

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Розглянуто еліптично-параболічні анізотропні рівняння другого порядку в необмежених областях. Встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач для таких рівнянь і оцінки цих розв'язків за відсутності будь-яких обмежень на зростання вихідних даних та поведінку розв'язків на нескінченності.

The present paper is devoted to elliptic-parabolic anisotropic second order equations in unbounded domains. We establish conditions for the existence and uniqueness of generalized solutions of initial-boundary value problems and estimate the solutions without any restrictions on the growth of the data-in and the behavior of the solutions at infinity.

Вступ. Як добре відомо, крайові задачі для лінійних еліптичних і параболічних рівнянь в необмежених областях є коректними, якщо на їхні розв'язки та вихідні дані додатково до крайових умов накладені певні обмеження на зростання на нескінченності. Така ж ситуація з крайовими задачами в необмежених областях і для нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь з певних класів. Проте є рівняння, крайові задачі для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності. У [1] вперше отримано такий результат для найпростіших півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь. Згодом нові класи рівнянь з таким ефектом отримано в багатьох працях, серед яких [2]–[7].

Тут ми вперше вивчаємо проблему існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач для нелінійних анізотропних еліптично-параболічних рівнянь другого порядку в необмежених областях без умов на нескінченності. Відмітимо, що нелінійні еліптично-параболічні рівняння досліджували в багатьох працях, серед яких [8], [9].

Робота складається з трьох частин: в першій частині формулюється задача і основний результат, в другій наведено допоміжні твердження, а в третій – обґрунтування основного результату.

1. Формулювання задачі й основного результату. Нехай Ω – необмежена

область в просторі \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$), елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$ і на якому введена норма $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. Припускаємо, що межа $\partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою поверхнею і $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Через $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ позначимо одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі. Нехай $T > 0$ – яке-небудь фіксоване число. Прийmemo $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$.

Нехай b – функція, яка визначена на Ω , приймає значення в \mathbb{R} і задовольняє умову (\mathcal{B}) : b – невід'ємна, вимірна та обмежена на кожній обмеженій підмножині Ω , причому множина $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$ – область в \mathbb{R}^n .

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) +$$

$$+ a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

крайові умови

$$u|_{\Sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}|_{\Sigma_1} = 0 \quad (2)$$

та початкову умову

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega_0. \quad (3)$$

Тут $a_j(x, t, s, \xi)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$ ($j = \overline{0, n}$), $f(x, t)$, $(x, t) \in Q$, $u_0(x)$, $x \in \Omega$, – задані дійснозначні функції, про які точніше буде сказано пізніше, а $\partial u(y, t)/\partial \nu_a := \sum_{i=1}^n a_i(y, t, u, \nabla u) \nu_i(y)$, $(y, t) \in \Sigma_1$, – похідна по "конормалі". Рівняння (1) називаємо *еліптично-параболічним*, оскільки припускаємо, що рівність $b = 0$ може виконуватися на підмножині Ω ненульової міри, а просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) є еліптичною. Далі сформульовану вище задачу коротко називатимемо задачею (1)–(3).

Введемо ще деякі позначення. Нехай G – довільна необмежена область в \mathbb{R}^m , де $m = n$ або $m = n + 1$, а $Bd(G)$ – множина обмежених підобластей області G . Для будь-якого $r \in [1, \infty]$ через $L_{r, \text{loc}}(\overline{G})$ позначатимемо лінійний локально опуклий простір визначених на G і вимірних функцій, звуження яких на довільну область $G' \in Bd(G)$ належить $L_r(G')$, з топологією, що породжена системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{L_r(G')} \mid G' \in Bd(G)\}$. Зауважимо, що послідовність $\{v_l\}_{l=1}^\infty$ *сильно* (відповідно, *слабо*) збігається до v в $L_{r, \text{loc}}(\overline{G})$, якщо для будь-якої $G' \in Bd(G)$ послідовність $\{v_l|_{G'}\}_{l=1}^\infty$ збігається до $v|_{G'}$ *сильно* (відповідно, *слабо*) в $L_r(G')$.

Нехай $p = (p_0, \dots, p_n)$ – впорядкований набір дійсних чисел, що задовольняють умову

$$(P): \quad p_0 \geq 2, \quad p_i > 1 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Позначимо через $p' = (p'_0, \dots, p'_n)$ впорядкований набір дійсних чисел, для яких правильні рівності $1/p_j + 1/p'_j = 1$ ($j = \overline{0, n}$).

Під $W_{p, \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ розумітимемо лінійний локально опуклий простір функцій $v \in L_{p_0, \text{loc}}(\overline{Q})$ таких, що $v_{x_i} \in L_{p_i, \text{loc}}(\overline{Q})$ ($i = \overline{1, n}$), із системою півнорм: $\{\|v\|_{L_{p_0}(\Omega')} + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega')} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\}$. Позначимо через $W_{p, \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$ замикання простору

$C^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$ в просторі $W_{p, \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$. Нехай $W_{p, c}^1(\Omega, \Gamma_0)$ – підпростір простору $W_{p, \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$, складений з функцій з обмеженими носіями.

