УДК 517.956.4

©2013 р. А.О. Данилюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь.

We establish some properties of the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for the parabolic system of integro-differential equations.

У теорії задачі Коші (ЗК) для різних класів параболічних систем ключову роль відіграє фундаментальна матриця розв'язків (ФМР), за допомогою якої визначається розв'язок задачі [1-3]. Важливим також є встановлення властивостей ФМР, які дозволяють дослідити коректність поставленої задачі, а також становлять самостійний інтерес.

У даній статті розглядається параболічна система інтегро-диференціальних рівнянь з оператором типу Фредгольма. ЗК для цієї системи досліджена в [4]. Крайова задача для параболічної системи з інтегральним оператором типу Вольтерри-Фредгольма розглядалась в [5]. Тут встановлюються деякі властивості ФМР, зокрема нормальність, єдиність, зв'язок між коефіцієнтами системи та ФМР. При цьому, у порівнянні з властивостями ФМР для параболічної системи диференціальних рівнянь [6], тут потрібно накладати додаткові умови на ядро інтегрального оператора.

Розглянемо в $\Pi = [0,T] \times \mathbb{R}^n$ систему

$$L(t,x,D,K)u(t,x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x) D_x^k u - \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,\xi)u(t,\xi)d\xi = 0, \qquad (1)$$

У розгорненому записі система має вигляд

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A^{i1}_{(k_1,\dots,k_n)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}u_1}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} + \dots + \sum_{|k|\le 2b} A^{iN}_{(k_1,\dots,k_n)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}u_N}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} + \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(t,x,\xi)u_j(t,\xi)d\xi,$$

$$i = 1,\dots,N, \quad |k| = k_1 + \dots + k_n.$$

Нехай виконуються наступні умови.

(I) Система (1) рівномірно параболічна в шарі Π [1].

(II) Коефіцієнти системи $A_k(t,x)$ визначені в шарі Π, обмежені, неперервні по t, причому рівномірно щодо x при $|k| = 2b$, і $A_k \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$.

(III) Існують похідні $D_x^k A_k(t,x)$, $|k| \le 2b$, які є обмеженими, неперервними по t і гельдеровими по x рівномірно щодо t з показником α в Π.

(IV) Елементи ядра $K = (K_{ij})_{ij=1}^N$ задовольняють нерівності [4]

$$|D_x^m K_{ij}(t,x,\xi)| \le C_m t^{-\frac{n+|m|+2b-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t,x,\xi)}, \qquad (2)$$

$$t > 0, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n, \quad |m| = 0,1,$$

$$\rho(t,\tau,x,\xi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i-\xi_i|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q, \ \ q = \frac{2b}{2b-1},$$

$$\rho(t,x,\xi) \equiv \rho(t,0,x,\xi).$$

(V) Для ФМР Z відповідної параболічної системи та інтегрального ядра K виконується рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,z)Z(t,\tau,z,\xi)dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,\tau,x,z)K(\tau,z,\xi)dz.$$

Остання умова забезпечує нормальність та єдиність ФМР ЗК для системи (1).

За умов (I), (II), (IV) існує ФМР Г системи (1), яка досліджена в [4] і зображується наступним чином

$$\Gamma(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi)+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,\beta,x,z)R(\beta,\tau,z,\xi)dz \equiv Z+W,$$

де

$$R(t,\tau,x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu(t,\tau,x,\xi),$$

$$H_\nu(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} H_1(t,\beta,x,z)\times$$

$$\times H_{\nu-1}(\beta,\tau,z,\xi)dz, \quad \nu=2,3,...,$$

$$H_1(t,\tau,x,\xi) = H = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,z)Z(t,\tau,z,\xi)dz.$$

Для похідних правильні оцінки [4]:

$$|D_x^k Z(t,\tau,x,\xi)| \leq C_k(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$

$$|D_x^k W(t,\tau,x,\xi)| \leq C_k(t-\tau)^{-\frac{n+|k|-\alpha}{2b}}\times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} C_m' \prod_{p=1}^{m} \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-(c_{\nu_o}-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)},$$

$$|k| \leq 2b, \quad t>\tau, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

де константи C_m', c_{ν_o}, ν_o визначені в [4].

