УДК 517.946+511.37

©2013 р. В. С. Ільків, Н. І. Страп

Національний університет "Львівська політехніка"

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛОКАЛЬНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У ПРОСТОРАХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ-ТЕЙЛОРА

Встановлено умови однозначної розв'язності нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь з оператором диференціювання $B = (B_1, B_2, \dots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, у просторах функцій багатьох комплексних змінних, що є рядами Діріхле-Тейлора з фіксованим спектром. Доведено теореми метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач, з яких випливає їх однозначна розв'язність для майже всіх векторів, складених з коефіцієнтів рівнянь та параметрів крайових умов. Оцінки малих знаменників залежать від асимптотики спектру рядів Діріхле-Тейлора.

We establish solvability conditions of non-local boundary value problems for differential equations with the operator $B = (B_1, B_2, \dots, B_p)$, where $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, in the spaces of several complex variables functions, which are Dirichlet-Taylor series with fixed spectrum. Using a metric approach we prove theorems about lower estimations of small denominators, that arising in the construction of the solutions of these problems, which indicate their unique solvability for almost all vectors composed of equations coefficients and boundary conditions parameters. Estimations of small denominators depends on the asymptotic of Dirichlet-Taylor series spectrum.

1. Вступ. Дослідженню нелокальних крайових задач для різних типів диференціальних рівнянь з частинними похідними присвячено роботи багатьох дослідників, наприклад [2, 4, 5, 6, 12]. Це зумовлено різними причинами, серед яких, насамперед, побудова загальної теорії крайових задач та практичне використання цих задач, як моделей різних фізичних процесів (коливання систем, поширення електромагнітних хвиль та ін.). Однак нелокальні задачі є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків. Такі задачі, за допомогою метричного підходу до оцінювання малих знаменників, розглядалися у дійсній області, наприклад, у роботах [1, 4, 11].

У даній статті досліджено нелокальні крайові задачі для однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь з оператором диференціювання $B = (B_1, B_2, \dots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, який діє на функції просторових комплексних змінних $(z_1, \dots, z_p)$. Особливістю цієї роботи є встановлення умов однозначної розв'язності даних задач у класі функцій багатьох комплексних змінних. Доведено теореми метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач, з яких випливає їх однозначна розв'язність у просторах функцій, що є рядами Діріхле-Тейлора з заданим спектром, для майже всіх векторів, компоненти яких виражаються через коефіцієнти рівнянь та параметри крайових умов. Частинний випадок даних задач з цілочисловим спектром досліджено у роботі [9]; особливості випадку $p = 1$ встановлено у роботі [10].

2. Введення просторів та основних позначень. Введемо наступні позначення: $\mathcal{S}$ однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, тобто $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathcal{D}^p$ — циліндрична область $[0, T] \times \mathcal{S}^p$, де

$T>0$, $p \geq 2$.

Введемо множину

$$\mathcal{N} = \{\nu_k = (\nu_{k1}, \ldots, \nu_{kp}) \in \mathbb{R}^p : k \in \mathbb{Z}^p\},$$

яку будемо використовувати при означенні просторів і називати спектром функції. На елементи множини $\mathcal{N}$ накладемо наступні умови:

i) при $k \neq r$ виконується нерівність $\nu_k \neq \nu_r$, тобто відображення $k \mapsto \nu_k$ є бієктивним відображенням $\mathbb{Z}^p$ на множину $\mathcal{N}$;

ii) $\tilde{\nu}_k \to \infty$ при $k \to \infty$, де

$$\tilde{\nu}_k = \sqrt{1 + \nu_{k1}^2 + \ldots + \nu_{kp}^2}.$$

Нехай $\mathbf{W}\mathcal{N}$ — лінійний простір кратних скінченних сум (основних функцій) вигляду

$$P(z) = \sum_k P_k z^{\nu_k} = \\ = \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_p} P_{k_1,\ldots,k_p} z_1^{\nu_{k1}} \ldots z_p^{\nu_{kp}},$$

де $z=(z_1, \ldots, z_p) \in \mathcal{S}^p$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k=(k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $z^{\nu_k}=z_1^{\nu_{k1}} \ldots z_p^{\nu_{kp}}$.

Простір $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ спряжений з простором $\mathbf{W}\mathcal{N}$; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів), які є формальними рядами $Q(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} Q_k z^{\nu_k}$, що діють на основну функцію $P \in \mathbf{W}\mathcal{N}$ за правилом $\langle P, Q \rangle = \sum\limits_k Q_k \overline{P}_k$. У випадку $\nu_{k_j} < 0$, $j = 1, \ldots, p$, ряди $Q(z)$ називають рядами Діріхле-Тейлора.

