УДК 517.9

©2013 р. С.М. Чуйко, О.В. Чуйко

Слов'янський державний педагогічний університет, Слов'янськ

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ПЕРІОДИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ ІМПУЛЬСНОГО ВПЛИВУ

Знайдено умови регуляризації лінійної періодичної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу. Побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдено вигляд імпульсного збурення регуляризованої лінійної періодичної крайової задачі.

Using an impulse influence, we find conditions for the regularization of a linear periodic boundary value problem for a system of ordinary differential equation. We construct generalized Green's operator and find a form for impulse perturbation of a linear periodic boundary value problem.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про знаходження T-періодичних розв'язків

$$z(t) \in C^1[0,T]$$

системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t), \qquad (1)$$

яка некоректно поставлена [2,3]. Це означає, що

$$\int_0^T H^*(s)f(s)ds \neq 0$$

для довільної неперервної функції $f(t)$; тут $A(t)$ — неперервна на відрізку $[0,T]$ матриця, $H^*(t))$ — фундаментальна матриця системи, спряженої до однорідної частини системи (1).

Нами досліджено умови регуляризації [1, 2, 4] крайової задачі для системи (1) з періодичною граничною умовою

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0 \qquad (2)$$

та імпульсним впливом [1, 3, 5–7]

$$\Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) + \mu, \qquad (3)$$

$$\Delta z(\tau) := z(\tau + 0) - z(\tau - 0).$$

На відміну від того, як це зроблено в монографії [1] та статті [3], поставимо задачу не про умови розв'язності лінійної періодичної крайової задачі для системи (1) з фіксованим імпульсним впливом (3), а дослідимо задачу про знаходження T-періодичних розв'язків

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

а також матриці $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, яка б для фіксованого вектора $\mu := 0$ гарантувала розв'язність цієї задачі для довільної неперервної функції $f(t)$. Поставлена задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу, наведених у монографії [1, с. 248] та статті [3] на випадок $\mu := 0$ та нефіксованої матриці S.

Позначимо через $X_0(t)$ нормальну ($X_0(\tau) = I_n$) фундаментальну матрицю [8, 9] однорідної частини системи (1). Загальний розв'язок

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}, \quad 0 < \tau < T$$

диференціальної системи з імпульсним впливом (1), (3) зобразимо у вигляді

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) :=$$

$$-X_0(t)\int_t^\tau X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [0,\tau[,$$

$$X_0(t)\int_\tau^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [\tau,T]$$

узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(\tau)=0$ для диференціальної системи (1) та $X(t)-$ нормальна $(X(\tau-0)=I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини системи (1) з імпульсним впливом (3)

$$X(t)=\begin{array}{cc} X_0(t), & t\in[0,\tau[,\\ X_0(t)(I_n+S), & t\in[\tau,T]. \end{array}$$

Позначимо матриці $Q:=\ell X_0(\cdot)$, $\mathcal{Q}:=\ell X(\cdot)$ й ортопроектор [1] $P_{\mathcal{Q}^*}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{N}(Q^*)$. Диференціальна система (1) з періодичною крайовою умовою (2) та імпульсним впливом (3) розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$, якщо $P_{\mathcal{Q}^*}=0$. Таким чином, отримуємо рівняння для знаходження матриці $S\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\Big[Q-X(T)S\Big]\cdot\Big[Q-X(T)S\Big]^+=I_n. \qquad (4)$$

Припустимо, що рівняння (4) має дійсний розв'язок $\mathcal{S}$, якому відповідає нормальна фундаментальна матриця однорідної частини системи (1) з імпульсним впливом (3):

$$X(t)=\begin{array}{cc} X_0(t), & t\in[0,\tau[,\\ X_0(t)(I_n+\mathcal{S}), & t\in[\tau,T]. \end{array}$$

Матриці $X(t)$ відповідає не менш ніж один розв'язок задачі (1), (2), (3)

$$z(t,c)=\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)-X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot).$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема. *Якщо задача про знаходження T-періодичних розв'язків $z(t)\in C^1[0,T]$ системи (1) некоректно поставлена і рівняння (4) має дійсний корінь $\mathcal{S}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, то для для довільної неперервної функції $f(t)$ у просторі*

$$z(t)\in C^1\Big\{[0,T]\setminus\{\tau\}_I\Big\}$$

існує не менш ніж один розв'язок

$$z(t)=\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)$$

крайової задачі з періодичною крайовою умовою та імпульсним впливом (1), (2), (3), де $S=\mathcal{S}$, $\mu:=0$,

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t):=$$

$$=\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)-X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію T-періодичних розв'язків системи (1) за допомогою імпульсного впливу (3).

