УДК 517.956

©2013 р. **В.В. Городецький, Т.С. Тодоріко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗА ЧАСОМ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Доведено, що розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку має властивість локального посилення збіжності.

We prove that a solution of a nonlocal multipoint with respect to time problem for the evolution equation with differentiation operator of infinite order has the property of local strengthening of the convergence.

В [1] встановлено коректну розв'язність багатоточкової нелокальної за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку у класі крайових умов типу ультрарозподілів, тобто в класі узагальнених функцій, які є елементами простору $(S_{l_k}^{m_n})'$, топологічно спряженого до простору основних функцій $S_{l_k}^{m_n}$. Простори $S_{l_k}^{m_n}$ є узагальненнями просторів типу S (див. [2]) і будуються за числовими послідовностями $\{m_n\}$ та $\{l_k\}$, що задовольняють певні умови (простори типу S відповідають послідовностям $m_n = n^{n\beta}$, $l_k = k^{k\alpha}$, де $\alpha, \beta > 0$ – фіксовані параметри). Розв'язок $u(t, \cdot)$ багатоточкової задачі дається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$; при цьому $u(t, \cdot) \in S_{l_k}^{m_n}$ при кожному $t \in (0, T]$, у той же час $u(t, \cdot)$ задовольняє відповідну крайову умову в сенсі узагальнених функцій, а саме, в просторі $(S_{l_k}^{m_n})'$ при наближенні t до нуля та фіксованих точок $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$. Природно виникає запитання: якщо узагальнена функція f збігається на деякій відкритій множині з гладкою функцією, то чи буде тоді відбуватися локальне посилення збіжності вказаного розв'яку (локальна рівномірна або поточкова збіжність розв'язку). Тут виділено клас $X' \subset (S_{l_k}^{m_n})'$ узагальнених функцій типу ультрарозподілів такий, що розв'язок багатоточкової задачі з граничною функцією $f \in X'$ володіє властивістю локального покращення збіжності.

1. Попередні відомості та позначення

Розглянемо послідовність $\{m_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка володіє наступними властивостями [2]:

1) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $m_n \leq m_{n+1}$;
2) $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;
3) $\exists M > 0\ \exists h > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leq Mh^n m_n$;
4) $\exists \gamma > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n^2 \leq \gamma m_{n-1} \cdot m_{n+1}$;
5) $\exists A > 0\ \exists L > 0\ \forall \{n, l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_n \cdot m_l \leq AL^{n+l} m_{n+l}$.

Поруч розглянемо послідовність $\{l_k,\, k \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка також володіє властивостями 1)–5). Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$, котрі задовольняють умову

$$\exists c,\, A,\, B > 0\, \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq cA^k B^n l_k m_n.$$

$S_{l_k}^{m_n}$ збігається з об'єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{l_k, A}^{m_n, B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$, де символом $S_{l_k, A}^{m_n, B}$ позначено сукупність тих функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$, котрі при довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho}(A + \delta)^k (B + \rho)^n l_k m_n,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R};$$

система норм в $S_{l_k, A}^{m_n, B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta,\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Якщо $m_n = n!\rho_n$, $\sqrt[n]{\rho_n} \to 0$, $n \to \infty$, то як доведено в [2], функція $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\exists a, b, c > 0 \, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by), \tag{1}$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_k (l_k/|x|^k), & |x| \ge 1, \end{cases}$$

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_n (|y|^n/m_n), & |y| \ge 1, \end{cases}$$

Зазначимо, що ρ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\rho(x) \ge 1$, $x \in \mathbb{R}$; при цьому $\ln \rho$ – опукла на $(0, +\infty)$ функція [2], тобто

$$\forall \{y_1, y_2\} \subset (0, +\infty):$$

$$\ln \rho(y_1) + \ln \rho(y_2) \le \ln \rho(y_1 + y_2). \tag{2}$$

Наприклад, якщо $m_n = n^{n\delta}$, $0 < \delta < 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $\rho(y) \sim \exp(|y|^{1/\delta})$.