Якщо виконується умова (III), то для системи (1) існує спряжена за Лагранжем система

$$L^*v(\tau,\xi) \equiv -\frac{\partial v}{\partial \tau} - \sum_{|k|\leq 2b} (-1)^{|k|} D_\xi^k \Big(\bar{A}_k'(\tau,\xi)v\Big) -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(\tau,\xi,x)v(\tau,x)dx = 0, \tag{4}$$

$$K^*(\tau,\xi,x) = \bar{K}'(\tau,x,\xi),$$

в якій риска означає комплексне спряження, а штрих – транспонування матриці. Аналогічно як і в [4] побудуємо для цієї системи ФМР ЗК

$$\Gamma^*(\tau,t,\xi,x) = Z^*(\tau,t,\xi,x)+$$

$$+\int\limits_{t}^{\tau} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(\tau,\beta,\xi,z)R^*(\beta,t,z,x)dz \equiv Z^*+W^*,$$

де

$$R^*(\tau,t,\xi,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu^*(\tau,t,\xi,x),$$

$$H_\nu^*(\tau,t,\xi,x) = \int\limits_{t}^{\tau} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} H_1^*(\tau,\beta,\xi,z)\times$$

$$\times H_{\nu-1}^*(\beta,t,z,x)dz, \quad \nu=2,3,...,$$

$$H_1^* = H^* = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(\tau,\xi,z)Z^*(\tau,t,z,x)dz.$$

Враховуючи зображення (1) і (4) для операторів L і L^*, розглянемо такий вираз для $u,v \in C_{t,x}^{(1,2b)}(\Pi)$:

$$\bar{v}'Lu - (\overline{L^*v})'u = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}'\cdot u) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} B_i(\bar{v}',u) -$$

$$-\bar{v}'\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,\xi)u(t,\xi)d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(t,\xi)K(t,\xi,x)d\xi \cdot u,$$

де $B_i(\bar{v}',u)$ – білінійні форми, які містять похідні $D_x^k(\bar{v}'\cdot A_k)$, $D_x^k u$ з $|k| \leq 2b-1$.

Проінтегруємо дану рівність по області $|x|<R$, $R>0$, $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{|x|<R} \Big(\bar{v}'Lu - (\overline{L^*v})'u\Big)(t,x)dx =$$

$$= \int\limits_{|x|<R} \Big(\bar{v}'u\Big)(t,x)\Big|_{t_1}^{t_2} dx +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{|x|=R} \sum_{i=1}^{n} B_i(\bar{v}',u)(t,x)\cos(\nu,x_i)dS_x -$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{|x|<R} \bar{v}'(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,\xi)u(t,\xi)d\xi dx +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{|x|<R} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(t,\xi) K(t,\xi,x) d\xi \cdot u(t,x) dx,$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $|x| = R$.

Спрямуємо $R \to \infty$. Якщо білінійні форми $B_i(\bar{v}', u)$ досить швидко прямують до нуля при $|x| \to \infty$, то з попередньої рівності одержимо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\bar{v}' Lu - (\overline{L^* v})' u\right)(t,x) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\bar{v}' u)(t,x)\Big|_{t_1}^{t_2} dx -$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,\xi) u(t,\xi) d\xi dx +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(t,\xi) K(t,\xi,x) d\xi \cdot u(t,x) dx.$$

Очевидно, що останні два інтеграли рівні, якщо в одному з них змінити порядок інтегрування. Тому остаточно одержимо таку формулу

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\bar{v}' Lu - (\overline{L^* v})' u\right)(t,x) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\bar{v}' u)(t,x)\Big|_{t_1}^{t_2} dx. \qquad (5)$$

Наслідок. Якщо u і v – розв'язки однорідних систем $Lu = 0$ і $L^* v = 0$ відповідно, то інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\bar{v}' u)(t,x) dx$$

не залежить від t.

Встановимо далі властивості ФМР ЗК $\Gamma(t,\tau,x,\xi)$.

$\mathbf{1^0}$. Якщо виконується умова (V), то ФМР ЗК Γ є нормальною, тобто матриця

$$\Gamma^*(\tau,t,\xi,x) = \bar{\Gamma}'(t,\tau,x,\xi) \qquad (6)$$

по аргументах (τ,ξ) є ФМР ЗК для спряженої до (1) системи (4).

