УДК 517.943

©2013 р. П. Ф. Самусенко

Інституту інформатики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, м. Київ

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

У роботі розроблено алгоритм побудови періодичних розв'язків вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу.

We provide an algorithm for construction of periodic solution of degenerate singularly perturbed systems of differential equations with delay.

Різноманітні аспекти теорії систем диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon),\ t \in [\varepsilon; T],$$

де $x(t,\varepsilon)$ та $f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon)$ – n-вимірні вектор-функції, з малим запізненням аргументу ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 << 1$) розглядалися в роботах А.Д. Мишкіса [1], А.Б. Васильєвої та О.М. Родіонова [2], Ю. О. Рябова [3] тощо. В. І. Рожков та Г. Д. Курдеванідзе довели існування та єдиність періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь з малим запізненням аргументу та побудували його асимптотичне розвинення за степенями малого параметру [4]. Зазначимо, що системи (1) за асимптотичними властивостями близькі до систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Періодичні розв'язки сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідних досліджувались в роботах А. М. Самойленка, М.І. Шкіля, В.П. Яковця та їх учнів [5, 6].

У даній роботі розроблено алгоритм побудови періодичного розв'язку виродженої ($\det B(t) \equiv 0,\ t \in [0;T]$) сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon),\ t \in [\varepsilon; T], \quad (1)$$

з малим запізненням аргументу ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 << 1$).

1. Некритичний випадок. Надалі припускаємо виконання таких умов:

1. Елементи матриці $B(t)$ та вектор-функції $f(x,[x],t,\varepsilon)$, $[x(t,\varepsilon)] = x(t-\varepsilon,\varepsilon)$, T-періодичні за змінною t відповідно на відрізку $[0;T]$ та на множині V, де

$$V = \{(x,[x],t,\varepsilon) : ||x|| \leq a,\ ||[x]|| \leq a,$$
$$0 \leq t \leq T,\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}.$$

2. Рівняння $f(x,x,t,0) = 0$ відносно x має T-періодичний розв'язок $x = x_0(t)$ такий, що:
а) $x_0(t) \in C[0;T]$;
б) точки $(x_0(t),t) \in U$, $U = \{(x,t) : ||x|| < a,\ 0 \leq t \leq T\}$;
в) корінь $x = x_0(t)$ є ізольованим на відрізку $[0;T]$.

3. На відрізку $[0;T]$ в'язка $f_x(\overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t), 0, 0) - \lambda B(t)$ регулярна, має $n-1$ скінченний елементарний дільник і один нескінченний елементарний дільник (f_x – квадратна матриця n-го порядку, що складається з вектор-стовпців $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i,j = \overline{1,n}$).

4. $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$, $i = \overline{1,n-1}$, причому $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0;T]$, $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n-1}$, де $\lambda_i(t)$ – корені характеристичного рівняння

$$\det(f_x(\overline{x}_0(t), \overline{x}_0(t), t, 0) - \lambda B(t)) = 0. \quad (2)$$

Під час побудови формального розв'язку системи (1), вважаємо, що $B(t) \in$

$C^\infty[-T;T]$, $f(x,t,\varepsilon)\in C^\infty(V_1)$,

$$V_1=\{(x,[x],t,\varepsilon):\ ||x||\le a,\ ||[x]||\le a,$$
$$-T\le t\le T,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}.$$

Формальний розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s x_s(t). \tag{3}$$

Для цього функцію $f(x(t,\varepsilon),[x(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)$ записуємо так

$$f(x(t,\varepsilon),[x(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)=f(x_0(t),x_0(t),t,0)+$$
$$+\varepsilon(f_x(t)+f_{[x]}(t))x_1(t)+f_1(t))+...+\varepsilon^s(f_x(t)+$$
$$+f_{[x]}(t))x_s(t)+f_s(t))+...\equiv\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\overline{f}_s(t),$$

де елементи матриць $f_x(t)$, $f_{[x]}(t)$ обчислюються в точці $(x_0(t),x_0(t),t,0)$, а вектори $f_s(t)$ певним чином виражаються через $x_k(t)$, $k<s$.

Підставимо (3) до системи (1) і зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Так, при ε^0 маємо

$$f(x_0(t),x_0(t),t,0)=0. \tag{4}$$

5. Нехай $\det(f_x(t)+f_{[x]}(t))\neq 0$, $t\in[0;T]$.