Оскільки $\gamma(x) = 1/\tilde{\gamma}(x)$, де $\tilde{\gamma}(x) = 1$, $|x| < 1$ і $\tilde{\gamma}(x) = \sup\limits_k (|x|^k/l_k)$, якщо $|x| > 1$, то γ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$, $0 < \gamma(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, якщо $l_k = k^{k\alpha}$, то правильними є нерівності [3]:

$$\exp\left(-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right) \le \gamma(x) \le c \exp\left(-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right),$$

$$c = e^{\alpha l/2}.$$

Функція $\ln \gamma$ задовольняє на $(0, +\infty)$ нерівність [2]

$$\ln \gamma(x_1) + \ln \gamma(x_2) \ge \ln \gamma(x_1 + x_2),$$

$$\{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty). \tag{3}$$

У введених просторах $S_{l_k}^{m_n}$ визначені й обмежені (а, отже, і неперервні) лінійні оператори, важливі для аналізу; в першу чергу це оператори множення на x, на всі многочлени, на нескінченно диференційовні функції, які задовольняють певні умови (зокрема, на функції із вказаних просторів), оператори диференціювання, зсуву та розтягу.

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій з простору $S_{l_k}^{m_n}$ в $\mathbb{C}$, позначимо символом $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. У просторі $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ можна ввести топологію індуктивної границі зліченно-нормованих просторів, при цьому, як випливає з (1) (див. також [2]) послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \ge 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому справджуються нерівності $|\varphi_\nu(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від ν. Мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ є кожна ціла функція $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists c_\varepsilon > 0: \, |f(z)| \le c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Відповідно, функція $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, є мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}$.

Символом $(S_{l_k}^{m_n})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Якщо $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ (тобто елементи простору $(S_{l_k}^{m_n})'$ є нескінченно диференційовними), зсув $f(ay + b)$, $a \ne 0$, добуток αf, де α – мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі $S_{l_k}^{m_n}$ визначена операція зсуву аргументу T_x :

$\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in (S^{m_n}_{l_k})'$ з основною задамо формулою

$$(f*\varphi)(x) :=< f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) >\equiv< f_\xi, \varphi(x-\xi) >$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на φ як функцію аргументу ξ, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$); при цьому $f*\varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною функцією. Якщо $f*\varphi \in S^{m_n}_{l_k}$ для довільної функції $\varphi \in S^{m_n}_{l_k}$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $S^{m_n}_{l_k}$ випливає, що $f*\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $S^{m_n}_{l_k}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $S^{m_n}_{l_k}$.

Простори типу S тісно пов'язані між собою за допомогою перетворення Фур'є, а саме, правильною є формула [3]: $F[S^{m_n}_{l_k}] = S^{l_n}_{m_k}$. Оскільки кожний простір типу S разом з кожною функцією $\varphi(x)$ містить також функцію $\varphi(-x)$ і $F^{-1}[\varphi] = (2\pi)^{-1}F[\varphi(-\xi)]$, то у зв'язку з цим перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S^{m_n}_{l_k})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$< F[f], \varphi >=< f, F[\varphi] >, \ \ \forall \varphi \in S^{l_n}_{m_k},$$

при цьому $F[f] \in (S^{l_n}_{m_k})'$.

Якщо $f \in (S^{m_n}_{l_k})'$ – згортувач у просторі $S^{m_n}_{l_k}$, то для довільної функції $\varphi \in S^{m_n}_{l_k}$ правильною є формула [2]

$$F[f*\varphi] = F[f]\cdot F[\varphi].$$

Нехай $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, – деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі $S^{l_n}_{l_k}(\mathbb{C})$ задано оператор диференціювання нескінченного порядку $g(D) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(iD)^n$, $D = d/dz$, якщо для довільної функції $\varphi \in S^{l_n}_{l_k}(\mathbb{C})$ ряд

$$\psi(z) \equiv (g(D)\varphi)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(iD)^n\varphi(z), \ z \in \mathbb{C},$$

зображає основну функцію з простору $S^{l_n}_{l_k}(\mathbb{C})$ (тут $\{l_n = n!\sqrt[n]{\rho_n}\}$ – послідовність, побудована вище). Звуження оператора $g(D)$ на простір $S^{l_n}_{l_k}$, яке позначатимемо символом A_g, називатимемо диференціальним оператором нескінченного порядку в просторі $S^{l_n}_{l_k}$. Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо ціла функція g – мультиплікатор у просторі $S^{l_n}_{l_k}(\mathbb{C})$, то в цьому просторі визначений і неперервний оператор $g(D)$, при цьому*

$$(A_g\varphi)(x) = F^{-1}[g(\sigma)F[\varphi](\sigma)](x),$$

$$\{x, \sigma\} \subset \mathbb{R}, \varphi \in S^{l_n}_{l_k}. \tag{4}$$

Доведення цієї теореми див. в [1].