Доведення. Враховуючи конструкції ФМР, достатньо показати, що

$$W^*(\tau,t,\xi,x) = \bar{W}'(t,\tau,x,\xi).$$

Розглянемо спочатку

$$H^*(\tau,t,\xi,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(\tau,\xi,z) Z^*(\tau,t,z,x) dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{K}'(\tau,z,\xi) \bar{Z}'(t,\tau,x,z) dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\overline{Z(t,\tau,x,z) K(\tau,z,\xi)})' dz =$$

$$= \left(\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,z) Z(t,\tau,z,\xi) dz}\right)' = \bar{H}'(t,\tau,x,\xi).$$

Тут ми скористались властивістю спряжених матриць та умовою (V). Використовуючи метод індукції, для повторних ядер встановлюємо рівності

$$H_\nu^*(\tau,t,\xi,x) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{H}_1'(\beta,\tau,z,\xi) \bar{H}_{\nu-1}'(t,\beta,x,z) dz =$$

$$= \left(\overline{\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} H_{\nu-1}(t,\beta,x,z) H_1(\beta,\tau,z,\xi) dz}\right)' =$$

$$= \bar{H}_\nu'(t,\tau,x,\xi), \quad \nu = 2,3,...$$

Отже,

$$R^*(\tau,t,\xi,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{H}_\nu' = \bar{R}'(t,\tau,x,\xi).$$

Тоді

$$W^*(\tau,t,\xi,x) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{Z}'(\beta,\tau,z,\xi) \bar{R}'(t,\beta,x,z) dz =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\overline{R(t,\beta,x,z) Z(\beta,\tau,z,\xi)})' dz \equiv$$

$$\equiv (\overline{R**Z})'.$$

У скорочених позначеннях за допомогою оператора символічної згортки розглянемо детальніше вираз

$$R**Z = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu **Z =$$

$$= H_1**Z + \sum_{\nu=2}^{\infty} \big(H_1**H_{\nu-1}\big)**Z.$$

З умови (V) випливає, що

$$H_1**Z = \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,\beta,x,z)\times$$

$$\times K(\beta,z,y)Z(\beta,\tau,y,\xi)dzdy = Z**H_1. \quad (7)$$

Скористаємось далі асоціативністю оператора символічної згортки і рівністю (7)

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\big(H_1**H_{\nu-1}\big)**Z = \sum_{\nu=2}^{\infty}\big(H_{\nu-1}**H_1\big)**Z =$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} H_{\nu-1}**\big(H_1**Z\big) =$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} H_{\nu-1}**\big(Z**H_1\big) = \sum_{\nu=2}^{\infty}\big(H_{\nu-1}**Z\big)**H_1 =$$

$$= Z**\Big(\sum_{\nu=2}^{\infty} H_{\nu-1}**H_1\Big).$$

Тут останній перехід правильний, оскільки

$$H_{\nu-1}**Z =$$

$$= \underbrace{\big(\cdots\big((H_1**H_1)**H_1\big)**\cdots**H_1\big)}_{\nu-1}**Z =$$

$$= Z**\underbrace{\big(H_1**\big(H_1**\cdots**(H_1**H_1)\cdots\big)\big)}_{\nu-1} =$$

$$= Z**H_{\nu-1}.$$

Отже,

$$R**Z = Z**H_1 + Z**\Big(\sum_{\nu=2}^{\infty} H_{\nu-1}**H_1\Big) =$$

$$= Z**\sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu = Z**R,$$

тому

$$W^*(\tau,t,\xi,x) = (\overline{R**Z})' =$$

$$= (\overline{Z**R})' = \bar{W}'(t,\tau,x,\xi).$$

А це означає, що твердження про нормальність ФМР ЗК Γ вірне.

2⁰. Існує тільки одна нормальна ФМР ЗК Γ, що задовольняє нерівності (3).