Позначимо $\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, — гільбертів простір функцій $\psi(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \psi_k z^{\nu_k}$ зі спектром $\mathcal{N}$ із заданим скалярним добутком

$$(\psi, \varphi)_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{\nu}_k^{2q} \psi_k \overline{\varphi}_k,$$

і нехай $\|\psi\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)} = (\psi, \psi)_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)}$; а $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, — банахів простір функцій $u = u(t, z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}$, де $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t) z^{\nu_k}$, $r = 0, 1, \ldots, n$, для кожного $t \in [0, T]$ належать до просторів $\mathbf{H}\mathcal{N}_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ відповідно і неперервні за t у цих просторах. Квадрат норми у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$ дає формула:

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^n \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t, \cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_{q-r}(\mathcal{S}^p)}.$$

У просторі $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ запровадимо оператори $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, узагальненого диференціювання, зокрема $B_j(z^{\nu_k}) = \nu_{k_j} z^{\nu_k}$, а також степені даних операторів

$$B_j^0 u \equiv u, \; B_j^l u = B_j(B_j^{l-1} u), \; l = 1, \ldots, n.$$

З узагальнених операторів B_1, …, B_p складемо оператор $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$ і позначимо $B^s = B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}$.

Позначимо область $\mathcal{O}_R$ — круг радіуса R із центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$ та параметр $\mu \in \mathbb{C}$.

3. Постановка задачі та умови розв'язності. В області $\mathcal{D}^p$ розглянемо задачу з двоточковими неоднорідними нелокальними умовами для однорідного диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, B\Big) u = \sum_{s_0 + |s| \leq n} a_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \quad (1)$$

$$M_m u = \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad (2)$$

де $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s|=s_1 + \ldots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, u — шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ — задані функції.

Дослідимо питання однозначної розв'язності задачі (1), (2) у класі функцій зі спектром $\mathcal{N}$, а саме у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$. Якщо $u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$ і $u = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) z^{\nu_k}$, то $B_j u = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \nu_{k_j} u_k(t) z^{\nu_k}$, тому

$$B_j u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{q-1}^n(\mathcal{D}^p), \quad j = 1, \ldots, p.$$

Аналогічно, справедливими є включення

$$B^s u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{q-|s|}^n(\mathcal{D}^p),$$

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, B\Big) u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{q-n}^0(\mathcal{D}^p),$$

$$M_m u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{q-m}(\mathcal{S}^p),$$

де $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоді з необхідністю фукнції $\varphi_m \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{q-m}(\mathcal{S}^p)$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, і їх розвинення у ряди Фур'є мають вигляд $\varphi_m(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{mk} z^{\nu_k}$.

Вважаємо, що коефіцієнти $a_{s_0,s}$ рівняння (1) розглядаються у крузі $\mathcal{O}_A$, параметр μ з умов (2) — у крузі $\mathcal{O}_M$, де A та M — додатні фіксовані числа. Комплексний простір $\mathbb{C}$ ототожнюємо з дійсним простором $\mathbb{R}^2$ з мірою Лебега у ньому.

Нехай для кожного вектора

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_p) \in \mathbb{R}^p$$

число $\tilde{\nu}$ і функцію $\zeta_{\mathcal{N}}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначають відповідно формули

$$\tilde{\nu} = \sqrt{1 + \nu_1^2 + \ldots + \nu_p^2},$$

$$\zeta_{\mathcal{N}}(x) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} \tilde{\nu}^{-x}.$$

Очевидно, що для $x \le 0$ ряд $\sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}} \tilde{\nu}^{-x}$ є розбіжним. Припустимо, що $\zeta_{\mathcal{N}}(\theta) < \infty$ для деякого $\theta > 0$, тоді $\zeta_{\mathcal{N}}(x) < \zeta_{\mathcal{N}}(\theta) < \infty$ для всіх $x \ge \theta$, тобто $\zeta_{\mathcal{N}}$ існує на інтервалі $[\theta, \infty)$.

Число θ задає асимптотику спектру $\mathcal{N}$, а саме швидкість зростання послідовності ν_k при $k\to\infty$. Зокрема, у випадку $\nu_k = k$ функція $\zeta_{\mathcal{N}}(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-x}$ існує для кожного $x \ge \theta > p$. В іншому випадку, коли $\nu_k = (k_1^{\alpha_1}, \ldots, k_p^{\alpha_p})$, де $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_p > 0$, функція

$$\zeta_{\mathcal{N}}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} (1 + k_1^{2\alpha_1} + \ldots + k_p^{2\alpha_p})^{-x/2}$$

існує для кожного $x \ge \theta > p/\alpha$, тобто на інтервалі $(p/\alpha, \infty)$, де $\alpha = \min\limits_{1\le i\le p}\{\alpha_i\}$. Отже, граничне значення для числа θ залежить від розмірності області D^p (пряма залежність) та швидкості зростання спектру $\mathcal{N}$ (обернена залежність).

Означення. Під *розв'язком* задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u = u(t, z)$ із значеннями $u(t, \cdot)$ у просторі $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ для кожного $t \in [0, T]$, яка задовольняє рівняння (1) і умови (2) та належить до простору $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u(t, z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) z^{\nu_k}, \tag{3}$$

де ν_k належить спектру $\mathcal{N}$, а $u_k(t)$ — невідомі функції, які потрібно визначити.

