УДК 517.988.6

©2013 р. В. Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

ДОСЛІДЖЕННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ, ЩО НЕ ВИКОРИСТОВУЄ $\mathcal{H}$-КЛАСИ ЦИХ РІВНЯНЬ

Отримано умови існування майже періодичних розв'язків лінійних і нелінійних майже періодичних різницевих рівнянь, що не використовують $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь.

We obtain conditions for the existence of almost periodic solutions of linear and nonlinear almost periodic difference equations which does not use $\mathcal{H}$-classes of these equations.

1. Основні позначення та задача. Нехай $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел, $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел і E – довільний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E.$$

Визначимо оператор зсуву $S_h : C^0 \to C^0$, $h \in \mathbb{R}$, рівностями

$$(S_h x)(t) = x(t+h),\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Елемент $y \in C^0$ називається *майже періодичним* (див., наприклад, [1,2]), якщо замикання множини $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^0 є компактною підмножиною цього простору.

Позначимо через B^0 банаховий простір майже періодичних елементів простору C^0 з нормою

$$\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}.$$

Нехай Ω – область простору E, тобто відкрита зв'язна множина простору E, і $\mathcal{K}$ – множина всіх непорожніх зв'язних компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо неперервне відображення $F : \mathbb{R} \times \Omega^{m+1} \to E$, де $m \in \mathbb{Z}_+$, що задовольняє умови:

1) векторна функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_m)$ рівномірно неперервна по $x_0, x_1, \ldots, x_m$ на кожній множині $\mathbb{R} \times K^{m+1}$, де $K \in \mathcal{K}$;

2) векторна функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_m)$ майже періодична по t рівномірно по $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ на кожній множині K^{m+1}, де $K \in \mathcal{K}$.

Неважко показати, що аналогічно, як і в [2, с. 428–429], для кожної множини $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ x_i \in K,\ i=\overline{0,m}}} \|F(t, x_0, x_1, \ldots, x_m)\|_E < +\infty$$

і для кожної послідовності $(h_k)_{k\geqslant 1}$, $h_k \in \mathbb{R}$, існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geqslant 1}$, для якої послідовність $(F(t + h_{k_l}, x_0, x_1, \ldots, x_m))_{l\geqslant 1}$ рівномірно збігається на $\mathbb{R} \times K^{m+1}$.

Будемо вважати, що послідовність $(F(t + h_{k_l}, x_0, x_1, \ldots, x_m))_{l\geqslant 1}$ рівномірно збігається на кожній множині $\mathbb{R} \times K^{m+1}$, $K \in \mathcal{K}$, і відображення $G : \mathbb{R} \times \Omega^{m+1} \to E$, що визначається співвідношенням

$$G(t, x_0, x_1, \ldots, x_m) = \\ = \lim_{l\to\infty} F(t + h_{k_l}, x_0, x_1, \ldots, x_m), \tag{2}$$

задовольняє умови 1 і 2. Ця вимога виконується, якщо, наприклад, простір E є скінченновимірним, що перевіряється аналогічним чином як і в [2] у випадку $m = 0$. Зауважимо, що в статті ця вимога буде виконувати допоміжну роль при викладенні матеріалу і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Розглянемо різницеве рівняння

$$F(t, x(t), x(t - \Delta_1), \ldots, x(t - \Delta_m)) = 0, \tag{3}$$

де відхилення аргументів $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ є довільними дійсними числами (одні відхилення можуть бути додатними, інші – від'ємними).