Нехай $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0) := \{w : (0, T) \rightarrow W_{p, \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0) \mid w \in L_{p_0, \text{loc}}(\overline{Q}), w_{x_i} \in L_{p_i, \text{loc}}(\overline{Q}) \quad (i = \overline{1, n})\}$ – лінійний локально опуклий простір функцій із системою півнорм: $\{\|w\|_{L_{p_0}(\Omega' \times (0, T))} + \sum_{i=1}^n \|w_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega' \times (0, T))} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Визначимо функцію $\tilde{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, прийнявши $\tilde{b}(x) := b(x)$, якщо $x \in \Omega_0$, і $\tilde{b}(x) := 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Для будь-якої $\Omega' \in Bd(\Omega)$ через $H^b(\Omega')$ позначимо лінійний півнормований простір функцій $w : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ таких, що $w = \tilde{b}^{-1/2}v$, де $v \in L_2(\Omega')$, з півнормою $\|w\|_{H^b(\Omega')} := (\int_{\Omega'} b(x)|w(x)|^2 dx)^{1/2}$, а через $H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega})$ – лінійний локально опуклий простір, складений з вимірних функцій $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, звуження яких на довільну $\Omega' \in Bd(\Omega)$ належить $H^b(\Omega')$, з топологією, заданою системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{H^b(\Omega')} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\}$. Легко переконатися, що простір $H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega})$ є поповненням простору $W_{p, \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$ і, якщо $b(x) \geq b_0 = \text{const} > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$, то $H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega}) = L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $C([0, T]; H^b(\Omega'))$, де $\Omega' \in Bd(\Omega)$, – лінійний півнормований простір, складений з функцій $h : [0, T] \rightarrow H^b(\Omega')$ таких, що $b^{1/2}w \in C([0, T]; L_2(\Omega'))$, з півнормою $\|h\|_{C([0, T]; H^b(\Omega'))} := \max_{t \in [0, T]} \|h(\cdot, t)\|_{H^b(\Omega')} \equiv$

$$\max_{t \in [0, T]} \|b^{1/2}(\cdot)h(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega')}. \quad \text{Через}$$

$C([0, T]; H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega}))$ позначимо лінійний локально опуклий простір функцій $h : [0, T] \rightarrow H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega})$ таких, що для довільної $\Omega' \in Bd(\Omega)$ функція $t \rightarrow h(\cdot, t)|_{\Omega'}$ належить простору $C([0, T]; H^b(\Omega'))$, з топологією, породженою системою півнорм: $\{\|h\|_{C([0, T]; H^b(\Omega'))} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Відмітимо, що якщо $w \in W_{p, \text{loc}}^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0)$, то для майже всіх $t \in [0, T]$ маємо $w(\cdot, t) \in H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega})$. Введемо лінійний локально опуклий простір

$$\mathcal{U}_{p, \text{loc}}^b := W_{p, \text{loc}}^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0) \cap C([0, T]; H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega})).$$

Під \mathbb{A}_p розумітимемо множину впорядкованих наборів функцій (a_0, a_1, \dots, a_n) таких, що для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ функція $a_i(x, t, s, \xi)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, задовольняє умови:

(\mathcal{A}_1): a_i є дійснозначною та каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x, t) \in Q$ функція $a_i(x, t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна і для будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot, \cdot, s, \xi) : Q \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірна; $a_i(x, t, 0, 0) = 0$ для майже всіх $(x, t) \in Q$;

(\mathcal{A}_2): для будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x, t) \in Q$ виконується нерівність

$$|a_i(x, t, s, \xi)| \leq h_{1,i}(x, t)(|s|^{p_0/p_i'} + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j/p_i'}) + h_{2,i}(x, t),$$

де $h_{1,i} \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{Q})$, $h_{2,i} \in L_{p_i', \text{loc}}(\overline{Q})$, $1/p_i + 1/p_i' = 1$.

Означення 1. Нехай b і p задовольняють умови, відповідно, (\mathcal{B}) та (\mathcal{P}), $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_p$, $u_0 \in H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega})$ і $f \in L_{p_0', \text{loc}}(\overline{Q})$. Скажемо, що функція $u \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо вона задовольняє умову (3) та інтегральну рівність

$$\iint_Q \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \nabla u) \psi_{x_i} \varphi + a_0(x, t, u, \nabla u) \psi \varphi - b(x) u \psi \varphi' \right\} dx dt = \iint_Q f \psi \varphi dx dt \quad (4)$$

для будь-яких $\psi \in W_{p, c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\varphi \in C_0^1(0, T)$.

Відмітимо, що тут і далі під $C_0^1(0, T)$ розуміємо простір неперервно диференційовних на $(0, T)$ функцій, які мають компактний в $(0, T)$ носій. Також зауважимо, що якщо u – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), то умова (3) є рівносильна умові: $\|u(\cdot, 0) - u_0(\cdot)\|_{H^b(\Omega')} = 0$ для кожної $\Omega' \in Bd(\Omega)$.

Наклавши додаткові умови на вихідні дані, доведемо однозначну розв'язність задачі (1)–(3).

Нехай $k \in \{1, \dots, n\}$ – число таке, що множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_k^2 < R^2\}$ обмежена для будь-якого $R > 0$. Зокрема, коли $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в \mathbb{R}^k , Ω_2 – обмежена область в \mathbb{R}^{n-k} , то k – саме те, про яке тільки що говорилося. Вважатимемо, що $0 \in \Omega$ і позначимо для будь-якого $R > 0$ через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_k^2 < R^2\}$, що містить 0, і приймемо $Q_R := \Omega_R \times (0, T)$.

Нехай $\alpha > 0$ – найменше з чисел, для якого правильна нерівність

$$\text{mes}_n \{\Omega_R\} \leq c_1 R^\alpha \quad \text{для кожного } R > 0, \quad (5)$$

де $\text{mes}_n \{G\}$ – міра Лебега множини G в \mathbb{R}^n , $c_1 > 0$ – деяка стала.

Далі всюди припускатимемо, що $p = (p_0, \dots, p_n)$ задовольняє сильнішу ніж (\mathcal{P}) умову

(\mathcal{P}^*): $p_0 \geq 2$ та для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$ виконуються нерівності $1 < p_i \leq 2$ і $p_i < p_0$, а для кожного $i \in \{k+1, \dots, n\}$ правильна нерівність $p_i > 1$.