Запишемо оператор $L\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}, B\Big)$ з рівняння (1) у вигляді такої суми:

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, B\Big) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} b_j(B) \frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}},$$

де для кожного $j = 1, \ldots, n$ коефіцієнти $b_j(B)$ є многочленами від оператора B

$$b_j(B) = \sum_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s} B^s =$$

$$= \sum_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s_1,\ldots,s_p} B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}.$$

Функція $u_k = u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, з формули (3) є класичним розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння

$$u_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} b_j(\nu_k) u_k^{(n-j)} = 0, \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(m)}\big|_{t=0} - u_k^{(m)}\big|_{t=T} = \varphi_{mk}, \tag{5}$$

де $m = 0, 1, \ldots, n-1$, і для кожного $\nu \in \mathbb{R}^p$

$$b_j(\nu) = \sum_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s} \nu^s = \sum_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s_1,\ldots,s_p} \nu_1^{s_1} \ldots \nu_p^{s_p}.$$

Для побудови розв'язку задачі (4), (5) пронормуємо коефіцієнти $b_j(\nu)$, $j = 1, \ldots, n$, рівняння (4), подаючи їх у вигляді

$$b_j(\nu) = \tilde{\nu}^j \tilde{b}_j(\nu).$$

Оскільки коефіцієнти $b_j(\nu)$ лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,s}$, які у рівнянні (1) є коефіцієнтами при $B^s \dfrac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}}$, $|s| \le j$, то і величини $\tilde{b}_j(\nu)$ також лінійно залежать від

$a_{n-j,s}$ і рівномірно обмежені за ν, j і $a_{s_0,s}$. Тоді для $\tilde{b}_j(\nu)$ можна записати нерівність

$$|\tilde{b}_j(\nu)| \leq \max_{|s|\leq j} |a_{n-j,s}| \frac{1}{\tilde{\nu}^j} \sum_{|s|=0}^{j} |\nu^s| \leq$$

$$\leq A \sum_{\sigma=0}^{j} \frac{1}{\tilde{\nu}^{j-\sigma}} \sum_{|s|=\sigma} \prod_{l=1}^{p} \left(\frac{|\nu_l|}{\tilde{\nu}}\right)^{s_l} \leq$$

$$\leq A \sum_{\sigma=0}^{j} \tilde{\nu}^{\sigma-j} \sum_{|s|=\sigma} 1 = A \sum_{\sigma=0}^{j} \tilde{\nu}^{\sigma-j} C_{\sigma+p-1}^{\sigma} \leq A C_{p+j}^{j}.$$

Числа $\lambda_1 = \lambda_1(\nu), \ldots, \lambda_n = \lambda_n(\nu)$ є коренями многочлена

$$P_\nu(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j(\nu)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(\nu) \lambda^{n-j}.$$

Для них виконуються такі нерівності [13]:

$$|\lambda_j(\nu)| \leq 1 + \max\{|\tilde{b}_1(\nu)|, \ldots, |\tilde{b}_n(\nu)|\} < \\ < A_1 = 1 + C_{p+n}^{n} A. \quad (6)$$

Числа $\gamma_j(\nu) = \tilde{\nu}\lambda_j(\nu)$ є коренями характеристичного рівняння

$$\gamma^n + b_1(\nu)\gamma^{n-1} + \ldots + b_n(\nu) = 0$$

для диференціального рівняння (4).

Позначимо через $\mathcal{N}_\Delta$ множину тих векторів $\nu \in \mathcal{N}$, при яких многочлен $P_\nu(\lambda)$ має кратні корені, а відповідну множину векторів k — через K_Δ. У випадку різних коренів $\lambda_1(\nu), \ldots, \lambda_n(\nu)$, тобто $\nu \in \mathcal{N} \backslash \mathcal{N}_\Delta$, загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} C_{kl} e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) t}, \qquad k \in K \setminus K_\Delta, \quad (7)$$

де C_{kl} — довільні комплексні сталі.

Якщо $u_k(t)$ є розв'язком задачі (4), (5), то

$$\tilde{C}_{kl} = (\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) T}) C_{kl}, \; l = 1, \ldots, n,$$

утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1(\nu_k) & \lambda_2(\nu_k) & \ldots & \lambda_n(\nu_k) \\ \lambda_1^2(\nu_k) & \lambda_2^2(\nu_k) & \ldots & \lambda_n^2(\nu_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1}(\nu_k) & \lambda_2^{n-1}(\nu_k) & \ldots & \lambda_n^{n-1}(\nu_k) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \tilde{C}_{k1} \\ \tilde{C}_{k2} \\ \tilde{C}_{k3} \\ \ldots \\ \tilde{C}_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k}/\tilde{\nu}_k \\ \varphi_{2k}/\tilde{\nu}_k^2 \\ \ldots \\ \varphi_{n-1,k}/\tilde{\nu}_k^{n-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

з невиродженою матрицею Вандермонда $\left(\lambda_j^{\alpha-1}(\nu_k)\right)_{j,\alpha=1}^{n}$ і навпаки, якщо числа $\tilde{C}_{k1}$, $\tilde{C}_{k2}$, ..., $\tilde{C}_{kn}$ утворюють розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначається формулою (7), в якій $C_{kl} = \tilde{C}_{kl}/(\mu - e^{\tilde{\nu}_k \lambda_l(\nu_k) T})$, є розв'язком задачі (4), (5).