Доведення. Нехай Γ_1 і Γ_2 – дві нормальні ФМР ЗК. Тоді поклавши в (5) $v(\beta,y) = \Gamma_1^*(\beta,t,y,x), u(\beta,y) = \Gamma_2(\beta,\tau,y,\xi)$, скориставшись рівністю (6) і наслідком з формули Гріна, одержимо, що інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(t,\beta,x,y)\Gamma_2(\beta,\tau,y,\xi)dy = \Phi(t,\tau,x,\xi)$$

не залежить від β. Згідно з означенням ФМР ЗК Γ_1, Γ_2 маємо

$$\lim_{\beta\to t}\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(t,\beta,x,y)\Gamma_2(\beta,\tau,y,\xi)dy =$$

$$= \Gamma_2(t,\tau,x,\xi) = \Phi,$$

$$\lim_{\beta\to \tau}\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(t,\beta,x,y)\Gamma_2(\beta,\tau,y,\xi)dy =$$

$$= \Gamma_1(t,\tau,x,\xi) = \Phi,$$

тобто $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

3⁰. ФМР ЗК Γ задовольняє функціональне рівняння

$$\Gamma(t,\tau,x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,\beta,x,y)\Gamma(\beta,\tau,y,\xi)dy,$$

$$\tau < \beta < t, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

Доведення. Розглянемо розв'язок ЗК $u_1 = \Gamma(t,\tau,x,\xi)$ з початковою умовою $u_1|_{t=\beta} = \Gamma(\beta,\tau,x,\xi)$. З іншого боку, розв'язок $u_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,\beta,x,y)\Gamma(\beta,\tau,y,\xi)dy$ теж задовольняє початкову умову $u_2|_{t=\beta} = \Gamma(\beta,\tau,x,\xi)$. За теоремою єдиності в класі обмежених функцій $u_1 = u_2$, тобто виконується рівність (8).

4⁰. Правильні наступні рівності

$$\lim_{\tau\to t}\frac{1}{t-\tau}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,\tau,x,\xi)d\xi - E\Big) =$$

$$= A_{(0,\dots,0)}(t,x) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,\xi)d\xi, \qquad (9)$$

$$\lim_{\tau\to t}\frac{1}{t-\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,y)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy =$$

$$= r_1!\cdot\ldots\cdot r_n! A_{(r_1,\dots,r_n)}(t,x), \qquad (10)$$

де E – одинична матриця порядку N, $0<|r|\le 2b$.

Якщо ядро K задовольняє нерівності (2), то рівність (10) правильна тільки при $|r| = 2b$. У випадку $|r| < 2b$, (10) виконується за умови, що

$$|D_x^m K(t,x,\xi)| \le C_m t^{-\frac{n+|m|-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t,x,\xi)}, \quad (11)$$

$$t>0, \quad x,\xi\in\mathbb{R}^n, \quad |m| = 0,1.$$

Доведення. Встановимо рівність (9). Нехай $0<\varepsilon<t-\tau$. Скористаємось формулою Гріна (5), в якій покладемо $u(\beta,\xi) = E$, $v(\beta,\xi) = \Gamma^*(\beta,t,\xi,x)$, $t_1 = \tau$, $t_2 = t-\varepsilon$. Оскільки $L^*\Gamma^*(\beta,\xi) = 0$, $LE(\beta,\xi) = -A_0(\beta,\xi) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(\beta,\xi,y)dy$, а $\left(\overline{\Gamma^*(\beta,t,\xi,x)}\right)' = \Gamma(t,\beta,x,\xi)$ на основі (6), то будемо мати

$$-\int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,\xi)A_0(\beta,\xi)d\xi -$$

$$-\int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(\beta,\xi,y)dyd\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,t-\varepsilon,x,\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,\xi)d\xi.$$

Спрямуємо $\varepsilon\to 0$, одержимо

$$\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,\xi)A_0(\beta,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(\beta,\xi,y)dyd\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,\xi)d\xi - E.$$

На підставі теореми про середнє значення маємо

$$(t-\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\theta,x,\xi)A_0(\theta,\xi)d\xi +$$

$$+(t-\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\theta,x,\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(\theta,\xi,y)dyd\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,\xi)d\xi - E, \quad \tau<\theta<t,$$

звідки поділивши обидві частини рівності на $t-\tau$ і перейшовши до границі, одержимо рівність (9).