У залежності від матриці $\mathcal{S}$ імпульсний вплив (3) за умови

$$\det\Big(I_n+\mathcal{S}\Big)\neq 0$$

— невироджений [1,5], або ж вироджений [8, 9]:

$$\det\Big(I_n+\mathcal{S}\Big)=0.$$

Приклад *Умови доведеної теореми виконуються у випадку 2π-періодичної задачі для системи (1), яка для довільної неперервної функції $f(t)$ не має розв'язків у класі $z(t)\in C^1[0;2\pi]$; в той же час у класі функцій*

$$z(t)\in C^1\Big\{[0,2\pi]\setminus\{\tau\}_I\Big\},\quad \tau:=\pi$$

крайова задача для системи з періодичною крайовою умовою та імпульсним впливом

$$dz/dt=Az+f(t),\ t\neq\tau,\ \ell z(\cdot)=0,$$

$$\Delta z(\tau)=Sz(\tau-0) \qquad (5)$$

розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$. Тут

$$A(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

Справді, у випадку крайової задачі для диференціальної системи (5) з 2π-

періодичною умовою та імпульсним впливом рівняння (4) має дійсний розв'язок

$$\mathcal{S}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

якому відповідає нормальна ($X(\pi-0)=I_3$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (5) з виродженим ($\det(I_3+\mathcal{S})=0$) імпульсним впливом:

$$X(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}e^{t-\pi}&0&0\\0&-\cos t&-\sin t\\0&\sin t&-\cos t\end{bmatrix}, & t\in[0,\tau[,\\[2ex] \begin{bmatrix}e^{t-\pi}&0&e^{t-\pi}\\-\sin t&-2\cos t&-\sin t\\-\cos t&2\sin t&-\cos t\end{bmatrix}, & t\in[\tau,T].\end{cases}$$

Для довільної неперервної функції $f(t)$ та знайденої матриці $X(t)$ існує єдиний розв'язок крайової задачі для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом. Зокрема, для функції

$$f(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\\sin t\end{bmatrix}$$

2π-періодична задача для диференціальної системи (5) нерозв'язна, в той же час регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та виродженим імпульсним впливом має єдиний розв'язок

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\3\pi\cos t-t\cos t+\sin t\\-3\pi\sin t+t\sin t\end{bmatrix},\quad t\in[0,\tau[,$$

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\5\pi\cos t-t\cos t+\sin t\\-5\pi\sin t+t\sin t\end{bmatrix},\quad t\in[\tau,T].$$

Рівняння (4) має також дійсний розв'язок

$$\mathcal{S}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

, якому відповідає нормальна ($X_1(\pi-0)=I_3$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (5) з невиродженим ($\det(I_3+\mathcal{S}_1)\neq 0$) імпульсним впливом:

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}e^{t-\pi}&0&0\\0&-\cos t&-\sin t\\0&\sin t&-\cos t\end{bmatrix},\quad t\in[0,\pi[;$$

для $t\in[\pi,2\pi]$:

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}e^{t-\pi}&e^{t-\pi}&0\\-\sin t&-\cos t&-\sin t-\cos t\\-\cos t&\sin t&\sin t-\cos t\end{bmatrix}.$$

Для тієї ж функції $f(t)$ регуляризована крайова задача для системи диференціальних рівнянь (5) з 2π-періодичною умовою та виродженим імпульсним впливом має єдиний розв'язок; для $t\in[0,\pi[$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\(2\pi+1)\sin t+(\pi-t)\cos t\\2\pi\cos t-(\pi-t)\sin t\end{bmatrix};$$

для $t\in[\pi,2\pi]$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t)=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\3\pi\cos t-t\cos t+(2\pi+1)\sin t\\2\pi\cos t+(t-3\pi)\sin t\end{bmatrix}.$$

Згідно традиційної класифікації крайових задач [1] регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом є некритичною. Дійсно, для матриці $S=\mathcal{S}$ має місце рівність $P_{\mathcal{Q}^*}=0$, де

$$\mathcal{Q}=\begin{bmatrix}e^{-\pi}-e^{\pi}&0&1\\0&1&0\\-e^{\pi}&0&0\end{bmatrix}.$$

Так само, для матриці $S=\mathcal{S}_1$ має місце рівність $P_{\mathcal{Q}_1^*}=0$, де

$$\mathcal{Q}_1=\begin{bmatrix}e^{-\pi}-e^{\pi}&1&0\\0&0&1\\-e^{\pi}&0&0\end{bmatrix},$$

отже, регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом є некритичною.

На завершення зазначимо, що побудована нами матриця $\mathcal{S}$, а отже і умова регуляризації лінійної періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, не залежать від вибору довільної неперервної функції $f(t)$ на відміну від схеми, запропонованої в монографії [1].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

2. *Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.

3. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Бифуркация решений импульсной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 1. — С. 21 — 31.

4. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.

5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк, 1987. — 287 с.

6. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**. № 8. — С. 1132 — 1135.

7. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**. — № 1, С. 51 — 65.

8. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 5. — С. 588 — 594.

9. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доповіді НАНУ. — 1999. — № 6. — С. 43 — 47.