Розв'язуючи систему (8) за правилом Крамера, одержуємо

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(\nu_k)}{\Delta(\nu_k)} \tilde{\nu}_k^{-j} \varphi_{jk}, \qquad l = 1, \ldots, n,$$

де $\Delta(\nu) = \prod_{1 \leq r < q \leq n} (\lambda_q(\nu) - \lambda_r(\nu)) \neq 0$ — визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(\nu)$ — його відповідні алгебричні доповнення.

Для того, щоб для кожного $\nu \in \mathcal{N} \backslash \mathcal{N}_\Delta$ задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\mu \notin \{e^{\tilde{\nu}\lambda_1(\nu)T}, \ldots, e^{\tilde{\nu}\lambda_n(\nu)T}\}.$$

З цієї умови випливає, що

$$\ln \mu \neq \tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T + i2\pi m,$$

або $\lambda_l(\nu) \neq \dfrac{\ln \mu - i2\pi m}{\tilde{\nu}T}$, для довільних $\nu \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_\Delta$, $m \in \mathbb{Z}$ і $l = 1, \ldots, n$.

У протилежному випадку, коли $\mu = e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$ для деяких k та l, існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_l(\nu)$ визначається за формулою

$$\lambda_l(\nu) = \frac{\ln \mu - i2\pi m}{\tilde{\nu}T}.$$

Тому виконується рівність

$$\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{\nu}^n}+\sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(\nu)\frac{(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}}{T^n\tilde{\nu}^n}=0$$

чи еквівалентна їй рівність при $\nu \in \mathcal{N}$

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n+\sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(\nu)T^j(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}=0. \tag{9}$$

У випадку кратних коренів загальний розв'язок рівняння (4) також буде мати вигляд (7), але замість коефіцієнтів C_{kl} будуть многочлени $C_{kl}(t)$ степеня на одиницю меншого від кратності кореня $\lambda_l(\nu)$. Тому розв'язність на множині $\mathbb{Z}\times\mathcal{N}$ рівняння (9) є умовою не єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$ і для цього випадку.

Сформулюємо теорему про єдиність розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (9) *не мало розв'язків на множині* $\mathbb{Z}\times\mathcal{N}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathrm{C}^n[0,T]$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ має єдиний розв'язок. Отже,

$$\Delta\cdot\prod_{l=1}^{n}(\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T})\neq 0$$

при $\nu\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_\Delta$, тобто $\mu\neq e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$ при $l=1,\ldots,n$. Таким чином, рівняння (9) не має розв'язків на множині $\mathbb{Z}\times\mathcal{N}$. Аналогічні нерівності отримуємо при $\nu\in\mathcal{N}_\Delta$.

Достатність. Доведемо методом від супротивного. Нехай пара (m^*,ν_{k^*}) є розв'язком рівняння (9) на множині $\mathbb{Z}\times\mathcal{N}$. Тоді, вважаючи $\lambda_1(\nu_{k^*})=\dfrac{\ln\mu - i2\pi m^*}{\tilde{\nu}_{k^*}T}$, де $\nu_{k^*}=(\nu_{k^*1},\ldots,\nu_{k^*p})$, однорідна задача (4), (5) має розв'язок $e^{\tilde{\nu}_{k^*}\lambda_1(\nu_{k^*})T}=e^{(\ln\mu-i2\pi m^*)t/T}$. Отже, звідси випливає, що задача (1), (2) у просторі $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ має неєдиний розв'язок, оскільки функції

$$u^*(t,z)=C_0 z^{\nu_{k^*}}e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T},$$

де C_0 — довільна комплексна стала, є розв'язками відповідної однорідної задачі.

Теорему доведено.

В умовах теореми 1 для довільного $k\in\mathbb{Z}^p$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує, при $k\in\mathbb{Z}^p\setminus K_\Delta$ має такий вигляд:

$$u_k(t)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(\nu_k)}{\Delta(\nu_k)}\frac{e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)T}}\tilde{\nu}_k^{-j}\varphi_{jk}, \tag{10}$$

і оцінюється разом зі своїми похідними порядку $r=0,1,\ldots,n$

$$|u_k^{(r)}(t)|^2\le n^3\frac{1}{|\Delta(\nu_k)|^2}\max_{j,l}|\Delta_{jl}(\nu_k)|^2\times$$
$$\times|\lambda_l(\nu_k)|^{2r}\max_{1<l<n}\left|\frac{e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)T}}\right|^2\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{\nu}_k^{r-j}\varphi_{jk}|^2.$$