Під \mathbb{A}_p^* розумітимемо підмножину \mathbb{A}_p , елементи якої задовольняють умови

(\mathcal{A}_3): для довільних $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ та майже всіх $(x, t) \in Q$ правильна нерівність

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + (a_0(x, t, s_1, \xi^1) - a_0(x, t, s_2, \xi^2))(s_1 - s_2) \geq K_1 |s_1 - s_2|^q,$$

де $K_1 = \text{const} > 0$, $2 \leq q \leq p_0$, $q > p_i$ та $r_i := qp_i/(q - p_i) > \alpha$ для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$ (α – стала з умови (5));

(\mathcal{A}_4): для майже всіх $(x, t) \in Q$ і будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, t, s, \xi) \xi_i + a_0(x, t, s, \xi) s \geq K_2 \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i} + |s|^{p_0} \right) - h_3(x, t),$$

де $K_2 = \text{const} > 0$, $h_3 \in L_{1, \text{loc}}(\overline{Q})$, $h_3 \geq 0$;

(\mathcal{A}_5): для будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x, t) \in Q$ правильна нерівність

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2)|^{p'_i} \leq \\ \leq K_3 \left[\sum_{i=1}^n (a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + \right. \\ \left. + (a_0(x, t, s_1, \xi^1) - a_0(x, t, s_2, \xi^2))(s_1 - s_2) \right], \end{aligned}$$

де $K_3 = \text{const} > 0$.

Зауваження 1. Незавжно переконалися (див. [5]), що підмножиною множини \mathbb{A}_p^* є множина \mathbb{A}_p' тих елементів (a_0, \dots, a_n) з \mathbb{A}_p , які задовольняють умови

(\mathcal{A}_3'): для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, t, s, \xi) \equiv a_i(x, t, \xi_i)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x, t) \in Q$ існує похідна $\partial a_i(x, t, \xi_i)/\partial \xi_i$, $\xi_i \neq 0$, та виконуються нерівності

$A_i |\xi_i|^{p_i-2} \leq \partial a_i(x, t, \xi_i)/\partial \xi_i \leq \tilde{A}_i |\xi_i|^{p_i-2}$, $\xi_i \neq 0$, якщо $i \in \{1, \dots, k\}$, а якщо $i \in \{k+1, \dots, n\}$, то

$$\partial a_i(x, \xi_i)/\partial \xi_i \geq A_i |\xi_i|^{p_i-2}, \quad \xi_i \neq 0,$$

$$|a_i(x, \xi_i)| \leq \tilde{A}_i |\xi_i|^{p_i-1} + h_i(x, t), \quad \xi_i \in \mathbb{R},$$

де $A_i > 0$, $\tilde{A}_i > 0$ – сталі, $h_i \in L_{p_i', \text{loc}}(\overline{Q})$;

(\mathcal{A}_4'): $a_0(x, t, s, \xi) \equiv a_0(x, t, s)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x, t) \in Q$ існує похідна $\partial a_0(x, s)/\partial s$, $s \neq 0$, та виконуються нерівності

$$\partial a_0(x, t, s)/\partial s \geq A_0 |s|^{p_0-2} + A'_0, \quad s \neq 0,$$

$$|a_0(x, t, s)| \leq \tilde{A}_0 |s|^{p_0-1} + h_0(x, t), \quad s \in \mathbb{R},$$

де h_0 – функція з $L_{p_0', \text{loc}}(\overline{\Omega})$, а A_0, \tilde{A}_0 – додатні сталі, A'_0 – невід'ємна стала, причому $A'_0 = 0$ тільки в тому випадку, коли $p_0 p_i / (p_0 - p_i) > \alpha$ (α – стала з умови (5)).

Прикладом елемента з \mathbb{A}_p' є набір функцій $(\tilde{a}_0(x, t) |s|^{p_0-2} s, \tilde{a}_1(x, t) |\xi_1|^{p_1-2} \xi_1, \dots, \tilde{a}_n(x, t) |\xi_n|^{p_n-2} \xi_n)$, де $\tilde{a}_i \in L_\infty(Q)$ – додатні і

відділені від нуля функції. Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$(b(x)u)_t - \sum_{i=1}^n (\tilde{a}_i(x, t) |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} +$$

$$+ \tilde{a}_0(x, t) |u|^{p_0-2} u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q. \quad (6)$$

□

Зауваження 2. Іншою підмножиною множини \mathbb{A}_p^* є множина \mathbb{A}_p'' (див. [5]) тих елементів (a_0, \dots, a_n) з \mathbb{A}_p при $p_1 = \dots = p_k = 2$, які задовольняють умову (\mathcal{A}_4) та умови

(\mathcal{A}_3''): для будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ та м.в. $(x, t) \in Q$ і виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^k |a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2)| \leq$$

$$\leq D_1 \sum_{i=1}^k |\xi_i^1 - \xi_i^2| + D_2 |s_1 - s_2|,$$

де D_1, D_2 – невід'ємні сталі;

(\mathcal{A}_4''): для будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ та м.в. $(x, t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^n (a_j(x, t, s_1, \xi^1) - a_j(x, t, s_2, \xi^2))(\xi_j^1 - \xi_j^2) +$$

$$+ (a_0(x, t, s_1, \xi^1) - a_0(x, t, s_2, \xi^2))(s_1 - s_2) \geq$$

$$\geq K_4 \sum_{i=1}^k |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + K_5 |s_1 - s_2|^2 + K_6 |s_1 - s_2|^{p_0},$$

де $K_4 > 0$, $K_5 \geq 0$, $K_6 > 0$ – сталі, причому $K_5 = 0$ тільки в тому випадку, коли $D_2 = 0$ та $p_0 p_i / (p_0 - p_i) > \alpha$ (α – стала з умови (5)).