$\mathcal{H}$*-класом* рівняння (3) називається множина всіх різницевих рівнянь

$$G(t, y(t), y(t-\Delta_1), \ldots, y(t-\Delta_m)) = 0,$$

ліва частина яких визначається за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов майже періодичності обмежених розв'язків рівняння (3) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Зазначимо, що не кожний обмежений розв'язок рівняння (3) є майже періодичним. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад. Нехай $E = \mathbb{R}$. Визначимо відображення $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ рівністю

$$H(t, x_0, x_1) =$$

$$= \sin t \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x_0| + |x_1| \leqslant 1, \\ |x_0| + |x_1| - 1, & \text{якщо } |x_0| + |x_1| > 1, \end{cases}$$

що, як і відображення F, задовольняє умови 1 і 2. Очевидно, що кожна неперервна функція $x = x(t)$, для якої $|x(t)| \leqslant 1/2$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком різницевого рівняння

$$H(t, x(t), x(t-1)) = 0.$$

Зауважимо, що у випадку $m = 0$ рівняння (3) має вигляд

$$F(t, x(t)) = 0. \tag{4}$$

Це рівняння досліджувалося в [3].

При дослідженні рівняння (3) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння, замикання множин значень яких є елементами з $\mathcal{K}$.

2. Функціонал Δ. Позначимо через $\mathcal{N}(F, K)$ множину всіх обмежених розв'язків $x = x(t)$ рівняння (3), для кожного з яких замикання $\overline{R(x)}$ множини

$$R(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

у просторі E є підмножиною множини $K \in \mathcal{K}$ і

$$\overline{R(x)} \neq K. \tag{5}$$

Зафіксуємо довільні множину $K \in \mathcal{K}$ і розв'язок $x^* \in \mathcal{N}(F, K)$ рівняння (3). Вважаємо, що

$$\mathcal{N}(F, K) \neq \varnothing.$$

Покладемо

$$r(x^*, K, F) =$$
$$= \sup \left\{ \|x - y\|_E : x \in \overline{R(x^*)},\ y \in K \right\}.$$

На підставі (5)

$$r(x^*, K, F) > 0.$$

Для $\varepsilon \in [0, r(x^*, K, F)]$ розглянемо множину $\Omega(x^*, K, F, \varepsilon)$ всіх елементів $y \in C^0$, для кожного з яких

$$x^*(t) + y(t) \in K$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$ і

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \big| \|y(t)\|_E - \varepsilon \big| = 0.$$

Аналогічним чином можна визначити множину $\Omega(z, K, F, \varepsilon)$ для будь-якої іншої функції $z \in C^0$, для якої $R(z) \subset K$.

Розглянемо функціонал

$$\Delta(x^*, K, F, \varepsilon) =$$
$$= \inf_{y \in \Omega(x^*, K, F, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, x^*(t) + y(t),$$
$$x^*(t-\Delta_1) + y(t-\Delta_1), \ldots,$$
$$x^*(t-\Delta_m) + y(t-\Delta_m))\|_E. \tag{6}$$

Застосування функціонала Δ до дослідження майже періодичних нелінійного рівняння (3) та аналогічного лінійного рівняння наведемо в наступних пунктах.

3. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (3), в яких на відміну від відомих теореми Фавара про майже періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь [4] та теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь [2,5] не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (3).

Теорема 1. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $z \in \mathcal{N}(F, K)$ рівняння (3) і деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, F, \varepsilon) > 0 \tag{7}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(F, K)$ рівняння (3) не є елементом простору B^0. Тоді за компактністю множини K існує збіжна в точці $t = 0$ послідовність $(z\,(t + h_p))_{p \geqslant 1}$, причому довільна її підпослідовність $(z\,(t + k_p))_{p \geqslant 1}$ не збігається рівномірно на $\mathbb{R}$. Отже,

$$\lim_{p,q \to \infty} \|z(h_p) - z(h_q)\|_E = 0 \tag{8}$$

та існують послідовності $(p_r)_{r \geqslant 1}$, $(q_r)_{r \geqslant 1}$ і число $\gamma \in (0, \delta)$, для яких

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r})\|_E > \gamma, \ \ r \geqslant 1. \tag{9}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $(F(t + k_p, x_0, x_1, \ldots, x_m))_{p \geqslant 1}$ – рівномірно збіжна на $\mathbb{R} \times K^{m+1}$ послідовність. Тоді

$$\lim_{p,q \to \infty} \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ x_i \in K,\ i = \overline{\{0, m\}}}} \|F(t + k_p, x_0, x_1, \ldots, x_m) -$$

$$-F(t + k_q, x_0, x_1, \ldots, x_m)\|_E = 0. \tag{10}$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon_0 \in (0, \gamma]$. На підставі (8) і (9) для функцій

$$y_r(t) = z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r}), \ \ r \geqslant 1,$$

виконується співвідношення

$$y_r \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, F, \varepsilon_0), \ \ r \geqslant 1, \tag{11}$$

де S_h – оператор зсуву, що визначається співвідношенням (1).