На основі формул (3) і (10) отримаємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) з простору $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$ у вигляді ряду

$$u(t,z)=\sum_{k\in K_\Delta}u_k(t)z^{\nu_k}+$$
$$+\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K_\Delta}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(\nu_k)}{\Delta(\nu_k)}\frac{e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_l(\nu_k)T}}\tilde{\nu}_k^{-j}\varphi_{jk}z^{\nu_k} \tag{11}$$

Оскільки $\Delta_{jl}(\nu)$ — визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1(\nu),\ldots,\lambda_n(\nu)$, то з нерівності (6) для довільних $\nu\in\mathbb{R}^p$ маємо оцінку

$$|\Delta_{jl}(\nu)|<(n-1)!A_1^{n(n-1)/2}. \tag{12}$$

Сформулюємо і доведемо теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 2. *Нехай задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок у просторі* $\mathbf{W}\mathcal{N}'$, *тобто справджуються умови теореми* 1, *та для деяких дійсних чисел* η_1, η_2 *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $\nu\in\mathcal{N}$ *виконуються нерівності*

$$|\Delta(\nu)|\ge\tilde{\nu}^{-\eta_1}, \tag{13}$$

$$\left|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\right| \leq \tilde{\nu}^{\eta_2}, \quad l = 1, \ldots, n. \qquad (14)$$

Якщо $\varphi_0 \in \mathbf{H}\mathcal{N}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$, *де* $\psi = q + \eta_1 + \eta_2$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від функцій* φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_{n-1}.

Доведення. З умов теореми випливає, що для всіх $\nu \in \mathcal{N}$ виконується оцінка

$$\left|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\right| \leq C_1\tilde{\nu}^{\eta_2}$$

для кожного $l = 1, \ldots, n$, де C_1 — додатня стала, і для всіх $\nu \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_\Delta$ справджується нерівність (13). Тоді для всіх векторів з множини $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_\Delta$ для кожного $r = 0, 1, \ldots, n$ справедливі нерівності

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq C_2|\tilde{\nu}_k|^{2\eta_1+2\eta_2}\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{\nu}_k^{r-j}\varphi_{jk}|^2, \quad (15)$$

де $C_2 = n^3A_1^{n(n-1)+2r}\big((n-1)!\big)^2$, $t \in [0, T]$. Нерівності (15) отримано на основі оцінок (12)—(14).

Оскільки за умовою теореми протилежна до (13) оцінка $|\Delta(\nu)| < \tilde{\nu}^{-\eta_1}$ виконується для скінченного числа векторів ν, то множина K_Δ, як її підмножина, також є скінченною. Тому з оцінки (15) одержимо нерівність

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)} \leq C_3\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-j}(\mathcal{S}^p)},$$

де $C_3 > 0$ — величина, яка залежить від коефіцієнтів рівняння (1). З отриманої нерівності випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Розглянемо умови, при яких виконується нерівність (13). Для цього подамо ліву частину $Lu = L\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}, B\Big)u$ рівняння (1) у вигляді

$$Lu = a_{0,n,0,\ldots,0}B_1^n u + \ldots + a_{0,0,\ldots,n}B_p^n u + L_1 u$$

і вивчатимемо нерівність (13) у залежності від вектора $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n}) \in \mathcal{O}^p_A$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}^{2p}$*) векторів* $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n})$ *з множини* $\mathcal{O}^p_A$ *нерівність* (13) *виконується при*

$$\eta_1 > (n-1)\theta/2$$

для всіх (крім скінченного числа) векторів $\nu \in \mathcal{N}$.

Доведення. Величина

$$\Delta^2(\nu) = \prod_{1\leq r<q\leq n}(\lambda_q(\nu) - \lambda_r(\nu))^2$$

є дискримінантом $D(\nu)$ полінома $P_\nu(\lambda)$, який визначається за коефіцієнтами цього полінома [3]:

$$D(\nu) = (-1)^{n(n-1)/2}\left|\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}\right|, \qquad (16)$$

де $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ — квадратна матриця, яка складається з блоків $V_1 = \big(v^1_{i-j}(\nu)\big)$ і $V_2 = \big(v^2_{i-j}(\nu)\big)$ з $n-1$ і n рядками відповідно, де

$$v^1_{i-j}(\nu) = \begin{cases} \tilde{b}_{i-j}(\nu), & j \leq i \leq j+n; \\ 0, & i < j, \ \ i > j+n \end{cases},$$

$$v^2_{i-j}(\nu) = \begin{cases} (n-i+j)\tilde{b}_{i-j}(\nu), & j \leq i \leq j+n; \\ 0, & i<j, \ \ i>j+n. \end{cases}$$