Для доведення співвідношення (10) покладемо у формулі Гріна (5) $t_1 = \tau, t_2 = t-\varepsilon$, $u(\beta,y) = \prod\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}, v(\beta,y) = \Gamma^*(\beta,t,y,x)$. Одержимо

$$\int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,y)L(\beta,y,D,K)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,t-\varepsilon,x,y)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,y)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy.$$

Звідси згідно з властивістю δ-подібності ФМР ЗК, спрямувавши $\varepsilon\to 0$, маємо

$$\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,y)L(\beta,y,D,K)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,y)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy. \qquad (12)$$

Розглянемо тепер

$$L(\beta,y,D,K)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i} =$$

$$= -\sum_{|k|\le 2b}A_k(\beta,y)D_y^k\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i} -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(\beta,y,\xi)\prod_{i=1}^{n}(\xi_i-x_i)^{r_i}d\xi. \qquad (13)$$

Очевидно, що

$$D_y^k\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}=$$

$$=\begin{cases} r_1!\cdot\ldots\cdot r_n!, & \text{якщо } \forall i\in\{1,...,n\}: k_i=r_i;\\ 0, & \text{якщо } \exists i\in\{1,...,n\}: k_i>r_i;\\ \prod\limits_{i=1}^{n} r_i(r_i-1)\ldots\,(r_i-k_i+1)(y_i-x_i)^{r_i-k_i}, & \\ & \text{якщо } \exists j\in\{1,...,n\}: k_j<r_j,\\ & \forall l\in\{1,...,n\}: k_l\le r_l.\end{cases}$$

Тому

$$\sum_{|k|\le 2b}A_k(\beta,y)D_y^k\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}=$$

$$=r_1!\cdot\ldots\cdot r_n!A_r(\beta,y)+J_r(\beta,y,x), \qquad (14)$$

де

$$J_r(\beta,y,x)\equiv\sum_{k\in\mathbb{Z}_r^n}A_k(\beta,y)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}r_i(r_i-1)...(r_i-k_i+1)(y_i-x_i)^{r_i-k_i},$$

$$\mathbb{Z}_r^n\equiv\Big\{k=(k_1,...,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n\ \Big|\ |k|\le 2b,$$

$$\exists j\in\{1,...,n\}: k_j<r_j,\ \ \forall l\in\{1,...,n\}: k_l\le r_l\Big\}.$$

З урахуванням (13) та (14) рівність (12) запишеться у вигляді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,y)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy=$$

$$=r_1!\cdot\ldots\cdot r_n!\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,y)A_r(\beta,y)dy+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,y)J_r(\beta,y,x)dy+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(\beta,y,\xi)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}(\xi_i-x_i)^{r_i}d\xi dy\equiv I_1+I_2+I_3. \qquad (15)$$

Оцінимо I_2, використовуючи оцінки (3) для ФМР Γ, обмеженість коефіцієнтів згідно з умовою (II) і те, що інтеграл типу $\int\limits_{\mathbb{R}^n}|z|^m e^{-c|z|^q}dz$ є збіжним:

$$|I_2(t,\tau,x)|\le C\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}}\times$$

$$\times\sum_{k\in\mathbb{Z}_r^n}|y-x|^{|r-k|}dy\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}_r^n}\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{\frac{|r-k|}{2b}}d\beta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}}\left(\frac{|y-x|}{(t-\beta)^{1/2b}}\right)^{|r-k|}dy\le$$

$$\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}_r^n}(t-\tau)^{\frac{|r-k|}{2b}+1},\quad t>\tau,\quad x\in\mathbb{R}^n. \qquad (16)$$

Для оцінки I_3 оцінимо спочатку внутрішній інтеграл, враховуючи нерівності (2):

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(\beta,y,\xi)\prod_{i=1}^{n}(\xi_i-x_i)^{r_i}d\xi\right|\le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(\beta,y,\xi)}}{\beta^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}}|\xi-x|^{|r|}d\xi\le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(\beta,y,\xi)}}{\beta^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}}\left(|\xi-y|+|y-x|\right)^{|r|}d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathcal{K}}\cdots+\int\limits_{\mathbb{R}^n/\mathcal{K}}\cdots\equiv M_1+M_2.$$