Зауваження 1. Псевдодиференціальний оператор A_g визначений також у кожному просторі $S^{l_n}_{a_k}$, де $a_k \geq k!\rho_k$, $\sqrt[k]{\rho_k} \to 0$, $k \to \infty$, відображає цей простір в себе і є неперервним [1] (послідовності $\{l_n\}$ та $\{a_k\}$ задовольняють умови 1) – 5)).

2. Основні результати

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_g u, \ \ (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega,$$

$$0 < T < \infty, \tag{5}$$

задамо багатоточкову нелокальну за часом задачу

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t, \cdot) = f,$$

$$f \in (S^{l_n}_{a_k,*})', \ a_k = k^{2k}, \ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $(t_1, \ldots, t_m) \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $f \in S^{l_n}_{a_k}$, A_g – псевдодиференціальний оператор, який діє в просторі $S^{l_n}_{a_k}$, граничне співвідношення (6) розглядається в просторі $(S^{l_n}_{a_k})'$. Під розв'язком задачі (5), (6) розуміємо розв'язок $u \in C^1((0,T], S^{l_n}_{a_k}$ рівняння (5), який задовольняє граничну умову (6) у вказаному сенсі (в просторі $(S^{l_n}_{a_k})'$).

У праці [1] встановлено, що багатоточкова задача (5), (6) є коректно розв'язною. Розв'язок дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, де $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)](x)$,

$$Q(t, \sigma) =$$

$$= \exp\{tg(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k g(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

G – фундаментальний розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (5), (6).

Функція $G(t,\,\cdot)$ – ФРБЗ для рівняння (5) є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0,\,T]$ із значеннями в просторі $S_{a_k}^{l_n}$ (див. лему 2.4 [1]). Оскільки гранична узагальнена функція f в (6) – згортувач у просторі $S_{a_k}^{l_n}$, а розв'язок $u(t,\,\cdot)$ задачі (5), (6) подається у вигляді згортки $f * G(t,\,\cdot)$, то звідси дістаємо, що граничні співвідношення

$$u(t,\,\cdot) = f * G(t,\,\cdot) \underset{t\to t_i}{\longrightarrow} f * G(t_i,\,\cdot) = u(t_i,\,\cdot),$$

$$t_i \in (0,\,T],\; i \in \{1,\,\ldots,\,m\},$$

справджуються в просторі $S_{a_k}^{l_n}$. Із означення збіжності в цьому просторі випливає, зокрема, що $u(t,\,\cdot) \to u(t_i,\,\cdot)$ при $t \to t_i$, $i \in \{1,\,\ldots,\,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,\,b] \subset \mathbb{R}$. Вказану збіжність в (6) погіршує перший доданок, оскільки для функції $G(t,\,\cdot)$ точка $t = 0$ є особливою. Однак виявляється, що якщо граничну функцію f брати з вужчого, ніж $(S_{a_k}^{l_n})'$ класу, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $f * G(t,\,\cdot)$ при $t \to +0$.

Для цього будемо розглядати узагальнені функції, задані на просторі основних функцій, який є неквазіаналітичним. Такий простір містить в собі нескінченно диференційовні фінітні функції. Зокрема, для довільних неперетинних проміжків $[a_1,\,b_1]$ та $[a_2,\,b_2]$ знайдеться основна функція, рівна одиниці на $[a_1,\,b_1]$ та нулеві на $[a_2,\,b_2]$ (див. [4]). Згідно з теоремою Карлемана-Островського [4] клас $S_{a_k}^{l_n}$, $a_k = k^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ є неквазіаналітичним тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda < \infty,\;\; T(\lambda) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{l_n}. \qquad (7)$$

Отже, надалі вважатимемо, що послідовність l_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ така, що відповідна функція $T(\lambda)$ задовольняє умову (7). Тоді для узагальненої функції $f \in (S_{a_k}^{\tilde{l}_n})'$, $\tilde{l}_n = l_n \cdot n^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є коректним поняттям співпадання f з гладкою функцією g (яку розуміємо як регулярний функціонал з простору $(S_{a_k}^{\tilde{l}_n})'$) на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$ (при виконанні умови (7) клас $S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$ є неквазіаналітичним). При обґрунтуванні властивості локалізації використовуватимемо наступне допоміжне твердження.

