняють нерівності

$$\mathbb{E}(Q_0\tilde{\eta},\tilde{\eta})_{H_0}\leq 1, \tag{8}$$

де $\mathbb{E}$ – символ математичного сподівання, Q, Q_1,Q_2 і Q_0 – обмежені самоспряжені додатно-визначені оператори в $L^2(D)$, $L^2(\Gamma)$ і H_0 відповідно, для яких існують обмежені обернені оператори Q^{-1}, Q_1^{-1},Q_2^{-1} і Q_0^{-1}; $F_0:=(f_0,h_1^{(0)},h_2^{(0)})\in L^2(D)\times L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$ – задана функція, що задовольняє умови (5)–(7); $u\in H_0$, $c\in\mathbb{R}$, $l_0\in L^2(D)$ – задана функція. Крім того припускається, що звуження лінійного оператора C на підпростір поліномів першого степеня вигляду $p(x_1,x_2)=a+bx_1+cx_2$ є ін'єктивним. В [6] доведена така теорема.

Теорема 1. *Існує єдина мінімаксна оцінка виразу $l(\varphi)$, яка може бути представлена у вигляді*

$$\widehat{\widehat{l(\varphi)}}=(y,\hat{u})_{H_0}+\hat{c}=l(\hat{\varphi}), \tag{9}$$

де

$$\hat{u}=Q_0Cp,\quad \hat{c}=\int_D\hat{z}(x)f^{(0)}(x)\,dx+ +\int_\Gamma\hat{z}h_1^{(0)}\,d\Gamma+\int_\Gamma\frac{\partial\hat{z}}{\partial\nu}h_2^{(0)}\,d\Gamma, \tag{10}$$

а функції $p(x)$, $\hat{z}(x)$ і $\hat{\varphi}(x)$ визначаються із однозначно розв'язних систем варіаційних рівнянь (11)*–*(20) *і* (21)*–*(30)*:*

$$\hat{z}\in H^2(D), \tag{11}$$

$$\int_D\Big[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2\hat{z}}{\partial x_1^2}+ +2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\hat{z}}{\partial x_1\partial x_2}+ +\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2\hat{z}}{\partial x_2^2}\Big]\,dx=$$

$$=\int_D\Big(l_0(x)-C^*\Lambda_{H_0}Q_0Cp(x)\Big)v_1(x)\,dx\quad \forall v_1\in H^2(D), \tag{12}$$

$$\int_D Q^{-1}\hat{z}(x)\,dx+\int_\Gamma Q_1^{-1}\hat{z}\,d\Gamma=0, \tag{13}$$

$$\int_D x_1Q^{-1}\hat{z}(x)\,dx+\int_\Gamma x_1Q_1^{-1}\hat{z}\,d\Gamma+ +\int_\Gamma\frac{\partial x_1}{\partial\nu}Q_2^{-1}\frac{\partial\hat{z}}{\partial\nu}\,d\Gamma=0, \tag{14}$$

$$\int_D x_2Q^{-1}\hat{z}(x)\,dx+\int_\Gamma x_2Q_1^{-1}\hat{z}\,d\Gamma+ +\int_\Gamma\frac{\partial x_2}{\partial\nu}Q_2^{-1}\frac{\partial\hat{z}}{\partial\nu}\,d\Gamma=0, \tag{15}$$

$$p\in H^2(D), \tag{16}$$

$$\int_D \Big[\Big(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \Big(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \Big) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \Big] \, dx =$$

$$= \int_D v_2(x) Q^{-1} \hat{z}(x) \, dx + \int_\Gamma v_2 Q_1^{-1} \hat{z} \, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu} \, d\Gamma \quad \forall v_2 \in H^2(D). \quad (17)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^* \Lambda_{H_0} Q_0 C p(x)) \, dx = 0, \quad (18)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^* \Lambda_{H_0} Q_0 C p(x)) x_1 \, dx = 0, \quad (19)$$

$$\int_D (l_0(x) - C^* \Lambda_{H_0} Q_0 C p(x)) x_2 \, dx = 0. \quad (20)$$

і

$$\hat{p} \in H^2(D), \quad (21)$$

$$\int_D \Big[\Big(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \Big) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \Big(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \Big) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_2^2} \Big] \, dx =$$