Тоді згідно з припущеннями 1, 2 рівняння (4) має T-періодичний розв'язок $x_0=x_0(t)$ такий, що $x_0(t)\in C^\infty[-T;T]$.

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^s, $s\in N$, дістаємо

$$B(t)\frac{dx_{s-1}}{dt}=(f_x(t)+f_{[x]}(t))x_s+f_s(t). \tag{5}$$

Тоді

$$x_s(t)=(f_x(t)+f_{[x]}(t))^{-1}\times$$
$$\times\left(B(t)\frac{dx_{s-1}(t)}{dt}-f_s(t)\right),\ s\in N.$$

При цьому, вектор-функції $x_s(t)$, $s\in N$, є T-періодичними.

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку системи (1). Зробивши заміну у системі (1)

$$x(t,\varepsilon)=x_m(t,\varepsilon)+y(t,\varepsilon), \tag{6}$$

де

$$x_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s x_s(t),$$

а $y(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція, дістаємо

$$\varepsilon B(t)\frac{dy}{dt}=f_x(t,\varepsilon)y+f_{[x]}(t,\varepsilon)[y]+h(y,[y],t,\varepsilon), \tag{7}$$

$$f_x(t,\varepsilon)=f_x(x_0(t),x_0(t),t,\varepsilon),$$
$$f_{[x]}(t,\varepsilon)=f_{[x]}(x_0(t),x_0(t),t,\varepsilon),$$

$h(y,[y],t,\varepsilon)=f(x_m+y,[x_m+y],t,\varepsilon)-\varepsilon B(t)\dfrac{dx_m}{dt}-f_x(t,\varepsilon)y-f_{[x]}(t,\varepsilon)[y].$

Доведемо існування такого T-періодичного розв'язку $y=y(t,\varepsilon)$ системи (7), що $y(0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{m+1})$.

Згідно [7, 8] існують неособливі T-періодичні достатньо гладкі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, для яких на відрізку $[0;T]$ мають місце рівності

$$P(t,\varepsilon)f_x(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{f}_x(t,\varepsilon)\equiv$$
$$\equiv diag\{e(t,\varepsilon),W_{n-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$P(t,\varepsilon)B(t)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,\varepsilon)\equiv$$
$$\equiv diag\{b(t,\varepsilon),E_{n-1}(t,\varepsilon)\},$$

де

$$e(t,0)=1,\ E_{n-1}(t,0)=E_{n-1},\ b(t,0)=0,$$
$$W_{n-1}(t,0)=W_{n-1}(t)\equiv\{\lambda_1(t),...,\lambda_{n-1}(t)\}.$$

Зробимо в системі (7) заміну $y(t,\varepsilon)=Q(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t,\varepsilon)$. Маємо

$$\varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dz_1}{dt}=e(t,\varepsilon)z_1+\varepsilon D_1(t,\varepsilon)z_1+$$
$$+\varepsilon D_2(t,\varepsilon)z_2+F_1(t,\varepsilon)[z_1]+F_2(t,\varepsilon)[z_2]+$$
$$+w_1(z,[z],t,\varepsilon), \tag{8}$$

$$\varepsilon\frac{dz_2}{dt}=W_{n-1}(t)z_2+\varepsilon D_3(t,\varepsilon)z_1+$$
$$+(E_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon)W_{n-1}(t,\varepsilon)-W_{n-1}(t)+$$
$$+\varepsilon D_4(t,\varepsilon))z_2+F_3(t,\varepsilon)[z_1]+F_4(t,\varepsilon)[z_2]+$$
$$+w_2(z,[z],t,\varepsilon), \tag{9}$$

де

$$D(t,\varepsilon)=-diag\{1,E_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon)\}\widetilde{B}(t,\varepsilon)\times$$
$$\times Q^{-1}(t,\varepsilon)Q'(t,\varepsilon)\equiv\begin{pmatrix}D_1(t,\varepsilon) & D_2(t,\varepsilon)\\ D_3(t,\varepsilon) & D_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$
$$F(t,\varepsilon)=diag\{1,E_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon)\}P(t,\varepsilon)\times$$
$$\times f_{[x]}(t,\varepsilon)[Q(t,\varepsilon)]\equiv\begin{pmatrix}F_1(t,\varepsilon) & F_2(t,\varepsilon)\\ F_3(t,\varepsilon) & F_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$
$$w(z,[z],t,\varepsilon)=diag\{1,E_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon)\}\times$$
$$\times P(t,\varepsilon)h(Q(t,\varepsilon)z,[Q(t,\varepsilon)z],t,\varepsilon),$$

$D_4(t,\varepsilon)$ та $F_4(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці $(n-1)$-го порядку; z_1 та w_1 – перші компоненти векторів z та w відповідно, а z_2 та w_2 – вектори, що містять решту компонент z та w.