Доведемо, що для майже всіх векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n})$, які належать до множини $\mathcal{O}^p_A \subset \mathbb{R}^{2p}$, за досить великих $\tilde{\nu}$ справджується оцінка:

$$|\mathrm{Re}\, D(\nu_k)| \geq \tilde{\nu}^{-2\eta_1}. \qquad (17)$$

Позначимо через $\mathrm{E}\mathcal{N}$ множину векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n})$, для яких протилежна до (17) нерівність

$$|\mathrm{Re}\, D(\nu)| < \tilde{\nu}^{-2\eta_1} \qquad (18)$$

виконується для безлічі векторів зі спектру $\mathcal{N}$, а через $\mathrm{E}\mathcal{N}_\nu$ — множину тих векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n})$, для яких нерівність (18) правильна при фіксованому $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_p) \in \mathcal{N}$. Не порушуючи загальності вважатимемо, що $|\nu_1| = \max\limits_{1\leq i\leq p}|\nu_i|$. Коефіцієнт $a_{0,n,0,\ldots,0}$ позначимо через $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, де α_1 — дійсна, а α_2 — уявна частини α. Із (16) видно, що

$$D(\nu) = (-1)^{n(n-1)}n^n\tilde{b}_n^{n-1}(\nu) + F_\nu =$$
$$= (-1)^{n(n-1)}n^n\Big(\frac{\nu_1}{\tilde{\nu}}\alpha + \ldots\Big)^{n-1} + F_\nu, \quad \tilde{\nu} \neq 1,$$

звідки

$$\operatorname{Re} D(\nu)=(-1)^{n(n-1)}n^n(\operatorname{Re}\tilde{b}_n(\nu))^{n-1}+F_{1\nu}= \\ =(-1)^{n(n-1)}n^n\Big(\frac{\nu_1}{\tilde{\nu}}\Big)^{n-1}\alpha_1^{n-1}+\tilde{F}_{1\nu},$$

де F_ν містить степені $\tilde{b}_n(\tilde{\nu})$ менші за $n-1$, $F_{1\nu}$ містить степені $\operatorname{Re}\tilde{b}_n(\tilde{\nu})$ менші за $n-1$, а $\tilde{F}_{1\nu}$ містить степені α_1 менші за $n-1$. Знайдемо міру $\operatorname{meas} \mathrm{E}\mathcal{N}_\nu^1$ множини $\mathrm{E}\mathcal{N}_\nu^1 \subset \mathrm{E}\mathcal{N}_\nu$, для якої фіксованими є всі, крім α_1, дійсні та уявні частини компонент вектора $(a_{0,n,0,\dots,0},\dots,a_{0,0,\dots,n})$. Оскільки виконується нерівність:

$$\left|\frac{\partial^{n-1}\operatorname{Re} D(\nu)}{\partial\alpha_1^{n-1}}\right| = n^n(n-1)!\Big(\frac{|\nu_1|}{\tilde{\nu}}\Big)^{n(n-1)} \geq C_4,$$

де $C_4 = n^n(n-1)!(p+1)^{-\frac{n(n-1)}{2}}$, то за лемою з [1] справджується оцінка

$$\operatorname{meas} \mathrm{E}\mathcal{N}_\nu^1 \leq \min\Big\{2\sqrt{A^2-\alpha_2^2}, \\ C_5(n)\Big(\frac{1}{C_4}\tilde{\nu}^{-2\eta_1}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big\},$$

де $C_5(n)=2n$ [8]. Інтегруючи останню оцінку в області $[-A,A]\times\mathcal{O}_A^{p-1}$, отримаємо

$$\operatorname{meas} \mathrm{E}\mathcal{N}_\nu \leq C_6\tilde{\nu}^{-\frac{2\eta_1}{n-1}},\ C_6 = C_6(n,p) > 0.$$

Дана оцінка справджується для всіх елементів $\nu\in\mathcal{N}$. Оскільки

$$\operatorname{meas} \mathrm{E}\mathcal{N} \leq \sum_{\nu\in\mathcal{N}} \operatorname{meas} \mathrm{E}\mathcal{N}_\nu \leq \\ \leq C_6\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\tilde{\nu}^{-\frac{2\eta_1}{n-1}} = C_6\zeta_{\mathcal{N}}\Big(\frac{2\eta_1}{n-1}\Big)$$

і $\dfrac{2\eta_1}{n-1} > \theta$, то $\operatorname{meas} \mathrm{E}\mathcal{N} \leq C_6\zeta_{\mathcal{N}}(\theta) < \infty$. Отже, згідно з лемою Бореля-Кантеллі [12] міра множини $\mathrm{E}\mathcal{N}$ дорівнює нулеві.

Якщо вектор $(a_{0,n,0,\dots,0},\dots,a_{0,0,\dots,n}) \notin \mathrm{E}\mathcal{N}$, то з формули (17) і нерівності

$$|D(\nu)| \geq |\operatorname{Re} D(\nu)|$$

отримаємо, що оцінка (13) при

$$\eta_1 > (n-1)\theta/2$$

виконується для всіх векторів $\nu\in\mathcal{N}$ (крім скінченного їх числа, яке залежить від вектора коефіцієнтів $a_{s_0,s}$).

Теорему доведено.