$$= \int_D \Big(C^* \Lambda_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\varphi})(x) \Big) v_1(x) \, dx \\ \forall v_1 \in H^2(D), \quad (22)$$

$$\int_D Q^{-1} \hat{p}(x) \, dx + \int_\Gamma Q_1^{-1} \hat{p} \, d\Gamma = 0, \quad (23)$$

$$\int_D x_1 Q^{-1} \hat{p}(x) \, dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1} \hat{p} \, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu} \, d\Gamma = 0, \quad (24)$$

$$\int_D x_2 Q^{-1} \hat{p}(x) \, dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1} \hat{p} \, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu} \, d\Gamma = 0, \quad (25)$$

$$\hat{\varphi} \in H^2(D), \quad (26)$$

$$\int_D \Big[\Big(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big) \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \Big(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \Big) \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_2^2} \Big] \, dx =$$

$$= \int_D v_2(x) (Q^{-1} \hat{p}(x) + f_0(x)) \, dx + \\ + \int_\Gamma v_2 (Q_1^{-1} \hat{p} + h_1^{(0)}) \, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial \nu} \Big(Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu} + h_2^{(0)} \Big) \, d\Gamma \\ \forall v_2 \in H^2(D), \quad (27)$$

$$\int_D C^* \Lambda_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\varphi})(x) \, dx = 0, \quad (28)$$

$$\int_D x_1 C^* \Lambda_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\varphi})(x) \, dx = 0, \quad (29)$$

$$\int_D x_2 C^* \Lambda_{H_0} Q_0 (y - C\hat{\varphi})(x) \, dx = 0, \quad (30)$$

відповідно, в якій рівності (21) – (30) *виконуються з ймовірністю 1. Тут* $\Lambda_{H_0} \in \mathcal{L}(H_0, H_0')$ *– оператор, який діє з* H_0 *на його спряжений простір* H_0' *та визначається рівністю* [3] $(v, u)_{H_0} = < v, \Lambda_{H_0} u >_{H_0 \times H_0'}$ $\forall u, v \in H_0$, *де* $< x, f >_{H_0 \times H_0'}, := f(x)$ *для* $x \in H_0$, $f \in H_0'$, $C^* : H_0' \to L^2(D)$ *– оператор, транспонований до* C, *що визначається співвідношенням* $< Cv, w >_{H_0 \times H_0'} = \int_D v(x) C^* w(x) \, dx$ *для всіх* $v \in L^2(D)$, $w \in H_0'$.

Похибка оцінювання ϱ *визначається формулою* $\varrho = l(p)^{1/2}$.

Основний результат. Застосуємо наведену вище теорему для дослідження представлення мінімаксних оцінок функціоналу (4) від невідомого розв'язку варіаційної задачі (2), (3) у випадку, коли в спостереженнях (1) оператор C є інтегральним.

З цією метою покладемо $H_0 = L^2(D_1) \times \ldots L^2(D_i) \times \ldots L^2(D_N)$, де D_i, $i = 1, \ldots, N$,

[3] Цей оператор існує в силу теореми Рісса.

- деякі підобласті області D з ліпшицевими границями. Тоді $\Lambda_{H_0} = I_{H_0}$, де I_{H_0} – одиничний оператор в H_0.

Нехай в спостереженнях (1) оператор $C: L^2(D) \to L^2(D_1) \times \ldots L^2(D_i) \times \ldots L^2(D_N)$ задається рівністю

$$C\varphi(x) = (C_1\varphi(x), \ldots, C_i\varphi(x) \ldots, C_N\varphi(x)),$$

$C_i : L^2(D) \to L^2(D_i)$ – інтегральний оператор, заданий виразом

$$C_i\varphi(x) := \int_{D_i} K_i(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad i = 1\ldots, N,$$

де $K_i \in L^2(D_i) \times L^2(D_i)$, так що спостереження y в (1) мають вигляд

$$y = \Big(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_N\Big),$$
$$\eta = \Big(\eta_1, \ldots, \eta_i, \ldots, \eta_N\Big), \qquad (31)$$

де

$$y_i(x) = \int_{D_i} K_i(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \eta_i(x),$$
$$x \in D_i, \quad i = \overline{1,N}, \quad (32)$$

а оператор Q_0 в умові (8), що входить в означення множини G_1, діє за формулою

$$Q_0\tilde{\eta} = (Q_1^{(0)}\tilde{\eta}_1, \ldots, Q_i^{(0)}\tilde{\eta}_i, \ldots, Q_N^{(0)}\tilde{\eta}_N),$$

в якій $Q_i^{(0)}(x)$ – неперервні додатні функції в області $\bar{D}_i$, $\tilde{\eta}_i \in L^2(\Omega, L^2(D_i))$, $i = 1, \ldots, N$.