Прикладом рівнянь вигляду (1), для якого коефіцієнти (a_0, \dots, a_n) належать класу \mathbb{A}_p'' , є рівняння

$$(b(x)u)_t - \sum_{i,j=1}^k (\hat{a}_{ij}(x, t) u_{x_j})_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^n (\hat{a}_i(x, t) |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} +$$

$+ \widehat{a}_*(x, t)u + \widehat{a}_0(x, t)|u|^{p_0-2}u = f(x, t), \quad (7)$
 $(x, t) \in Q$, де $\widehat{a}_{ij}(i, j = \overline{1, k})$ – обмежені функції, які задовольняють умову: існує число $\lambda > 0$ таке, що $\sum_{i,j=1}^k \widehat{a}_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^k \xi_i^2$ будь-яких $\xi_i \in \mathbb{R} (i = \overline{1, k})$ та м.в. $(x, t) \in Q$. \square

Теорема. Нехай b і p задовольняють умови, відповідно, (\mathcal{B}) та (\mathcal{P}^*) , $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_p^*$, $u_0 \in H_{loc}^b(\overline{\Omega})$ і $f \in L_{p_0', loc}(\overline{Q})$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), причому для будь-яких R, R_0 таких, що $R > R_0 > 0, R \geq 1$, виконується оцінка

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_{R_0}} b(x)|u(x, t)|^2 dx + \\ & + \iint_{Q_{R_0}} \left[\sum_{i=1}^n |u_{x_i}(x, t)|^{p_i} + |u(x, t)|^{p_0} \right] dx dt \leq \\ & \leq C_1 \left(R/(R - R_0) \right)^s \left\{ R^{\alpha-\theta} + \right. \\ & + \int_{\Omega_R} b(x)|u_0(x)|^2 dx + \iint_{Q_R} |f(x, t)|^{p_0'} dx dt + \\ & \left. + \iint_{Q_R} h_3(x, t) dx dt \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

де $s := \max_{1 \leq i \leq k} r_i$, $\theta := \min_{1 \leq i \leq k} r_i$, C_1 – стала, яка залежить тільки від $K_1, K_2, K_3, c_1, r_i (i = \overline{1, k})$, q (числа $r_i (i = \overline{1, k})$ – визначені в умові (\mathcal{A}_3)).

2. Допоміжні твердження.

Тут наведемо потрібні нам для обґрунтування основного результату допоміжні твердження.

Лема 1. Нехай b задовольняє умову (\mathcal{B}) , а $R > 0$ – довільне фіксоване число. Припустимо, що функція $v \in W_{p, loc}^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0)$ така, що для деяких функцій $g_j \in L_{p_j'(\cdot), loc}(\overline{Q}) (j = \overline{0, n})$ виконується рівність

$$\int_0^T \iint_{\Omega_R} \left\{ \sum_{i=1}^n g_i \psi_{x_i} \varphi + g_0 \psi \varphi - b v \psi \varphi' \right\} dx dt = 0 \quad (9)$$

для всіх $\varphi \in C_0^1(0, T)$, $\psi \in W_{p, loc}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega}_R$.

Тоді $b^{1/2}v \in C([0, T]; L_2(\Omega_{R'}))$ для кожного $R' \in (0, R)$. Крім того, для довільних функцій $\chi \in C^1([0, T])$, $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $\text{supp } w \subset \overline{\Omega}_R$, $w \geq 0$ і будь-яких чисел t_1, t_2 таких, що $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, виконується рівність

$$\begin{aligned} & \chi(t) \int_{\Omega_R} b(x)|v(x, t)|^2 w(x) dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_R} b(x)|v(x, t)|^2 w(x) \chi'(t) dx dt + \\ & + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_R} \left\{ \sum_{i=1}^n g_i (v w)_{x_i} + g_0 v w \right\} \chi dx dt = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Це твердження доводиться аналогічно, як лема 1 праці [4].

Лема 2. Нехай $a \in \mathbb{A}_p^*$ і для кожного $l \in \{1, 2\}$ функції $u_l \in \mathbb{U}_{p, loc}^b$, $f_l \in L_{p_0', loc}(\overline{Q})$ такі, що для деякого числа $R > 1$ виконується рівність (4) з $u = u_l$ і $f = f_l$ для будь-яких $\psi \in W_{p, c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega}_R$, $\varphi \in C_0^1(0, T)$.

Тоді для будь-якого числа $R_0 \in (0, R)$ правильна нерівність

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_{R_0}} b(x)|u_1(x, t) - u_2(x, t)|^2 dx + \\ & + \iint_{Q_{R_0}} \left[\sum_{i=1}^n (a_i(x, t, u_1, \nabla u_1) - \right. \\ & \left. - a_i(x, t, u_2, \nabla u_2)) (u_{1, x_i} - u_{2, x_i}) + \right. \\ & + (a_0(x, t, u_1, \nabla u_1) - a_0(x, t, u_2, \nabla u_2)) (u_1 - u_2) + \\ & \left. + |u_1(x) - u_2(x)|^q \right] dx dt \leq \\ & \leq C_2 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s \left\{ R^{\alpha-\theta} + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_R} b(x)|u_1(x, 0) - u_2(x, 0)|^2 dx + \right. \end{aligned}$$

$$+ \iint_{Q_R} |f_1(x, t) - f_2(x, t)|^{q'} dx dt \Big\}, \quad (11)$$

де s, θ – такі ж як в теоремі 1, а C_2 – додатна стала, яка залежить тільки від K_1, K_3, c_1, r_i ($i = \overline{1, k}$), q .

Тут і далі використовуємо позначення $a_j(u_l)(x, t) := a_j(x, t, u_l(x, t), \nabla u_l(x, t))$, $(x, t) \in Q$, $j = \overline{0, n}$, $l = 1, 2$.

Доведення лему 2. Введемо в розгляд "зрізаючу" функцію

$$\zeta(x') = \begin{cases} (R^2 - |x'|^2)/R, & |x'| < R, \\ 0, & |x'| \geq R, \end{cases}$$

де $x' = (x_1, \dots, x_k)$, $|x'| = (x_1^2 + \dots + x_k^2)^{1/2}$.