Покажемо, що

$$\Delta(z, K, F, \varepsilon_0) = 0. \tag{12}$$

Завдяки (6), (11) та того, що

$$F(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r}), z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{p_r} - \Delta_m)) \equiv 0, \ \ r \geqslant 1,$$

виконуються співвідношення

$$\Delta(z, K, F, \varepsilon_0) =$$

$$= \inf_{y \in \Omega(z, K, F, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, z(t) + y(t), z(t - \Delta_1) +$$

$$+ y(t - \Delta_1), \ldots, z(t - \Delta_m) + y(t - \Delta_m))\|_E =$$

$$= \inf_{y \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, F, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{q_r}, z(t + k_{q_r}) +$$

$$+ y(t), z(t + k_{q_r} - \Delta_1) + y(t - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{q_r} - \Delta_m) + y(t - \Delta_m))\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{q_r}, z(t + k_{q_r}) + y_r(t),$$

$$z(t + k_{q_r} - \Delta_1) + y_r(t - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{q_r} - \Delta_m) + y_r(t - \Delta_m))\|_E =$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r}), z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{p_r} - \Delta_m))\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r}), z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{p_r} - \Delta_m))\|_E +$$

$$+ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{p_r} - \Delta_m)) -$$

$$-F(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{p_r} - \Delta_m))\|_E =$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{p_r} - \Delta_m)) -$$

$$-F(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \ldots,$$

$$z(t + k_{p_r} - \Delta_m))\|_E,$$

з яких на підставі (10) випливає співвідношення (12), що суперечить (7).

Таким чином, припущення, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(F, K)$ рівняння (3) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

4. Випадок лінійного рівняння (3). Застосуємо теорему 1 до дослідження лінійних майже періодичних різницевих рівнянь.

Позначимо через $L(E, E)$ – банаховий простір всіх лінійних неперервних операторів $A : E \to E$ з нормою

$$\|A\|_{L(E,E)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_E.$$

Розглянемо неперервне відображення $F_1 : \mathbb{R} \times E^{m+1} \to E$, що визначається рівністю

$$F_1(t, x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=0}^{m} A_k(t) x_k + h(t),$$

де $A_k(t)$, $k = \overline{0, m}$, – неперервні і майже періодичні на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E, E)$ і $h \in B^0$. Також розглянемо відповідне лінійне різницеве рівняння

$$\sum_{k=0}^{m} A_k(t) x(t - \Delta_k) + h(t) = 0, \qquad (13)$$

де $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ – довільні дійсні числа, серед яких можуть бути як додатні, так і від'ємні числа, і $\Delta_0 = 0$. Очевидно, що рівняння (13) є окремим випадком рівняння (3).

Зазначимо, що в рівнянні (13) оператори $A_k(t)$, $k = \overline{0, m}$, $t \in \mathbb{R}$, можуть не мати обернених неперервних операторів. Якщо ці оператори мають обернені неперервні оператори, то операторні функції $A_k^{-1}(t)$, $k = \overline{0, m}$, можуть не бути майже періодичними.

На підставі теореми 1 справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо лінійне рівняння* (13) *має обмежений розв'язок $z \in \mathcal{N}(F_1, K)$ і для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, F_1, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауважимо, що у випадку $\dim E < \infty$ більш загальні рівняння, ніж (13), з довільним $h \in C^0$ досліджувалися автором у [6].

5. Застосування теорем 1 і 2. Використаємо теореми 1 і 2 до дослідження майже періодичних нелінійних диференціальних рівнянь та лінійних операторних різницевих рівнянь.