В цьому випадку умова (8) набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} Q_i^{(0)}(x)\tilde{R}_i(x,x)\,dx \le 1,$$

де через $\tilde{R}_i(x,y) = \mathbb{E}\tilde{\eta}_i(x)\tilde{\eta}_i(y)$ позначена кореляційна функція процесу $\tilde{\eta}_i(x)$, $i = \overline{1,N}$, $(x,y) \in D_i \times D_i$.

Дійсно,

$$\mathbb{E}(Q_0\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{H_0} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(Q_i^{(0)}(x)\eta_i(x), \eta_i(x))_{L^2(D_i)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} Q_i^{(0)}(x)\mathbb{E}(\eta_i(x)\eta_i(x))\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} Q_i^{(0)}(x)\tilde{R}_i^{(0)}(x,x)\,dx.$$

і, отже, множина G_1 буде описуватись наступною формулою:

$$G_1 = \Big\{\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_i, \ldots, \tilde{\eta}_N) :$$
$$\mathbb{E}\|\tilde{\eta}_i\|^2_{L^2(D_i)} < \infty,$$
$$\mathbb{E}\tilde{\eta}_i = 0, \; i = \overline{1,N},$$
$$\sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} Q_i^{(0)}(x)\tilde{R}_i(x,x)\,dx \le 1.\Big\} \quad (33)$$

Легко бачити, що оператор $C^* : L^2(D_1) \times \ldots L^2(D_i) \times \ldots L^2(D_N) \to L^2(D)$, спряжений до C, буде задаватися формулою $C^*\psi(x) = \sum_{l=1}^{N} \chi_{D_l}(x) \int_{D_l} K_l(\xi,x)\psi_l(\xi)\,d\xi$, де $\psi(\xi) = (\psi_1(\xi), \ldots, \psi_l(\xi), \ldots, \psi_N(\xi))$, $\psi_l \in L^2(D_l)$, $\chi_{D_l}(x)$ – характеристична функція множини D_l, $l = 1, \ldots, N$.

Враховуючи, що

$$\hat{u} = Q_0Cp = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_N),$$
$$\hat{u}_l \in L^2(D_i), \; i = \overline{1,N},$$

де

$$\hat{u}_i(\xi) = Q_i^{(0)}(\xi) \int_{D_i} K_i(\xi,\xi_1)p(\xi_1)\,d\xi_1,$$
$$i = \overline{1,N}, \quad (34)$$

маємо

$$C^*J_{H_0}Q_0Cp(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(\cdot,\xi_1)p(\xi)\,d\xi_1, \quad (35)$$

де

$$\tilde{K}_i(x,\xi_1) = \int_{D_i} K_i(\xi,x)Q_i^{(0)}(\xi)K_i(\xi,\xi_1)d\xi.$$

Клас лінійних за спостереженнями (32) оцінок $\widehat{l(\varphi)}$ буде мати вигляд

$$\widehat{l(\varphi)} = \sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} u_i(x)y_i(x)\,dx + c. \qquad (36)$$

Таким чином, з проведеного вище аналізу та з теореми 1 для інтегральних операторів спостереження (32) у припущеннях, що

$$\eta \in G_1,$$

де η і G_1 визначаються формулами (31), (33), та

$$F := (f, h_1 h_2) \in G_0,$$

множина G_0 визначена вище, одержуємо наступний результат.