Зазначимо, що

$$||w(v_1,[v_1],t,\varepsilon)-w(v_2,[v_2],t,\varepsilon)||\le$$
$$\le\varepsilon k_0(||v_1-v_2||+||[v_1]-[v_2]||)$$

для всіх $v_1,\ v_2\in D_1$, де

$$D_1=\{u(t,\varepsilon)\in C[\varepsilon;T]:||u(t,\varepsilon)||\le k_1\varepsilon\},$$

та $||w(0,0,t,\varepsilon)||\le k_2\varepsilon^{m+1},\ t\in[\varepsilon;T]$.

6. Нехай $b(t,\varepsilon)=\varepsilon^k b_1(t,\varepsilon),\ k>0$, причому $\operatorname{Re} b_1(t,0)\ne 0,\ t\in[0;T]$.

Тоді із системи (8), (9) дістаємо

$$z_1(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}\frac{1}{b(s,\varepsilon)}(\Psi_1(s,\varepsilon)(\Psi_1^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-$$
$$-1)\Psi_1^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}u(z,[z],s,\varepsilon)ds,\qquad(10)$$
$$z_2(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}\Psi_{n-1}(s,\varepsilon)(\Psi_{n-1}^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-$$
$$-E_{n-1})\Psi_{n-1}^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}v(z,[z],s,\varepsilon)ds,\qquad(11)$$

де $\Psi_1(t,\varepsilon)$ – розв'язок задачі Коші

$$\varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dz_1}{dt}=e(t,\varepsilon)z_1,\ \Psi_1(\varepsilon,\varepsilon)=1,$$

а $\Psi_{n-1}(t,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця однорідної системи

$$\varepsilon\frac{dz_2}{dt}=W_{n-1}(t)z_2,\ \Psi_{n-1}(\varepsilon,\varepsilon)=E_{n-1},$$

$$u(z,[z],s,\varepsilon)=\varepsilon D_1(s,\varepsilon)z_1+\varepsilon D_2(s,\varepsilon)z_2+$$
$$+F_1(s,\varepsilon)[z_1]+F_2(s,\varepsilon)[z_2]+w_1(z,[z],s,\varepsilon),$$
$$v(z,[z],s,\varepsilon)=\varepsilon D_3(s,\varepsilon)z_1+(E_{n-1}^{-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times W_{n-1}(s,\varepsilon)-W_{n-1}(s)+\varepsilon D_4(s,\varepsilon))z_2+$$
$$+F_3(s,\varepsilon)[z_1]+F_4(s,\varepsilon)[z_2]+w_2(z,[z],s,\varepsilon).$$

Нехай $W_{n-1}(t)=diag\{W_+(t),W_-(t)\}$, де $W_+(t)$ та $W_-(t)$ – матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $W_{n-1}(t)$ відповідно з додатними та від'ємними дійсними частинами. Для визначеності припустимо, що $\operatorname{Re}\dfrac{e(t,\varepsilon)}{b(t,\varepsilon)}>0,\ t\in[\varepsilon;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$.

Тоді

$$z_1(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{e(t,\varepsilon)}{b(t,\varepsilon)}dt\right)-1\right)^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_0^T\frac{1}{b(t+s,\varepsilon)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t+s}^{t}\frac{e(t,\varepsilon)}{b(t,\varepsilon)}dt\right)\times$$
$$\times u(z(t+s,\varepsilon),[z(t+s,\varepsilon)],t+s,\varepsilon)ds,\qquad(12)$$
$$z_{2+}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}W_+(t)dt\right)-E_+\right)^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_0^T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t+s}^{t}W_+(t)dt\right)\times$$
$$\times v_+(z(t+s,\varepsilon),[z(t+s,\varepsilon)],t+s,\varepsilon)ds,\qquad(13)$$
$$z_{2-}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left(E_--\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}W_-(t)dt\right)\right)^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_0^T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t+s-T}^{t}W_-(t)dt\right)\times$$
$$\times v_-(z(t+s,\varepsilon),[z(t+s,\varepsilon)],t+s,\varepsilon)ds,\qquad(14)$$