5.1. Диференціальні рівняння. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x), \qquad (14)$$

в якому відображення $h : \mathbb{R} \times E \to E$ є неперервним.

Вважатимемо, що для кожних числа $t_0 \in \mathbb{R}$ і вектора $x_0 \in E$ рівняння (14) має єдиний розв'язок $x = x(t)$, що задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = x_0. \qquad (15)$$

Умови виконання цієї вимоги можна знайти в [7, 8].

Розв'язок задачі (14), (15) позначимо через $x = x(t, t_0, x_0)$.

Визначимо відображення $U : \mathbb{R} \times E \to E$ за допомогою співвідношення

$$U(t, y) = x(t + 1, t, y), \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times E. \qquad (16)$$

Очевидно, що кожний визначений на $\mathbb{R}$ розв'язок $y = y(t)$ диференціального рівняння (14) задовольняє співвідношення

$$y(t + 1) = x(t + 1, t, y(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

тобто на підставі (16) є розв'язком різницевого рівняння

$$x(t + 1) = U(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (17)$$

що є окремим випадком рівняння (3). Тому рівняння (17) можна використати для дослідження обмежених розв'язків диференціального рівняння (14).

Різницевому рівнянню (17) співставимо відображення $F_2 : \mathbb{R} \times E^2 \to E$, що визначається рівністю

$$F_2(t, x_0, x_1) = x_1 - U(t, x_0),$$

і є аналогічним відображенню F. Очевидно, що різницеве рівняння (17) можна подати у вигляді

$$F_2(t, x(t), x(t + 1)) = 0.$$

Завдяки наведеним міркуванням та теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай:*

1) диференціальне рівняння (14) *має обмежений розв'язок $z \in C^0$ зі значеннями в компактній множині $K \in \mathcal{K}$;*

2) відображення $F_2 : \mathbb{R} \times E \to E$ задовольняє умови 1 і 2 (як і відображення F у різницевому рівнянні (3)*);*

3) для деяких числа $\delta > 0$ і множини $K \in \mathcal{K}$ виконується співвідношення

$$\Delta(z, K, F_2, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Тоді обмежений розв'язок z рівняння (14) *є майже періодичним.*

Зауважимо, що це твердження отримано вперше в [9] з використанням окремого випадку теореми 1.

5.2. Лінійні операторні різницеві рівняння. Нехай $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ - довільні банахові простори і $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів $A : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ з нормою

$$\|A\|_{L(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{E}_1}=1} \|Ax\|_{\mathcal{E}_2}.$$

Будемо вважати, що $\Omega = L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ і $\mathcal{K}$ є множиною всіх непорожніх зв'язних компактних підмножин $K \subset L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Розглянемо неперервне відображення

$$F_3 : \mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m+1} \to \mathcal{X},$$

де $\mathcal{X} = L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, що визначається рівністю

$$F_3(t, X_0, X_1, \ldots, X_m) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} A_k(t) X_k B_k(t) - H(t),$$

де $A_k(t)$, $k = \overline{0, m}$, – неперервні і майже періодичні на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2)$, $B_k(t)$, $k = \overline{0, m}$, – неперервні і майже періодичні на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1)$ і $H(t)$ – неперервна і майже періодична на $\mathbb{R}$ функція зі значеннями в $L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Також розглянемо відповідне лінійне операторне різницеве рівняння

$$\sum_{k=0}^{m} A_k(t) X(t - \Delta_k) B_k(t) = H(t), \qquad (18)$$

де $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ – довільні дійсні числа і $\Delta_0 = 0$.

Очевидно, що рівняння (18) є окремим випадком рівнянь (3) і (13) у випадку $E = L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

У рівнянні (18) оператори $A_k(t)$ і $B_k(t)$, $k = \overline{0, m}$, $t \in \mathbb{R}$, можуть не мати обернених неперервних операторів.