Лема 1. *Якщо $x \neq 0$, то для функції $G(t,\,x)$ та її похідних справджуються оцінки*

$$|D_x^m G(t,\,x)| \leq cB_0^q q^{2q} B^m l_m t^{q-m-1} |x|^{-q},$$

$$t \in (0,\,1],\; m \in \mathbb{Z}_+, \qquad (8)$$

де сталі c, B_0, $B > 0$ не залежать від t, $q \in \mathbb{N}$ – довільно фіксоване.

Доведення. Оскільки

$$G(t,\,x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\,\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

то покладемо $\sigma = t^{-1}y$. Тоді

$$G(t,\,x) = (2\pi)^{-1} t^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\,t^{-1}y) e^{-it^{-1}xy} dy. \qquad (9)$$

За умови $x \neq 0$ зінтегруємо q разів частинами інтеграл (9); у результаті знайдемо, що

$$G(t,\,x) = i^q (2\pi)^{-1} t^{q-1} x^{-q} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} D_y^q Q(t,\,t^{-1}y) e^{-it^{-1}xy} dy,$$

$$D_x^m G(t,\,x) = (-1)^m (2\pi)^{-1} i^{q+m} t^{q-m+1} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} y^m D_y^q Q(t,\,t^{-1}y) e^{-it^{-1}xy} dy,\; m \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$|D_x^m G(t,\,x)| \leq (2\pi)^{-1} t^{q-m-1} |x|^{-q} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} |y|^m |D_y^q Q(t,\,t^{-1}y)| dy.$$

Оскільки $Q(t,\,t^{-1}y) = Q_1(t,\,t^{-1}y) Q_2(t^{-1}y)$, то оцінка $|D_y^q Q(t,\,t^{-1}y)|$ зводиться до оцінок функцій $|D_y^q Q_1(t, t^{-1}y)|$, $|D_y^q Q_2(t^{-1}y)|$. Повторюючи міркування, проведені при доведенні лем 2.1, 2.2 [1] знайдемо, що правильними є нерівності

$$|D_y^q Q_1(t, t^{-1}y)| \le c_1 b_1^q q! e^{-\ln\tilde{\gamma}(ay)},$$

$$|D_y^q Q_2(t^{-1}y)| \le c_2 b_2^q q^{2q} e^{-\ln\tilde{\gamma}(at^{-1}y)} \le c_2 b_2^q q^{2q},$$

$$|D_y^q Q(t, t^{-1}y)| \le cB_0^q q^{2q} e^{-\ln\tilde{\gamma}(ay)},\ q \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

де сталі c, B_0, $a > 0$ не залежать від t. Урахувавши (10), прийдемо до нерівності

$$|D_x^m G(t, x)| \le \tilde{c} B^q q^{2q} t^{q-m-1} |x|^{-q} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} |y|^m e^{-\ln\tilde{\gamma}(ay)} dy.$$

Оскільки

$$\exp\{-\ln\tilde{\gamma}(ay)\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}y\right)\right\}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}y\right)\right\}$$

та

$$|y|^m \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}y\right)\right\} = |y|^m \tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}y\right) =$$

$$= |y|^m \inf_m \frac{l_m}{|\frac{a}{2}y|^m} \le \left(\frac{a}{2}\right)^m l_m,\ |y| \ge 1,$$

то

$$|D_x^m G(t, x)| \le \tilde{c} B_0^q q^{2q} t^{q-m-1} |x|^{-q} B_1^m l_m \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln\tilde{\gamma}(\frac{a}{2}y)} dy = \tilde{\tilde{c}} B_0^q q^{2q} t^{q-m-1} B_1^m l_m |x|^{-q},$$

$$m \in \mathbb{Z}_+,\ t \in (0, 1],\ x \ne 0,$$

$B_1 = 2/a$, сталі $\tilde{\tilde{c}}$, B_0, $B_1 > 0$ не залежать від t.

Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай* $f \in (S_{a_k,*}^{\tilde{l}_n})'$, $a_k = k^{2k}$, $\tilde{l}_n = l_n n^{2n}$, *і* $f = 0$ *на інтервалі* $(a, b) \subset \mathbb{R}$. *Тоді розв'язок задачі (5), (6) з граничною функцією* f *прямує до нуля при* $t \to +0$ *рівномірно на довільному відрізку* $[c, d] \subset (a, b)$.