Розглянемо умови виконання нерівності (14), для чого скористаємося методикою з [7]. Позначимо

$$\rho_\nu(\lambda(\nu),t) = \frac{e^{\tilde{\nu}\lambda t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda T}},$$

тоді дроби з (14) дорівнюватимуть $\rho_\nu(\lambda_l(\nu),t)$, де $l = 1,\dots,n$. Послідовність знаменників функції $\rho_\nu(\lambda_l(\nu),t)$ може мати збіжні до нуля підпослідовності, тобто містити малі знаменники. Для оцінювання величини $\rho_\nu(\lambda_l(\nu),t)$, як функції ν, побудуємо виняткові множини малої міри на комплексній площині для параметра μ, використання яких є варіантом метричного підходу до оцінювання малих знаменників [11].

Виберемо додатні числа η_2 та χ_ν з умов

$$\eta_2 > \theta/2, \qquad \chi_\nu^2 32nT^2\zeta_{\mathcal{N}}(2\eta_2) = \pi.$$

Нехай $\varepsilon < 1$ і, додатково, $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi_\nu T)$ якщо $n = 1$; тоді для $n > 1$ виконується наступна нерівність:

$$\ln 2/(2\chi_\nu T) = \ln 2\sqrt{8n\zeta_{\mathcal{N}}(2\eta_2)/\pi} \geq \\ \geq \sqrt{8n/\pi}/2 = \sqrt{2n/\pi} > 1,$$

тобто також $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi_\nu T)$.
Позначимо $\chi_{1\nu}=\sqrt{\varepsilon}\chi_\nu\tilde{\nu}^{-\eta_2}$, $\mu_{l\nu}(\lambda)=e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$, і $\mu_\nu(\lambda)=e^{\tilde{\nu}\lambda T}$. Враховуючи дані позначення, отримаємо, що

$$\rho_\nu(\lambda(\nu),t) = \frac{e^{\tilde{\nu}\lambda t}}{\mu - \mu_\nu(\lambda)}.$$

Виберемо множини $\mathrm{V}\mathcal{N}_l(\nu)$ для тих $l = 1,\dots,n$ та $\nu\in\mathcal{N}$, що задовольняють умову $|\mu_{l\nu}(\lambda)|<2M$ за наступною формулою:

$$\mathrm{V}\mathcal{N}_l(\nu) = \Big\{\lambda\in\mathbb{C} : |\operatorname{Re}(\lambda-\lambda_l(\nu))| < \frac{\chi_{1\nu}}{2}, \\ |\operatorname{Im}(\lambda-\lambda_l(\nu))| < \frac{\chi_{1\nu}}{2}\Big\}.$$

Кожна множина $\mathrm{V}\mathcal{N}_l(\nu)$ — це квадрат (рис. 1) зі стороною $\chi_{1\nu}$, центром $\lambda_l(\nu)$ і вершинами M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} у комплексній площині змінної λ. Точки M^{--}, M^{-+}, Множина $V\mathcal{N}_{l,r}(\nu)$ є частиною кільця

$$\left\{\mu \in \mathbb{C} : e^{-\chi_{1\nu}2^{1-r}T} \le \left|\frac{\mu}{\mu_{l\nu}(\lambda)}\right| \le e^{\chi_{1\nu}2^{1-r}T}\right\},$$

яку видно з початку координат під кутом $\chi_{1\nu}2^{1-r}T$ (див. рис. 2).

$2\chi_{1\nu}$

$2\chi_{1\nu}$

$\operatorname{Re}\lambda$

$\operatorname{Re}\mu$

Рис. 1. Концентричні квадрати з центром у точці $\lambda_l(\nu)$: квадрат $V\mathcal{N}_l(\nu)$ зі стороною $\chi_{1\nu}$ та квадрат із стороною $2\chi_{1\nu}$. Виділено множину, яка є різницею цих квадратів.

M^+, M^+ зображають комплексні числа $\lambda_l(\nu)+(1+i)\chi_{1\nu}/2$, $\lambda_l(\nu)-(1-i)\chi_{1\nu}/2$, $\lambda_l(\nu)+(1-i)\chi_{1\nu}/2$ відповідно.

Нехай множина

$$V\mathcal{N}_{l,2}(\nu)=\left\{\mu\in\mathbb{C}: e^{-\chi_{1\nu}T/2}\le\left|\frac{\mu}{\mu_{l\nu}(\lambda)}\right|\le e^{\chi_{1\nu}T/2}, \left|\arg\frac{\mu}{\mu_{l\nu}(\lambda)}\right|\le\chi_{1\nu}T/2\right\}$$

є образом квадрата $V\mathcal{N}_l(\nu)$ при відображенні $\lambda \to e^{\lambda T}$, а множина $V\mathcal{N}_{l,1}(\nu)$ є образом концентричного до $V\mathcal{N}_l(\nu)$ квадрата зі стороною $2\chi_{1\nu}$, тобто її можна задати за допомогою формули

$$V\mathcal{N}_{l,1}(\nu)=\left\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_{1\nu}T}\le\left|\frac{\mu}{\mu_{l\nu}(\lambda)}\right|\le e^{\chi_{1\nu}T}, \left|\arg\frac{\mu}{\mu_{l\nu}(\lambda)}\right|\le\chi_{1\nu}T\right\},$$