На підставі теорем 1 і 2 справджується наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо різницеве рівняння* (18) *має неперервний і обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок $Z = Z(t)$ зі значеннями в K і для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(Z, K, F_3, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

5.3. Застосування теореми 1 у випадку $m = 0$**.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(t, \frac{dx(t)}{dt} - g(t, x(t))\right) = 0, \qquad (19)$$

де F – відображення, що й у рівнянні (3) (при $m = 0$), а неперервне відображення $g : \mathbb{R} \times \Omega \to E$ є таким, що:

а) векторна функція $g(t, x)$ рівномірно неперервна по x на кожній множині $\mathbb{R} \times K$, де $K \in \mathcal{K}$;

б) векторна функція $g(t, x)$ майже періодична по t рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Викладемо ідею одного методу з'ясування майже періодичності обмежених розв'язків диференціального рівняння (19) з використанням теореми 1.

Якщо $v = v(t)$ є розв'язком цього рівняння і $R(v) \subset K_1$, де $K_1 \in \mathcal{K}$, то на підставі умов а) і б) функція $h = h(t)$, що визначається рівністю

$$h(t) = \frac{dv(t)}{dt} - g(t, v(t)),$$

є обмеженою і $R(h) \subset K_2$ для деякої множини $K_2 \in \mathcal{K}$. Отже, $h = h(t)$ є розв'язком рівняння (4). У цьому випадку до (4) можна застосувати теорему 1 при $m = 0$, $K = K_2$ і

$z = h$. Вважатимемо, що умови цієї теореми виконуються. Тоді функція $h = h(t)$ є майже періодичною і до майже періодичного диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} - g(t, x(t)) = h(t),$$

що має обмежений розв'язок $x = v$, можна застосувати результати досліджень статті [10] (у випадку $f(t, x) = g(t, x) + h(t)$) і показати майже періодичність v (при додаткових вимогах до f).

На завершення, зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків різницевих рівнянь та їх застосування в п. 5.2 і 5.3 є новими, оскільки не використовують $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь.

Також зазначимо, що дослідженням майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо деякі з них. Для лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [4], а для нелінійних диференціальних рівнянь – Амеріо в роботі [5]. Результати Фавара були значно покращені Е. Мухамадієвим [11, 12]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [13–15]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [1], Амеріо [16], В. В. Жикову [17–19], Шубину М. А. [20] та Финку [21].

Функціонал, аналогічний функціоналу Δ, використовувався автором для дослідження майже періодичних лінійних і нелінійних різницевих рівнянь із неперервним аргументом [9], диференціальних рівнянь [10], а також рівняння (4) [3].

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь (вимога існування таких розв'язків у теоремі 1 є суттєвою) можна отримати, використовуючи статті [22–26].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь// Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, № 1–2. – С. 136–138.
4. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31–81.
5. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.
6. *Слюсарчук В. Е.* К теории обратимости почти периодических операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 1. – С. 50–59.
7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
8. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 1. – С. 118–124.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307–312.
11. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269–274.
12. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443–460.
13. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**(158), № 4(12). – С. 483–501.
14. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**(172), № 1(5). – С. 86–104.
15. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262–267.
16. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. – 1960. – **30**. – P. 288–301.
17. *Жиков В. В.* Об одном дополнении к классической теории Фавара // Мат. заметки. – 1970. – **7**, № 2. – С. 239–246.
18. *Жиков В. В.* Существование почти периодических по Левитану решений линейных систем (2-е

дополнение к классической теории Фавара) // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 4. – С. 409–414.

19. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121–126.

20. *Шубин М. А.* Почти периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук. – 1978. – **28**, № 2. – С. 3–47.

21. *Fink A. M.* Semi-separated conditions for almost periodic solutions // J. Diff. Equat. – 1972. – **11**. – P. 245–251.

22. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Науковий вісник Чернівецького університету, Математика. – 2009. – Випуск 454. – С. 88–94.

23. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 368–378.

24. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 536–555.

25. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 122–126.

26. *Слюсарчук В. Ю.* Нелінійні різницеві рівняння у просторах обмежених двосторонніх послідовностей // Нелінійні коливання – 2012. – **15**, № 4. – С. 528–538.