Доведення. Нехай $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$. Побудуємо функцію $\varphi \in S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$ з носієм в (a, b) таку, що $\varphi = 1$ на $[a_1, b_1]$. Оскільки функції $\varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)$, $(1-\varphi(\cdot))T_{-x}\check{G}(t, \cdot)$ при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$ належать до простору $S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$, то правильним є співвідношення

$$u(t, x) = \langle f, \varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)\rangle +$$

$$+ \langle f, (1-\varphi(\cdot))T_{-x}\check{G}(t, \cdot)\rangle,\ (t, x) \in \Omega.$$

Узагальнена функція f дорівнює нулеві на (a, b),

$$\mathrm{supp}(\varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)) \subset (a, b)$$

тому з останнього співвідношення випливає, що

$$u(t, x) = t\langle f, t^{-1}\gamma(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)\rangle,\ (t, x) \in \Omega,$$

де $\gamma = 1 - \varphi$.

Для доведення теореми досить встановити, що сім'я функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{-1}\gamma(\xi)T_{-x}\check{G}(t, \xi)$ обмежена в просторі $S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$ рівномірно по t (для малих значень t) та $x \in [c, d]$, тобто, що

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| \le cA^k B^n k^{2k} \tilde{l}_n,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \xi \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

де сталі c, A, $B > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. Оскільки $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [a_1, b_1]$, то оцінку (11) досить довести для $\xi \in \mathbb{R}\backslash[a_1, b_1]$.

Функція φ є елементом простору $S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$. Отже,

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi(\xi)| \le c_1 A_1^k B_1^n k^{2k} \tilde{l}_n,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| = t^{-1}\Bigg|\xi^k \sum_{p=0}^n C_n^p D_\xi^p \times$$

$$\times \gamma(\xi) D_\xi^{n-p} G(t, x-\xi)\Bigg| \le \Psi_{t,x}^1(\xi) + \Psi_{t,x}^2(\xi),$$

де

$$\Psi_{t,x}^1(\xi) := t^{-1}\sum_{p=0}^n C_n^p |\xi^k D_\xi^p \varphi(\xi)| \times$$

$$\times |D_\xi^{n-p} G(t, x-\xi)|,$$

$$\Psi_{t,x}^2(\xi) := t^{-1}|\xi^k D_\xi^n G(t, x-\xi)|.$$

Оцінимо $\Psi^1_{t,x}(\xi)$. Для цього скористаємося нерівностями (8); при оцінці $|D^{n-p}_\xi G(t,\, x-\xi)|$ в (8) покладемо $q = n-p+2$; врахуємо також те, що $|x-\xi| \geq a_0 > 0$, де $a_0 = \min\{|a_1 - c|,\, |b-b_1|\}$. Отже,

$$\Psi^1_{t,x}(\xi) \leq cc_1 t^{-1} A_1^k k^{2k} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{n} C_n^p B_1^p \tilde{l}_p B_0^q q^{2q} B^{n-p} l_{n-p} t^{q-(n-p)-1} |x-\xi|^{-q}.$$

Оскільки $t^{q-(n-p)-1} = t$, $q = n-p+2$, $0 \leq p \leq n$, $q^{2q} = (n-p+2)^{2(n-p+2)} \leq bM^{n-p}(n-p)^{2(n-p)}$, $B_0^q = B_0^2 B_0^{n-p}$, $|x-\xi|^{-q} \leq a_0^q = (\frac{1}{a_0})^{n-p+2}$, $\tilde{l}_p \cdot \tilde{l}_{n-p} \leq NL^n \tilde{l}_n$ (див. п.1, властивість 5), де b, M, N, L – додатні сталі, то

$$\Psi^1_{t,x}(\xi) \leq \tilde{c} A_1^k k^{2k} \tilde{B}^n \sum_{p=0}^{n} C_n^p \tilde{l}_p l_{n-p} (n-p)^{2(n-p)} =$$

$$= \tilde{c} A_1^k k^{2k} \tilde{B}^n \sum_{p=0}^{n} C_n^p \tilde{l}_p \tilde{l}_{n-p} \leq \tilde{\tilde{c}} A_1^k k^{2k} \tilde{\tilde{B}}^n \tilde{l}_n, \tag{12}$$

де $\tilde{\tilde{B}} = 2\tilde{B}L = 2L\max\{B_1,\, B_0/a_0\}$, причому всі сталі не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом.