де

$$v(z,[z],t,\varepsilon)=$$
$$=colon(v_+(z,[z],t,\varepsilon),v_-(z,[z],t,\varepsilon)),$$
$$z_2(t,\varepsilon)=colon(z_{2+}(t,\varepsilon),z_{2-}(t,\varepsilon)),$$

причому розмірності векторів $v_+(z,[z],t,\varepsilon)$, $z_{2+}(t,\varepsilon)$ та $v_-(z,[z],t,\varepsilon)$, $z_{2-}(t,\varepsilon)$ відповідно дорівнюють порядку матриць $W_+(t)$ та $W_-(t)$; E_+ та E_- – одиничні матриці відповідного порядку.

Позначимо через $\lambda_{i+}(t)$ та $\lambda_{j-}(t)$ довільні фіксовані власні значення матриць $W_+(t)$ та $W_-(t)$ відповідно. Тоді існують такі сталі c_+, c_-, що $0 < c_+ \leq \operatorname{Re}\lambda_{i+}(t)$, $\operatorname{Re}\lambda_{j-}(t) \leq c_- < 0$, $t \in [0;T]$, для всіх i, j.

7. Нехай

$$c \max_{0\leq t\leq T} \left\{ \frac{|b_1(t,0)|}{\operatorname{Re} b_1(t,0)}, \frac{1}{c_+}, \frac{1}{|c_-|} \right\} < \frac{1}{2},$$

де $||F(t,\varepsilon)|| \leq c$, $t \in [\varepsilon;T]$.

Тоді оператор, що визначений за допомогою (12) – (14), відображає множину

$$P_{m+1} = \{z(t,\varepsilon) \in C[\varepsilon;T] :$$
$$z(t+T,\varepsilon) = z(t,\varepsilon), ||z(t,\varepsilon)|| \leq k_3\varepsilon^{m+1}\},$$

в себе і є оператором стиску. А тому система (12) – (14) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [9]. Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай $B(t) \in C^{m+1}[-T;T]$, $f(x,[x],t,\varepsilon) \in C^{m+1}(V_1)$ і виконуються умови 1 – 7. Тоді існує таке ε_1, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що система (1) на відрізку $[\varepsilon;T]$ для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ має єдиний T-періодичний розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$, для якого

$$||x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^{m+1}). \qquad (15)$$

2. Критичний випадок. Припустимо, що виконуються такі умови:

8. Рівняння $f(x,x,t,0) = 0$ відносно x має T-періодичний розв'язок $x = x_0(t,\alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k)$ – k-вимірний вектор, компонентами якого є довільні параметри, причому:

а) $x_0(t,\alpha) \in C^{m+2}(D(t,\alpha))$, $D(t,\alpha) = [-T;T] \times D(\alpha)$, $D(\alpha)$ – область зміни параметрів α_1, ..., α_k;

б) ранг матриці $x_{0\alpha}(t,\alpha)$ дорівнює k для всіх $(t,\alpha) \in D(t,\alpha)$.

9. $\lambda_i(t) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $i = \overline{1,k}$; $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$, $i = \overline{k+1,n-1}$, причому $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $t \in [0;T]$, $i \neq j$, $i,j = \overline{k+1,n-1}$, де $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,n-1}$, – корені рівняння (2).

Розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді (3). Тоді $x_0(t,\alpha)$ знаходимо з рівняння (4). Диференціюючи отриману тотожність (4) за змінною α, дістаємо

$$(f_x(t) + f_{[x]}(t))x_{0\alpha}(t,\alpha) \equiv 0, \ (t,\alpha) \in D(t,\alpha),$$

тобто стовпці матриці $x_{0\alpha}(t,\alpha)$ є власними векторами матриці $f_x(t) + f_{[x]}(t)$, що відповідають нульовому власному значенню.