Для заданих $\psi \in W_{p,c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega_R}$, $\varphi \in C_0^1(0, T)$ розглянемо рівність (4) при $u = u_1$, $f = f_1$ та цю ж рівність при $u = u_2$, $f = f_2$ і відніmemo ці рівності. У підсумку, прийнявши $u_{12}(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t)$, $f_{12}(x, t) := f_1(x, t) - f_2(x, t)$, $a_{j,12}(x, t) := a_j(u_1)(x, t) - a_j(u_2)(x, t)$, $(x, t) \in Q$, $j = \overline{0, n}$, отримаємо рівність, до якої застосуємо лему 1 з $v = u_{12}$, $g_0 := a_{0,12} - f_{12}$, $g_i = a_{i,12}$ ($i = \overline{1, n}$), $w = \zeta^s$, $s := \max_{1 \leq i \leq k} r_i$, $\chi = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0, T]$ – довільне число. Внаслідок простих перетворень отримаємо рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} b(x) |u_{12}(x, \tau)|^2 \zeta^s(x) dx + \\ & + 2 \iint_{Q_R^\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i} + a_{0,12} u_{12} \right\} \zeta^s dx dt = \\ & = \int_{\Omega_R} b(x) |u_{12}(x, 0)|^2 \zeta^s(x) dx - \\ & - 2s \iint_{Q_R^\tau} \left(\sum_{i=1}^k a_{i,12} \zeta_{x_i} \right) u_{12} \zeta^{s-1} dx dt + \\ & + 2 \iint_{Q_R^\tau} f_{12} u_{12} \zeta^s dx dt, \end{aligned} \quad (12)$$

де $Q_R^\tau := \Omega_R \times (0, \tau)$.

Зробимо відповідні оцінки інтегралів рівності (12). За умовою (\mathcal{A}_3) маємо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_R^\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i} + a_{0,12} u_{12} \right\} \zeta^s dx dt \geq \\ & \geq K_1 \iint_{Q_R^\tau} |u_{12}|^q \zeta^s dx dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Далі нам будуть потрібні такі дві нерівності:

$$ac \leq \varepsilon |a|^\nu + \varepsilon^{1-\nu'} |c|^{\nu'},$$

$$a, c \in \mathbb{R}, \quad \nu > 1, \quad 1/\nu + 1/\nu' = 1, \quad \varepsilon > 0, \quad (14)$$

(ця нерівність є наслідком стандартної нерівності Юнга: $ac \leq |a|^\nu/\nu + |c|^{\nu'}/\nu'$) та

$$acd \leq \varepsilon |a|^{\nu_1} + \varepsilon |c|^{\nu_2} + \varepsilon^{1-\nu_3} |d|^{\nu_3},$$

$$a, c, d \in \mathbb{R}, \quad \nu_1 > 1, \quad \nu_2 > 1, \quad \nu_3 > 1,$$

$$1/\nu_1 + 1/\nu_2 + 1/\nu_3 = 1, \quad \varepsilon > 0, \quad (15)$$

(ця нерівність є наслідком стандартної нерівності Юнга: $acd \leq |a|^{\nu_1}/\nu_1 + |c|^{\nu_2}/\nu_2 + |d|^{\nu_3}/\nu_3$).

На підставі нерівності (15), врахувавши оцінку $|\zeta_{x_i}(x')| \leq 2$ ($x' \in \mathbb{R}^k, i = \overline{1, k}$), та взявши $a = -a_{i,12} \zeta^{s/p_i'}$, $c = u_{12} \zeta^{s/q}$, $d = \zeta^{s/r_i-1} \zeta_{x_i}$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, отримаємо

$$\begin{aligned} & -2s \iint_{Q_R^\tau} \left(\sum_{i=1}^k a_{i,12} \zeta_{x_i} \right) u_{12} \zeta^{s-1} dx dt \leq \\ & \leq 2s\varepsilon_1 \iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k |a_{i,12}|^{p_i'} \zeta^s dx dt + \\ & + 2sk\varepsilon_1 \iint_{Q_R^\tau} |u_{12}|^q \zeta^s dx dt + \\ & + 2^{r_i+1} s \varepsilon_1^{1-r_i} \iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k \zeta^{s-r_i} dx dt, \end{aligned} \quad (16)$$

де $\varepsilon_1 > 0$ – довільне число.

Згідно з умовою (\mathcal{A}_5) маємо

$$\iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k |a_{i,12}|^{p_i'} \zeta^s dx dt \leq$$

$$\leq K_3 \iint_{Q_R^\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12} (u_{12})_{x_i} + a_{0,12} u_{12} \right\} \zeta^s dx dt. \quad (17)$$

На підставі нерівності (14), вибравши $a = u_{12} \zeta^{s/\nu}$, $c = f_{12} \zeta^{s/\nu'}$, $\nu = q$ ($\nu' = q' := q/(q-1)$), $\varepsilon = \varepsilon_2 > 0$, одержуємо

$$\left| \iint_{Q_R^\tau} f_{12} u_{12} \zeta^s dx dt \right| \leq \varepsilon_2 \iint_{Q_R^\tau} |u_{12}|^q \zeta^s dx dt + \varepsilon_2^{-1/(q-1)} \iint_{Q_R^\tau} |f_{12}|^{q'} \zeta^s dx dt, \quad (18)$$

де $\varepsilon_2 > 0$ – довільне число.