Для оцінок $\Psi^2_{t,x}(\xi)$ скористаємося тим, що

$$\exists L_0 > 0\, \forall x \in [c,\, d]\, \forall \xi \in \mathbb{R}\backslash[a_1,\, b_1] :$$

$$|\xi|/|x-\xi| \leq L_0.$$

Поклавши в (8) $q = n+2+k$ знайдемо, що

$$\Psi^2_{t,x}(\xi) \leq ct^{q-n-2}|\xi|^k |x-\xi|^{-q} B_0^q q^{2q} B^n l_n.$$

Далі знаходимо, що

$$q^{2q} = (n+2+k)^{2(n+2+k)} \leq \bar{c} \bar{A}^k \bar{B}^n k^{2k} n^{2n},$$

де $\bar{c}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ – додатні сталі,

$$|\xi|^k |x-\xi|^{-q} \leq \alpha_0 L_0^k a_1^n, \;\; \alpha_0 = a_0^{-2},\, a_1 = a_0^{-1},$$

$$B_0^q = B_0^2 B_0^n B_0^k,\, t^{q-n-2} = t^k \leq 1,$$

$$t \in (0,\, 1],\, \{k,\, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\Psi^2_{t,x}(\xi) \leq \tilde{\tilde{c}} A_2^k B_2^n k^{2k} n^{2n} l_n = \bar{\bar{c}} A_2^k B_2^n k^{2k} \tilde{l}_n, \tag{13}$$

де сталі $\bar{\bar{c}}$, A_2, $B_2 > 0$ не залежать від t, x, ξ. З нерівностей (12), (13) випливає нерівність (11).

Теорема доведена.

Наслідок 1. Нехай $f \in (S^{\tilde{l}_n}_{a_k,*})' \subset (S^{l_n}_{a_k,*})'$, $u(t,\, x)$ – розв'язок задачі (5), (6) з граничною функцією f. Якщо $f = 0$ на інтервалі $(a,\, b) \subset \mathbb{R}$, то граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\, x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,\, x) - \ldots -$$

$$-\mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,\, x) = 0$$

справджується рівномірно відносно x на довільному відрізку $[c,\, d] \subset (a,\, b)$.

Лема 2. *Якщо функція-символ g задовольняє умову $g(0) = 0$, то $G(t,\, \cdot) \to (\mu - \tilde{\mu}_0)\delta$ при $t \to +0$ в просторі $(S^{l_n}_{a_k})'$ (тут $\tilde{\mu}_0 = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$).*

Доведення. Якщо $g(0) = 0$, то $Q_1(t,\, 0) = 1$, $Q_2(0) = \left(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1}$, тому з формули

$$\int_{\mathbb{R}} G(t,\, x) e^{ix\sigma} dx = Q_1(t,\, \sigma) Q_2(\sigma)$$

при $\sigma = 0$ дістаємо, що

$$\int_{\mathbb{R}} G(t,\, x) dx = (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-1}, \;\; t \in (0,\, T].$$

Тоді для довільної основної функції $\varphi \in S^{l_n}_{a_k}$

$$\left| \langle G(t,\, \cdot),\, g\rangle - \frac{\langle \delta,\, \varphi\rangle}{\mu - \tilde{\mu}_0} \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} G(t,\, x)\varphi(x) dx - \frac{\varphi(0)}{\mu - \tilde{\mu}_0} \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} G(t,\, x)\varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} G(t,\, x)\varphi(0) dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\mathbb{R}} |G(t,\, x)| \cdot |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \equiv J(t). \right.$$