Вектор-функцію $x_1(t)$ визначаємо з (5) при $s = 1$

$$(f_x(t) + f_{[x]}(t))x_1 = B(t)\frac{dx_0}{dt} - f_1(t). \qquad (16)$$

10. Нехай на відрізку $[0;T]$ в'язка $f_x(t) + f_{[x]}(t) - \lambda B(t)$ регулярна і має прості скінченні елементарні дільники.

Критерієм розв'язності системи (16) відносно $x_1(t)$ є ортогональність вектор-функції $B(t)\dfrac{dx_0}{dt} - f_1(t)$ до власних векторів $d_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, матриці $(f_x(t) + f_{[x]}(t))^*$, які відповідають нульовому власному значенню. Тобто

$$(D(t), B(t)\frac{dx_0(t,\alpha)}{dt} -$$
$$- f_\varepsilon(x_0(t,\alpha), x_0(t,\alpha), t, 0)) = 0$$

або

$$(D(t), B(t)x_{0\alpha}(t,\alpha))\frac{d\alpha}{dt} = D(t)\times$$
$$\times(f_\varepsilon(x_0(t,\alpha), x_0(t,\alpha), t, 0) - B(t)x_{0t}(t,\alpha)), \qquad (17)$$

де $D(t)$ – $(k \times n)$-матриця, рядками якої є вектори $d_i(t)$, $i = \overline{1,k}$.

Зазначимо, що

$$det(D(t), B(t)x_{0\alpha}(t,\alpha)) \neq 0$$

для всіх $t \in [0;T]$ [8, 10]. Таким чином, рівняння (17) можна записати у вигляді

$$\frac{d\alpha}{dt} = (D(t), B(t)x_{0\alpha}(t,\alpha))^{-1}D(t)\times$$
$$\times(f_\varepsilon(x_0(t,\alpha), x_0(t,\alpha), t, 0) - B(t)x_{0t}(t,\alpha)). \qquad (18)$$

11. Нехай рівняння (18) має такий T-періодичний розв'язок $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [0;T]$, що $(x_0(t,\alpha(t)), t) \in U$.

Тоді загальний розв'язок системи (16) матиме вигляд

$$x_1(t) = x_{0\alpha}(t,\alpha)\beta(t) + \widetilde{x}_1(t),$$

де $\beta(t)$ – довільна k-вимірна векторфункція, а $\widetilde{x}_1(t)$ – деякий частинний розв'язок системи (16).

Зрівнюючи коефіцієнти при ε^2 аналогічно дістаємо

$$\frac{d\beta}{dt} = (D(t), B(t)x_{0\alpha}(t,\alpha))^{-1} D(t) r(\beta, t), \tag{19}$$

де компоненти $r(\beta,t)$ є многочленами другого степеня відносно β.

12. Нехай рівняння (19) має T-періодичний розв'язок $\beta = \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

На k-тому кроці вираз для $x_k(t)$ міститиме довільну функцію $\eta_k(t)$. Причому, починаючи з $k = 3$, для визначення функції $\eta_k(t)$ отримуємо лінійні диференціальні рівняння [10].

13. Припустимо, що функції $\eta_k(t)$, $t \in [0;T]$, $k = \overline{3,m}$, є T-періодичними розв'язками відповідних систем диференціальних рівнянь.

З'ясуємо асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку системи (1). Зробивши у системі (1) заміну

$$x(t,\varepsilon) = x_{m+1}(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon), \tag{20}$$

приходимо до системи (7), в якій

$$f_x(t,\varepsilon) =$$
$$= f_x\left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t), x_0(t) + \varepsilon x_1(t), t, \varepsilon\right),$$
$$f_{[x]}(t,\varepsilon) =$$
$$= f_{[x]}\left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t), x_0(t) + \varepsilon x_1(t), t, \varepsilon\right).$$

Тоді

$$||w(v_1,[v_1],t,\varepsilon) - w(v_2,[v_2],t,\varepsilon)|| \le$$
$$\le \varepsilon^2 k_0(||v_1 - v_2|| + ||[v_1] - [v_2]||)$$

для всіх v_1, $v_2 \in D_2$, де

$$D_2 = \{u(t,\varepsilon) \in C[\varepsilon;T] : ||u(t,\varepsilon)|| \le k_1\varepsilon^2\}.$$