Тут ми скористалися нерівністю трикутника і розбили інтеграл на два інтеграли, де

$$\mathcal{K}=\{\xi\in\mathbb{R}^n:|\xi-y|\le|y-x|\}.$$

Тоді

$$M_1\le C_1|y-x|^{|r|}\beta^{-\frac{2b-\alpha}{2b}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(\beta,y,\xi)}}{\beta^{\frac{n}{2b}}}d\xi\le$$

$$\le C_1\beta^{-\frac{2b-\alpha}{2b}}|y-x|^{|r|},$$

$$M_2\le C_2\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(\beta,y,\xi)}}{\beta^{\frac{n}{2b}}}\left(\frac{|\xi-y|}{\beta^{\frac{1}{2b}}}\right)^{|r|}d\xi\beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}}\le$$

$$\leq C_2\beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}}.$$

Остаточно одержимо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(\beta,y,\xi)\prod_{i=1}^{n}(\xi_i-x_i)^{r_i}d\xi\right|\leq$$

$$\leq C_1\beta^{-\frac{2b-\alpha}{2b}}|y-x|^{|r|}+C_2\beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}},$$
$$x,y\in\mathbb{R}^n,\quad \tau<\beta<t.$$

З урахуванням даної нерівності інтеграл I_3 оціниться

$$|I_3(t,\tau,x)|\leq$$

$$\leq C_1\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}}\beta^{-\frac{2b-\alpha}{2b}}|y-x|^{|r|}dy+$$

$$+C_2\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}}\beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}}dy\leq$$

$$\leq C_1\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-\alpha}{2b}}}(t-\beta)^{\frac{|r|}{2b}}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}}\left(\frac{|y-x|}{(t-\beta)^{1/2b}}\right)^{|r|}dy+$$

$$+C_2\int\limits_{\tau}^{t}\beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}}dy\leq$$

$$\leq C_1(t-\tau)^{\frac{|r|}{2b}}\left(t^{\frac{\alpha}{2b}}-\tau^{\frac{\alpha}{2b}}\right)+C_2\left(t^{\frac{|r|+\alpha}{2b}}-\tau^{\frac{|r|+\alpha}{2b}}\right),\tag{17}$$
$$t>\tau,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

У результаті рівність (15), враховуючи (16) і (17), можна записати у вигляді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,y)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy=$$

$$=r_1!\cdot\ldots\cdot r_n!\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,y)A_r(\beta,y)dy+$$

$$+O\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_r^n}(t-\tau)^{\frac{|r-k|}{2b}+1}\right)+O\left((t-\tau)^{\frac{|r|}{2b}}(t^{\frac{\alpha}{2b}}-\tau^{\frac{\alpha}{2b}})\right)+$$

$$+O\left(t^{\frac{|r|+\alpha}{2b}}-\tau^{\frac{|r|+\alpha}{2b}}\right),\quad |r|=2b.$$

У випадку, коли $|r|<2b$, рівність (15) на основі нерівності (11) набере вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\tau,x,y)\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^{r_i}dy=$$

$$=r_1!\cdot\ldots\cdot r_n!\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,\beta,x,y)A_r(\beta,y)dy+$$

$$+O\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_r^n}(t-\tau)^{\frac{|r-k|}{2b}+1}\right)+$$

$$+O\left((t-\tau)^{\frac{|r|}{2b}}\left(t^{\frac{\alpha}{2b}+1}-\tau^{\frac{\alpha}{2b}+1}\right)\right)+$$

$$+O\left(t^{\frac{|r|+\alpha}{2b}+1}-\tau^{\frac{|r|+\alpha}{2b}+1}\right).$$

Поділивши обидві частини цих рівностей на $t-\tau$ і перейшовши до границі при $\tau\to t$, одержимо (10).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 444 с.

2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhâuser Verlag, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Advances and Applications. - Vol. 152.)

3. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні : монографія . - Чернівці, 2010. - 248 с.

4. *Данилюк А. О., Матійчук М. І.* Задача Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з оператором типу Фредгольма // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Серія: математика: зб. наук. праць. – Т.2, №1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – С. 16-23.

5. *Данилюк А. О.* Крайова задача для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними умовами // Укр. мат. журн. – 2008. – 60, №12. – С. 1610-1618.

6. *Слободецкий Л. Н.* О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы // Мат. сб. – 1958. – 46, №2. – С. 229 - 258.