Для доведення твердження досить показати, що

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists t_0 = t_0(\varepsilon) > 0\, \forall t :\; 0 < t < t_0 \Rightarrow$$

$$J(t) < \varepsilon.$$

Застосувавши формулу про скінченні прирости знайдемо, що $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq M|x|$, де $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{'}(x)|$. Візьмемо ε з проміжку $(0, T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta_0 = t_0^{1/2}$. Тоді $|\varphi(x) - \varphi(0)| < M\varepsilon^{1/2}$, якщо лише $|x| < t_0^{1/2}$. Отже,

$$J(t) < \varepsilon^{1/2} \int\limits_{|x|<\delta_0} |G(t, x)|dx + \int\limits_{|x|\geq\delta_0} |G(t, x)|\times$$

$$\times|\varphi(x) - \varphi(0)|dx \equiv \varepsilon^{1/2} J_1(t) + J_2(t).$$

Оцінимо $J_1(t)$. Легко бачити, що

$$J_1(t) \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |G(t, x)|dx = t \int\limits_{\mathbb{R}} |G(t, ty)|dy =$$

$$= t \int\limits_{|y|<1} |G(t, ty)|dy + \int\limits_{|y|\geq 1} |G(t, ty)|dy \equiv$$

$$\equiv J_1^1(t) + J_1^2(t).$$

Для функції $G(t, ty)$ маємо наступне зображення:

$$G(t, ty) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{tg(\sigma)} Q_2(\sigma) e^{-ity\sigma} d\sigma \overset{t\sigma=\eta}{=}$$

$$= (2\pi)^{-1} t^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{tg(t^{-1}\eta)} Q_2(t^{-1}\eta) e^{-iy\eta} d\eta.$$

Оскільки

$$Q_2(t^{-1}y) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{t_k g(t^{-1}\eta)}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1}$$

(див. доведення леми 2.2 [1]), то

$$|G(t, ty)| \leq c_0 t^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{tg(t^{-1}\eta)} d\eta \leq$$

$$\leq c_0 t^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t \ln\tilde{\gamma}(at^{-1}\eta)} d\eta \leq$$

$$\leq c_0 t^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\ln\tilde{\gamma}(a\eta)} d\eta = c_1 t^{-1}, \ \ t \in (0, 1],$$

де $c_0 = (2\pi)^{-1} \left(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1}$. Отже, $J_1(t) \leq c_1$, стала $c_1 > 0$ не залежить від t.

Для того, щоб здійснити оцінку інтеграла $J_1^2(t)$, скористаємося нерівностями (8), де покладемо $m = 0$, $q = 2$. Тоді (8) стосовно функції $G(t, ty)$ набуває вигляду:

$$|G(t, ty)| \leq \tilde{c} B_0^2 t |ty|^{-2} = \tilde{\tilde{c}} t^{-1} |y|^{-2},$$

$$y \neq 0, \ 0 < t \leq 1.$$

Звідси дістаємо, що

$$J_1^2(t) \leq \tilde{\beta} \int\limits_{|y|\geq 1} y^{-2} dy = \beta^{'}, \ \ t \in (0, 1].$$

Таким чином, $J_1(t) \leq d_0$, де стала $d_0 > 0$ не залежить від t.

Оцінимо $J_2(t)$. Передусім зазначимо, що $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq M_1$, де $M_1 = 2 \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$. Тоді

$$J_2(t) \leq M_1 \int\limits_{|x|\geq t_0^{1/2}} |G(t, x)|dx.$$

Знову скориставшись нерівністю (8), де $m = 0$, $q = 2$ знайдемо, що

$$J_2(t) \leq 2\tilde{\beta} M_1 t \int\limits_{t_0^{1/2}}^{+\infty} x^{-2} dx =$$

$$= \beta^{'} t \cdot t_0^{-1/2} < \beta^{'} t^{1/2} = \beta^{'} \varepsilon^{1/2}$$

для всіх $t < t_0$. З отриманих для $J_1(t)$, $J_2(t)$ оцінок випливає, що

$$\forall \varepsilon \in (0, T)\, \exists t_0 = \varepsilon \, \forall t : \ 0 < t < t_0 \Rightarrow$$

$$J(t) < \mathrm{const} \cdot \varepsilon^{1/2},$$

що й потрібно було довести.

Якщо $\varepsilon \geq T$, то за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільно фіксоване число з проміжку $(0, T)$.

Лема доведена.

Надалі вважатимемо, що оператор A_g в рівнянні (5) побудований за функцією g, яка задовольняє умову $g(0) = 0$.

Символом M_s позначатимемо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $S_{a_k}^{\tilde{l}n}$.

Теорема 3. Властивість локалізації. *Нехай $f \in (S^{\tilde{l_n}}_{a_k,*})'$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі (5), (6) з граничною функцією f. Якщо узагальнена функція f збігається на інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$ з функцією $\tilde{g} \in M_s$, то на довільному проміжку $[c,d] \subset (a,b)$ граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \ldots -$$
$$-\mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,x) = \tilde{g}(x)$$

виконується рівномірно відносно x.