У даному випадку існують такі неособливі T-періодичні достатньо гладкі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, що

$$P(t,\varepsilon) f_x(t,\varepsilon) Q(t,\varepsilon) = \widetilde{f}_x(t,\varepsilon) \equiv$$
$$\equiv diag\{e(t,\varepsilon), W_{n-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$W_{n-1}(t,\varepsilon) = diag\{W_k(t,\varepsilon), W_{n-k-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$P(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) Q(t,\varepsilon) = \widetilde{B}(t,\varepsilon) \equiv$$
$$\equiv diag\{b(t,\varepsilon), E_{n-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$E_{n-1}(t,\varepsilon) = diag\{E_k(t,\varepsilon), E_{n-k-1}(t,\varepsilon)\},$$

для всіх $[0;T]$, де

$$e(t,0) = 1,\ E_k(t,0) = E_k,$$
$$E_{n-k-1}(t,0) = E_{n-k-1},$$
$$b(t,0) = 0,\ W_k(t,0) = 0,$$
$$W_{n-k-1}(t,0) = W_{n-k-1}(t) \equiv$$
$$\equiv diag\{\lambda_{k+1}(t), ..., \lambda_{n-1}(t)\}.$$

Як і раніше, будуємо систему, що аналогічна (8), (9),

$$\varepsilon b(t,\varepsilon)\frac{dz_1}{dt} = e(t,\varepsilon) z_1 + \varepsilon D_1(t,\varepsilon) z_1 +$$
$$+\varepsilon D_2(t,\varepsilon) z_2 + \varepsilon D_3(t,\varepsilon) z_3 + F_1(t,\varepsilon)[z_1] +$$
$$+F_2(t,\varepsilon)[z_2] + F_3(t,\varepsilon)[z_3] + w_1(z,[z],t,\varepsilon), \tag{21}$$
$$\varepsilon\frac{dz_2}{dt} = (E_k^{-1}(t,\varepsilon) W_k(t,\varepsilon) + \varepsilon D_5(t,\varepsilon)) z_2 +$$
$$+\varepsilon D_4(t,\varepsilon) z_1 + \varepsilon D_6(t,\varepsilon) z_3 + F_4(t,\varepsilon)[z_1] +$$
$$+F_5(t,\varepsilon)[z_1] + F_6(t,\varepsilon)[z_1] + w_2(z,[z],t,\varepsilon), \tag{22}$$
$$\varepsilon\frac{dz_3}{dt} = W_{n-k-1}(t) z_3 + \varepsilon D_7(t,\varepsilon) z_1 +$$
$$+\varepsilon D_8(t,\varepsilon) z_2 + (E_{n-k-1}^{-1}(t,\varepsilon) W_{n-k-1}(t,\varepsilon) -$$
$$-W_{n-k-1}(t) + \varepsilon D_9(t,\varepsilon)) z_3 + F_7(t,\varepsilon)[z_1] +$$
$$+F_8(t,\varepsilon)[z_2] + F_9(t,\varepsilon)[z_3] + w_3(z,[z],t,\varepsilon), \tag{23}$$

де $D_i(t,\varepsilon)$, $F_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,9}$, – прямокутні матриці відповідних розмірів; z_1 та w_1 – перші компоненти векторів z та w, z_2 та w_2 – k-вимірні вектори, що містять k компонент z та w, починаючи з другої, z_3 та w_3 – $(n-k-1)$-вимірні вектори, що містять решту компонент z та w.

Припустимо, що має місце умова 6. Тоді із системи (21) – (23) дістаємо

$$z_1(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T} \frac{1}{b(s,\varepsilon)}(\Psi_1(s,\varepsilon)\times$$

$$\times(\Psi_1^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-1)\Psi_1^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}(\varepsilon D_1(s,\varepsilon)z_1+$$
$$+\varepsilon D_2(s,\varepsilon)z_2+\varepsilon D_3(s,\varepsilon)z_3+F_1(s,\varepsilon)[z_1]+$$
$$+F_2(s,\varepsilon)[z_2]+F_3(s,\varepsilon)[z_3]+w_1(z,[z],s,\varepsilon))ds, \quad (24)$$

$$z_2(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}(\Psi_k(s,\varepsilon)(\Psi_k^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-$$
$$-E_k)\Psi_k^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}(\varepsilon D_4(s,\varepsilon)z_1+\varepsilon D_6(s,\varepsilon)z_3+$$
$$+F_4(s,\varepsilon)[z_1]+F_5(s,\varepsilon)[z_2]+F_6(s,\varepsilon)[z_3]+$$
$$+w_2(z,[z],s,\varepsilon))ds, \quad (25)$$