Теорема 2. *Мінімаксна оцінка* $\widehat{\widehat{l(\varphi)}}$ *значення* $l(\varphi)$ *визнається формулою*

$$\widehat{\widehat{l(\varphi)}} = \sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} \hat{u}_i(x) y_i(x)\, dx + \hat{c} = l(\hat{\varphi}),$$

де

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}(x) f^{(0)}(x)\, dx + \int_\Gamma \hat{z} h_1^{(0)}\, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu} h_2^{(0)}\, d\Gamma,$$

$$\hat{u}_i(x) = Q_i^{(0)}(x) \int_{D_i} K_i(x,\eta) p(\eta)\, d\eta, \\ i = \overline{1, N},$$

а функції $\hat{z}, p, \hat{\varphi} \in H^2(D)$ *знаходяться з розв'язку систем варіаційних рівнянь:*

$$\int_D \Big[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x_2^2} \Big]\, dx =$$

$$= \int_D \Big(l_0(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1) p(\xi_1)\, d\xi_1 \Big) v_1(x)\, dx \\ \forall v_1 \in H^2(D),$$

$$\int_D Q^{-1} \hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma Q_1^{-1} \hat{z}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D x_1 Q^{-1} \hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1} \hat{z}\, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D x_2 Q^{-1} \hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1} \hat{z}\, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0,$$

$$\int_D \Big[\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \Big]\, dx =$$

$$= \int_D v_2(x) Q^{-1} \hat{z}(x)\, dx + \int_\Gamma v_2 Q_1^{-1} \hat{z}\, d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\, d\Gamma \quad \forall v_2 \in H^2(D).$$

$$\int_D \Big(l_0(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1) p(\xi_1)\, d\xi_1 \Big)\, dx = 0,$$

$$\int_D \Big(l_0(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1) p(\xi_1)\, d\xi_1 \Big) x_1\, dx = 0,$$

$$\int_D \Big(l_0(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1) p(\xi_1)\, d\xi_1 \Big) x_2\, dx = 0.$$

і

$$\int_D \Big[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_2^2} \Big]\, dx =$$

$$= \int_D \Big(\theta(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1)\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi_1\Big) v_1(x)\,dx \\ \forall v_1 \in H^2(D),$$

$$\int_D Q^{-1}\hat{z}(x)\,dx + \int_\Gamma Q_1^{-1}\hat{z}\,d\Gamma = 0,$$

$$\int_D x_1 Q^{-1}\hat{p}(x)\,dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1}\hat{p}\,d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\,d\Gamma = 0,$$

$$\int_D x_2 Q^{-1}\hat{p}(x)\,dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1}\hat{p}\,d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\,d\Gamma = 0,$$

$$\int_D \Big[\Big(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\Big)\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_1^2} + \\ + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \Big(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}\Big)\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_2^2}\Big]\,dx =$$

$$= \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}(x) + f_0(x))\,dx + \\ + \int_\Gamma v_2(Q_1^{-1}\hat{p} + h_1^{(0)})\,d\Gamma + \\ + \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial \nu}\Big(Q_2^{-1}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu} + h_2^{(0)}\Big)\,d\Gamma, \quad \forall v_2 \in H^2(D),$$

$$\int_D \Big(\theta(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1)\hat{\varphi}(\xi_1)\,d\xi_1\Big)\,dx = 0,$$

$$\int_D \Big(\theta(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1)\hat{\varphi}(\xi_1)\,d\xi_1\Big) x_1\,dx = 0,$$

$$\int_D \Big(\theta(x) - \\ - \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} \tilde{K}_i(x,\xi_1)\hat{\varphi}(\xi_1)\,d\xi_1\Big) x_2\,dx = 0.$$

відповідно. Тут $\hat{p} \in H^2(D)$ *і*

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{N} \chi_{D_i}(x) \int_{D_i} K_i(\xi,x) Q_i^{(0)}(\xi) y_i(\xi)\,d\xi.$$

Похибка мінімаксного оцінювання ϱ *визначається формулою*

$$\varrho = l(p)^{1/2}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением – М.: Наука, 1968. – 476 с.

2. *Наконечный А.Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. – Киев: КГУ, 1985. – 82 с.

3. *Наконечный А.Г.* Минимаксные оценки в системах с распределенными параметрами. – Киев: Препринт Ин-та кибернетики АН УССР, №79, 1979. – 55 с.

4. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей. // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – №2 с. 104 – 128.

5. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Оцінювання параметрів вироджених еліптичних крайових задач Неймана в умовах невизначеності. //Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – №1. с. 262 – 269.

6. *Подлипенко Ю.К., Перцов А.С.* Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармоничного рівняння з граничними умовами типа Неймана // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – №4. с. 153 – 160.

7. *Подлипенко Ю.К., Наконечний О.Г., Перцов А.С.* Минимаксное оценивание решения краевой задачи для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана // Доповіді НАН України. – 2010. – №2. с. 43 – 50.