З (12) на підставі (20), (16)-(18) за достатньо малих значень ε_1 і ε_2 отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} b(x) |u_{12}(x, \tau)|^2 \zeta^s(x) dx + \\ & + \iint_{Q_R^\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12} (u_{12})_{x_i} + \right. \\ & \left. + a_{0,12} u_{12} + |u_{12}|^q \right\} \zeta^s dx dt \leq \\ & \leq C_3 \left[\iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k \zeta^{s-r_i} dx dt + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_R} b(x) |u_{12}(x, 0)|^2 \zeta^s(x) dx + \right. \\ & \left. + \iint_{Q_R^\tau} |f_{12}|^{q'} \zeta^s dx dt \right], \quad (19) \end{aligned}$$

де C_3 – додатна стала, яка залежить тільки від K_1, K_3, r_i ($i = \overline{1, k}$), q , а $\tau \in [0, T]$ – довільне число.

Зауважимо, що $0 \leq \zeta(x') \leq R$, коли $x' \in \mathbb{R}^k$, $\zeta(x') \geq R - R_0$ при $|x'| \leq R_0$, де $R_0 \in (0, R)$ – яке-небудь число. Враховуючи це, а також умову (5) та те, що $R \geq 1$, з (19) легко отримаємо потрібне твердження. \square

Наслідок 1. Нехай $a \in \mathbb{A}_p^*$ і функції $\tilde{u} \in \mathbb{U}_{p,loc}^b$, $f \in L_{p_0',loc}(\bar{\Omega})$, $u_0 \in H_{loc}^b(\bar{\Omega})$ такі, що для деякого числа $R > 1$ виконується рівність (4) з $u = \tilde{u}$ для будь-яких $\psi \in W_{p,c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \bar{\Omega}_R$, $\varphi \in C_0^1(0, T)$. Тоді для будь-якого числа $R_0 \in (0, R)$ правильна нерівність (8) з $u = \tilde{u}$.

Доведення наслідку 1. Доведення цього твердження повторює доведення леми 2, якщо прийняти $u_1 := \tilde{u}$, $u_2 := 0$, але тут треба замінити нерівність (20) на відповідну нерівність, що випливає з умови (\mathcal{A}_4) , а також нерівність (18) на нерівність

$$\begin{aligned} \left| \iint_{Q_R^\tau} f \tilde{u} \zeta^s dx dt \right| & \leq \varepsilon_3 \iint_{Q_R^\tau} |\tilde{u}|^{p_0} \zeta^s dx dt + \\ & + \varepsilon_3^{-1/(p_0-1)} \iint_{Q_R^\tau} |f|^{p_0'} \zeta^s dx dt, \end{aligned}$$

де $\varepsilon_3 > 0$ – довільне число. \square

3. Доведення основного результату.

Перший етап (єдиність розв'язку). Покажемо, що задача (1)-(3) має не більше одного узагальненого розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. З леми 2 отримуємо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_{R_0}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)|^q dx dt \leq \\ & \leq C_2 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s R^{\alpha-\theta}, \quad (20) \end{aligned}$$

де R_0, R – довільні числа такі, що $0 < R_0 < R$, $R \geq 1$.

Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (20) до границі при $R \rightarrow +\infty$, врахувавши нерівність $\alpha - \theta < 0$. У підсумку отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже скрізь на Q_{R_0} . Оскільки R_0 – довільне додатне число, то звідси одержуємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q .

Другий етап (побудова наближень розв'язку). Нехай $\Gamma_{0,R} := \bar{\partial\Omega}_R \setminus \Gamma_1$, $\Gamma_{1,R} := \partial\Omega_R \setminus \Gamma_{0,R}$ для довільного $R > 0$. Введемо банахів простір $W_p^1(\Omega_R) := \{v \in L_{p_0}(\Omega_R) \mid v_{x_i} \in L_{p_i}(\Omega_R) (i = \overline{1, n})\}$ з нормою $\|v\|_{W_p^1(\Omega_R)} := \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega_R)} + \|v\|_{L_{p_0}(\Omega_R)}$. Під $W_p^1(\Omega_R, \Gamma_{0,R})$ розумітимемо замикання $C^1(\bar{\Omega}_R, \Gamma_{0,R}) := \{v \in C^1(\bar{\Omega}_R) \mid v|_{\Gamma_{0,R}} = 0\}$ в $W_p^1(\Omega_R)$. Введемо в розгляд також простір $\mathbb{U}_R := \{w : (0, T) \rightarrow W_p^1(\Omega_R, \Gamma_{0,R}) \mid w \in L_{p_0}(Q_R), w_{x_i} \in L_{p_i}(Q_R) (i = \overline{1, n})\} \cap C([0, T]; H^b(\Omega_R))$ з нормою

$$\|w\|_{\mathbb{U}_R} := \sum_{i=1}^n \|w_{x_i}\|_{L_{p_i}(Q_R)} + \|w\|_{L_{p_0}(Q_R)} + \max_{t \in [0, T]} \|b^{1/2}(\cdot)w(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega_R)}.$$

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу: знайти функцію $u_l \in \mathbb{U}_l$, яка задовольняє початкову умову

$$u_l(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega_{0,l} := \Omega_0 \cap \Omega_l, \quad (21)$$

та інтегральну рівність

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_l} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u_l, \nabla u_l) \psi_{x_i} \varphi + \right. \\ & \left. + a_0(x, t, u_l, \nabla u_l) \psi \varphi - b(x) u_l \psi \varphi' \right\} dx dt = \\ & = \iint_{Q_l} f \psi \varphi dx dt \end{aligned} \quad (22)$$

для будь-яких $\psi \in W_p^1(\Omega_l, \Gamma_{0,l})$, $\varphi \in C_0^1(0, T)$.