$$z_3(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+T}(\Psi_{n-k-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times(\Psi_{n-k-1}^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-E_{n-k-1})\Psi_{n-k-1}^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}\times$$
$$\times(\varepsilon D_7(s,\varepsilon)z_1+\varepsilon D_8(s,\varepsilon)z_2+(E_{n-k-1}^{-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times W_{n-k-1}(s,\varepsilon)-W_{n-k-1}(s)+\varepsilon D_9(s,\varepsilon))z_3+$$
$$+F_7(s,\varepsilon)[z_1]+F_8(s,\varepsilon)[z_2]+F_9(s,\varepsilon)[z_3]+$$
$$+w_3(z,[z],s,\varepsilon))ds, \quad (26)$$

де функція $\Psi_1(t,\varepsilon)$ визначена раніше, $\Psi_k(t,\varepsilon)$ та $\Psi_{n-k-1}(t,\varepsilon)$ – фундаментальні матриці відповідно систем

$$\varepsilon\frac{dz_2}{dt}=(E_k^{-1}(t,\varepsilon)W_k(t,\varepsilon)+\varepsilon D_5(t,\varepsilon))z_2,$$
$$\Psi_k(\varepsilon,\varepsilon)=E_k,$$

та

$$\varepsilon\frac{dz_3}{dt}=W_{n-k-1}(t)z_3,\ \Psi_{n-k-1}(\varepsilon,\varepsilon)=E_{n-k-1}.$$

Припустимо виконання таких умов:
14. $||(\Psi_k(s,\varepsilon)(\Psi_k^{-1}(T+\varepsilon,\varepsilon)-E_k)\times$ $\times\Psi_k^{-1}(t,\varepsilon))^{-1}||\le d,\ t\le s\le t+T,\ t\in[\varepsilon;T]$.
15. $||F_i(t,\varepsilon)||\le c\left(\exp\left(-\dfrac{\alpha t}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\right)$, $\alpha>0,\ i=\overline{4,6},\ t\in[\varepsilon;T]$.
16. $c\max\limits_{0\le t\le T}\left\{\dfrac{|b_1(t,0)|}{\mathrm{Re}\,b_1(t,0)},\dfrac{1}{c_+},\dfrac{1}{|c_-|}\right\}<\dfrac{1}{3}$, $cd\left(5T+\dfrac{3}{\alpha}\right)<1$, де сталі c_+, c_- визначаються для матриці $\Psi_{n-k-1}(t,\varepsilon)$; $||D(t,\varepsilon)||\le c$, $||F(t,\varepsilon)||\le c,\ t\in[\varepsilon;T]$.

Тоді оператор, визначений за допомогою (24) – (26), відображає множину P_{m+1} в себе і є оператором стиску. А тому система (24) – (26) на множині P_{m+1} має єдиний розв'язок [9]. Таким чином справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай $B(t)\in C^{m+2}[-T;T]$, $f(x,[x],t,\varepsilon)\in C^{m+2}(V_1)$ і виконуються умови 1, 3, 6, 8 – 16. Тоді існує таке ε_1, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що система (1) на відрізку $[\varepsilon;T]$ для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$ має єдиний T-періодичний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$, для якого справджується оцінка (15).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. – 1949. – **4**, N5 (33). – С. 99-141.

2. *Васильева А.Б., Родионов А.М.* Применение метода возмущений к уравнению с запаздывающим аргументом в случае малого запаздывания // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1968. – **1**. – С. 20-27.

3. *Рябов Ю.А.* Метод малого параметра в теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1962. – **1**. – С. 103-113.

4. *Курдеванидзе Г.Д.* О периодическом режиме движения управляемого объекта с малым запаздыванием. Автоматическое управление // Труды XIII:I, Институт систем и управления, АН ГССР, Тбилиси. – 1974. – С. 168-181.

5. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.

6. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Выща шк., 1989. – 287 с.

7. *Sibuya Y.* Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point // Funkcialaj Ekvacioj. – 1962. – **4**. – P. 29-56.

8. *Самусенко П.Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь з виродженнями. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 343 с.

9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

10. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М.: Изд-во Моск. унив., 1978. – 107 с.