Доведення. Нехай $[c,d] \subset [a_1,b_1] \subset (a,b)$, φ – основна функція, побудована при доведенні теореми 2. Оскільки $\varphi(f-\tilde{g}) = 0$ на (a,b), то $\varphi(f-\tilde{g}) = 0$ на $[c,d]$, $(1-\varphi)f = 0$ на $[a_1,b_1]$ і за доведеним у теоремі 2 граничні співвідношення

$$\lim_{t\to+0} \langle \varphi(f-\tilde{g}), T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = 0,$$
$$\lim_{t\to+0} \langle (1-\varphi)f, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = 0 \qquad (14)$$

справджуються рівномірно відносно $x \in [c,d]$.

Внаслідок властивості неперервності $G(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S^{l_n}_{a_k}$ граничні співвідношення

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \langle \varphi(f-\tilde{g}), T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = 0, \quad (15)$$
$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \langle (1-\varphi)f, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = 0, \quad (16)$$

також виконуються рівномірно відносно $x \in [c,d]$. Крім того,

$$u(t,x) = \langle f, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle =$$
$$= \langle \varphi(f-\tilde{g}), T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle +$$
$$+\langle (1-\varphi)f, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle + \langle \varphi\tilde{g}, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle,$$

причому

$$\langle \varphi\tilde{g}, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)\varphi(\xi)\tilde{g}(\xi)d\xi =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} G(t,\xi)\varphi(x-\xi)\tilde{g}(x-\xi)d\xi \equiv J(t,x).$$

Урахувавши співвідношення (14) – (16), лему 2 та теорему 2.4 з [1] робимо висновок, що для доведення твердження досить встановити, що $J(t,x) \to (\mu-\tilde{\mu}_0)^{-1}\varphi(x)\tilde{g}(x)$ при $t\to+0$ рівномірно відносно $x \in [c,d]$, оскільки граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} J(t,x) = \frac{\tilde{\mu}_0}{\mu-\tilde{\mu}_0}(\varphi\tilde{g})(x)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [c,d]$. Це випливає з того, що $J(t,x)$ подається у вигляді згортки $G(t,x) * (\varphi\tilde{g})(x)$, при цьому граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} G(t,x) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,x)$$

виконується в просторі $S^{l_n}_{a_k}$ (зокрема, рівномірно на відрізку $[c,d]$), а $\varphi\tilde{g}$ – фінітна функція з простору $S^{l_n}_{a_k}$, яку можна розуміти як фінітний функціонал (згортувач у просторі $S^{l_n}_{a_k}$).

Доведення граничного співвідношення

$$J(t,\cdot) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} (\mu-\tilde{\mu}_0)^{-1}(\varphi\tilde{g})(\cdot), \ \ t\to+0,$$

яке здійснюємо за схемою, використаною при доведенні леми 2, зводиться до оцінки інтегралів вигляду

$$\int_{|\varepsilon|<\delta} \Psi(t,\xi)d\xi, \quad \int_{|\varepsilon|\geq\delta} \Psi(t,\xi)d\xi,$$

де

$$\Psi(t,\xi) = |G(t,\xi)| \cdot |(\varphi\tilde{g})(x-\xi) - (\varphi\tilde{g})(x)|.$$

$\delta > 0$ шукаємо за довільно заданим $\varepsilon > 0$ так, що $|(\varphi\tilde{g})(x-\xi) - (\varphi\tilde{g})(x)| < \varepsilon$, якщо лише $|x| = |(x-\xi)-x| < \delta$. При оцінці вказаних інтегралів використовуємо нерівність $\int_{\mathbb{R}} |G(t,\xi)|d\xi \leq d_0$, де стала $d_0 > 0$ не залежить від t (див. доведення леми 2), а також те, що

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R},\, x\in[c,d]} |(\varphi\tilde{g})(x-\xi) - (\varphi\tilde{g})(x)| = M < +\infty.$$

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною: Монографія. – Чернівці: Видавничий дім "РОДОВІД", 2013. – 352 с.

2. *Городецкий В.В., Мартынюк О.В.* Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева в пространствах типа S // Сиб. мат. журн. – 2013. – Т. 54, № 3. – С. 569–584.

3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

4. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.