Доведення існування розв'язку $u_l \in \mathbb{U}_l$ цієї задачі проводимо методом Гальоркіна з використанням методу параболічної регуляризації. Єдиність функції u_l впливає з умови (\mathcal{A}_3) . Продовжимо функцію u_l нулем на Q , залишивши за цим продовженням позначення u_l . Очевидно, що $u_l \in \mathbb{U}_{p,\text{loc}}^b$ ($l \in \mathbb{N}$). Покажемо, що послідовність $\{u_l\}_{l=1}^\infty$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Третій етап (збіжність послідовності наближень розв'язку). Нехай l і m – довільні натуральні числа, причому $1 < l < m$, R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leq l - 1$, $R \geq 1$. Тоді з леми 2 отримуємо

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_{R_0}} b(x) |u_l(x, t) - u_m(x, t)|^2 dx + \\ & + \iint_{Q_{R_0}} |u_l(x, t) - u_m(x, t)|^q dx dt \leq \\ & \leq C_2 \left(R / (R - R_0) \right)^s R^{\alpha - \theta}. \end{aligned} \quad (23)$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – яке-небудь число. Зафіксуємо довільно вибране значення $R_0 > 0$

і виберемо $R > \max\{1; R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (23) була меншою за ε . Це можна зробити, оскільки $\alpha - \theta < 0$. Тоді для будь-яких $l \geq R + 1$ і $m > l$ ліва частина нерівності (23) менша за ε . Це означає, що послідовності $\{u_l|_{Q_{R_0}}\}_{l=1}^\infty$, $\{b^{1/2}u_l|_{Q_{R_0}}\}_{l=1}^\infty$ є фундаментальними відповідно в $L_q(Q_{R_0})$ і $C([0, T]; L_2(\Omega_{R_0}))$. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in L_{q,\text{loc}}(\overline{Q})$ такої, що $b^{1/2}u \in C([0, T]; L_{2,\text{loc}}(\overline{\Omega}))$ і

$$u_l \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} u \quad \text{сильно в } L_{q,\text{loc}}(\overline{Q}), \quad (24)$$

$$b^{1/2}u_l \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} b^{1/2}u \quad \text{в } C([0, T]; L_{2,\text{loc}}(\overline{\Omega})). \quad (25)$$

З (21) і (25) випливає, що $u \in C([0, T]; H_{\text{loc}}^b(\overline{\Omega}))$ і виконується умова (3). Далі покажемо, що $u \in W_{p,\text{loc}}^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0)$ і для u правильна тотожність (4). Для цього спочатку встановимо обмеженість послідовностей $\{u_l\}_{l=1}^\infty$, $\{u_{l,x_i}\}_{l=1}^\infty$ ($i = \overline{1, n}$), $\{a_j(u_l)\}_{l=1}^\infty$ ($j = \overline{0, n}$), відповідно, в $L_{p_0,\text{loc}}(\overline{Q})$, $L_{p_i,\text{loc}}(\overline{Q})$ ($i = \overline{1, n}$), $L_{p_j',\text{loc}}(\overline{Q})$ ($j = \overline{0, n}$). Справді, нехай R_0 – будь-яке дійсне число, а $R := R_0 + 1$. На підставі наслідку з леми 2 для довільного натурального числа $l > R + 1$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_{R_0}} \left[\sum_{i=1}^n |u_{l,x_i}(x, t)|^{p_i} + |u_l(x, t)|^{p_0} \right] dx dt \leq \\ & \leq C_4(R_0), \end{aligned} \quad (26)$$

де $C_4(R_0) > 0$ – стала, яка від l не залежить.

Згідно з умовою (\mathcal{A}_2) та оцінкою (26) для кожного $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ маємо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_{R_0}} |a_j(u_l)|^{p_j'} dx dt \leq \\ & \leq C_5 \iint_{Q_{R_0}} \left[\sum_{i=1}^n |u_{l,x_i}(x, t)|^{p_i} + |u_l(x, t)|^{p_0} \right] dx dt + \\ & + C_6 \iint_{Q_{R_0}} |h_{2,j}(x, t)|^{p_j'} dx dt < C_7(R_0), \end{aligned} \quad (27)$$

де C_5, C_6, C_7 – додатні сталі, які від l не залежать.

З (24), (26), (27), використовуючи рефлексивність просторів $L_{p_j'}(Q_{R_0})$ ($j = \overline{0, n}$) для довільного $R_0 > 0$, отримаємо існування під-послідовності послідовності $\{u_l\}_{l=1}^\infty$ (за якою залишимо те саме позначення) та функцій $\chi_j \in L_{p_j', \text{loc}}(\overline{Q})$ ($j = \overline{0, n}$) таких, що

$$u_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} u \quad \text{слабко в} \quad L_{p_0, \text{loc}}(\overline{Q}),$$

$$u_{l, x_i} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} u_{x_i} \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i, \text{loc}}(\overline{Q}) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (28)$$

$$a_j(u_l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \chi_j \quad \text{слабко в} \quad L_{p_j', \text{loc}}(\overline{Q}) \quad (j = \overline{0, n}). \quad (29)$$

На підставі (29) можемо зробити висновок про те, що $u \in W_{p, \text{loc}}^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0)$.

За означенням функції u_l ($l \in \mathbb{N}$) для довільних $\psi \in W_{p(\cdot), c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega}_l$, $\varphi \in C_0^1(0, T)$ маємо

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n a_i(u_l) \psi_{x_i} \varphi + (a_0(u_l) - f) \psi \varphi - bu_l \psi \varphi' \right] dx dt = 0. \quad (30)$$

З (39) на підставі (25), (29) отримаємо

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \chi_i \psi_{x_i} \varphi + (\chi_0 - f) \psi \varphi - bu \psi \varphi' \right] dx dt = 0 \quad (31)$$

для довільних $\psi \in W_{p(\cdot), c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\varphi \in C_0^1(0, T)$.

Залишилося довести, що

$$\chi_i = a_i(u) \quad (j = \overline{0, n}). \quad (32)$$

Справді, якщо співвідношення (32) є правильними, то з (31) безпосередньо випливає правильність тотожності (4). Враховуючи це і те, що u належить $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$ (як встановлено вище), приходимо до висновку, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Четвертий етап (правильність рівностей (32)). Використаємо метод монотонності [10]. Нехай $v \in L_{p_0, \text{loc}}(\overline{Q})$ – довільна функція така, що $v_{x_i} \in L_{p_i, \text{loc}}(\overline{Q})$ ($i = \overline{1, n}$), а $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $w \geq 0$, $\text{supp } w$ – компакт, і $\chi \in C_0^1(0, T)$, $\chi \geq 0$.

На підставі умови \mathcal{A}_3 для всіх $l \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l) - a_i(v))(u_{l, x_i} - v_{x_i}) + (a_0(u_l) - a_0(v))(u_l - v) \right] w \chi dx dt \geq 0. \quad (33)$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_{l, x_i} + a_0(u_l) u_l \right] w \chi dx dt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l) v_{x_i} + a_i(v)(u_{l, x_i} - v_{x_i})) + \right. \\ & \left. + a_0(u_l) v + a_0(v)(u_l - v) \right] w \chi dx dt \geq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

для всіх $l \in \mathbb{N}$.

Нехай m таке, що $\text{supp } w \subset \Omega_m$. На підставі леми 1 з тотожності (39) при $l > m$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_{l, x_i} + a_0(u_l) u_l \right] w \chi dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \iint_Q b |u_l|^2 w \chi' dx dt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_l w_{x_i} - f u_l w \right] \chi dx dt. \end{aligned} \quad (35)$$

З (38) та (44) одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_Q b |u_l|^2 w \chi' dx dt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_l w_{x_i} - f u_l w \right] \chi dx dt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l) v_{x_i} + a_i(v)(u_{l, x_i} - v_{x_i})) + \right. \\ & \left. + a_0(u_l) v + a_0(v)(u_l - v) \right] w \chi dx dt \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Перейдемо в (40) до границі при $l \rightarrow \infty$. На підставі (24), (25), (28), (29) і того, що $L_q(\Omega') \subset L_2(\Omega') \subset L_{p_i}(\Omega')$ для будь-яких $i \in \{1, \dots, k\}$ та довільної $\Omega' \in Bd(\Omega)$, отримаємо

$$\frac{1}{2} \iint_Q b |u|^2 w \chi' dx dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \chi_i u w_{x_i} - f u w \right] \chi dx dt - \\
& - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \left(\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i}) \right) + \right. \\
& \left. + \chi_0 v + a_0(v)(u - v) \right] w \chi dx dt \geq 0. \quad (37)
\end{aligned}$$

З (31) на підставі леми 1 одержуємо

$$\begin{aligned}
& \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i} + \chi_0 u \right] w \chi dx dt = \\
& = \frac{1}{2} \iint_Q b|u|^2 w \chi' dx dt - \\
& - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \chi_i u w_{x_i} - f u w \right] \chi dx dt. \quad (38)
\end{aligned}$$

З (41) та (42) отримаємо

$$\begin{aligned}
& \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i} + \chi_0 u \right] w \chi dx dt - \\
& - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \left(\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i}) \right) + \right. \\
& \left. + \chi_0 v + a_0(v)(u - v) \right] w \chi dx dt \geq 0,
\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned}
& \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(v))(u_{x_i} - v_{x_i}) + \right. \\
& \left. + (\chi_0 - a_0(v))(u - v) \right] w \chi dx dt \geq 0. \quad (39)
\end{aligned}$$

Візьмемо в (39) $v = u - \lambda g$, де $\lambda > 0$ – довільне число, $g \in L_{p_0, \text{loc}}(\overline{Q})$ – будь-яка функція така, що $g_{x_i} \in L_{p_i, \text{loc}}(\overline{Q})$ ($i = \overline{1, n}$). У підсумку після ділення на λ і врахування довільності функції g одержуємо

$$\begin{aligned}
& \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(u - \lambda g)) g_{x_i} + \right. \\
& \left. + (\chi_0 - a_0(u - \lambda g)) g \right] w \chi dx dt = 0. \quad (40)
\end{aligned}$$

В цій рівності спрямуємо λ до 0

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (a_i(u) - \chi_i) g_{x_i} + \right.$$

$$\left. + (a_0(u) - \chi_0) g \right] w \chi dx dt = 0. \quad (41)$$

Тепер приймемо в (41) спочатку $g(x, t) = 1$, $(x, t) \in Q$, а потім $g(x, t) = x_i$, $(x, t) \in Q$, для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$. Внаслідок отримаємо

$$\begin{aligned}
& \iint_Q (a_0(u) - \chi_0) w \chi dx dt = 0, \\
& \iint_Q (a_i(u) - \chi_i) w \chi dx dt = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (42)
\end{aligned}$$

Оскільки рівності (42) виконуються для довільних неперервно-диференційовних невід'ємних фінітних функцій w, χ , то правильними є рівності (32). \square

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Brézis H. Semilinear equations in \mathbb{R}^N without condition at infinity // Appl. Math. Optim. – 1984. – **12**, N3. – P. 271-282.
2. Bernis F. Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – **106**, N3. – P. 217-241.
3. Gladkov A., Guedda M. Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **269**, N1. – P. 16-37.
4. Бокало М.М., Паучок І.Б. Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Мат. студії. – 2006. – **24**, N1. – С. 25-48.
5. Bokalo M., Domanska O. On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces // Math. studii. – 2007. – **28**, N1. – P. 77-91.
6. Медвідь І. Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – **64**. – С. 149-166.
7. Бугрій О.М. Задача з початковою умовою для нелінійної параболічної варіаційної нерівності в не обмеженій за просторовими змінними області // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – **67**. – С. 30-52.
8. Kuttler K.L., Jr. The Galerkin method and degenerate evolution equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1985. – **107**. – P. 396-413.
9. Showalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Mathematical surveys and monographs, 49. – Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.