Об'єднаємо виняткові множини $V\mathcal{N}_{l,1}(\nu)$ в одну виняткову множину

$$V\mathcal{N}_\varepsilon = \bigcup_{\substack{\nu\in\mathcal{N};\\ |\mu_{l\nu}(\lambda)|\le 2M}} \bigcup_{l=1}^{n} V\mathcal{N}_{l,1}(\nu) \qquad (19)$$

і знайдемо оцінку її міри:

$$\operatorname{meas} V\mathcal{N}_\varepsilon = \sum_{\substack{\nu\in\mathcal{N};\\ |\mu_{l\nu}(\lambda)|\le 2M}} \sum_{l=1}^{n} \operatorname{meas} V\mathcal{N}_{l,1}(\nu) \le \le 32(TM)^2 \sum_{\nu\in\mathcal{N}} \chi_{1\nu}^2.$$

Враховуючи позначення $\chi_{1\nu}$ та χ_ν, отримуємо нерівність

$$\operatorname{meas} V\mathcal{N}_\varepsilon \le 32nT^2\zeta_{\mathcal{N}}(2\eta_2)\chi_\nu^2\varepsilon M^2 = = \varepsilon\pi M^2 = \varepsilon \operatorname{meas}\mathcal{O}_M. \qquad (20)$$

Параметр μ вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$. Враховуючи формулу (20), для міри множини $\mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$ запишемо наступну оцінку:

$$\operatorname{meas}(\mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon) \ge (1-\varepsilon)\operatorname{meas}\mathcal{O}_M.$$

Теорема 4. *Якщо $\eta_2 > \theta/2$, то для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$ функція $\rho_\nu(\lambda(\nu),t)$ в області $V\mathcal{N}_l(\nu)\times[0,T]$ має оцінку зверху*

$$|\rho_\nu(\lambda(\nu),t)| \le \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{\nu}^{\eta_2}, \qquad (21)$$

де $\tau = 8\max\{2, 1/|\mu|\}\sqrt{2\pi n\zeta_{\mathcal{N}}(2\eta_2)}$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $|\mu_{l\nu}(\lambda)| \ge 2M$. У кожному квадраті $V\mathcal{N}_l(\nu)$ виконуються нерівності

$$|\mu_{l\nu}(\lambda)|e^{-\chi_{1\nu}T/2} \le |\mu_\nu(\lambda)| \le |\mu_{l\nu}(\lambda)|e^{\chi_{1\nu}T/2},$$

де $e^{2\chi_{1\nu}T}=e^{2\sqrt{\varepsilon}\chi_\nu T\tilde{\nu}^{-\eta_2}}<e^{\tilde{\nu}^{-\eta_2}\ln 2}=2^{\tilde{\nu}^{-\eta_2}}\le 2$, тоді

$$3M/2 < 2^{3/4}M \le 2^{-1/4}|\mu_{l\nu}(\lambda)| \le \le |\mu_\nu(\lambda)| \le 2^{1/4}|\mu_{l\nu}(\lambda)|.$$

Далі отримуємо

$$|\rho_\nu(\lambda(\nu),t)| = \left|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda(\nu)T\frac{t}{T}}}{\mu-\mu_\nu(\lambda)}\right| = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu_\nu(\lambda)|} = = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu_\nu(\lambda)||\mu/\mu_\nu(\lambda)-1|} = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}-1}}{|\mu/\mu_\nu(\lambda)-1|} \le \le 3\max\left\{1, \frac{1}{|\mu_\nu(\lambda)|}\right\} \le \max\left\{3, \frac{3}{|\mu_\nu(\lambda)|}\right\} < < \max\left\{3, \frac{2}{M}\right\},$$

а також, враховуючи, що $\dfrac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} > 1$,

$$|\rho_\nu(\lambda(\nu),t)| < \frac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}\max\left\{3, \frac{2}{M}\right\}. \qquad (22)$$

Розглянемо випадок $|\mu_{l\nu}(\lambda)|<2M$, тоді для $\mu_\nu(\lambda)$ маємо три можливості: $|\mu_\nu(\lambda)|\le\dfrac{|\mu|}{2}$, $|\mu_\nu(\lambda)|\ge 2|\mu|$ і $\dfrac{|\mu|}{2}<|\mu_\nu(\lambda)|<2|\mu|$.

Нехай $|\mu_\nu(\lambda)|\le\dfrac{|\mu|}{2}$, тоді $|\mu-\mu_\nu(\lambda)|\ge\dfrac{|\mu|}{2}$ і

$$|\rho_\nu(\lambda(\nu),t)| = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu_\nu(\lambda)|} \le \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu|/2} = = \frac{2|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu|} \le \frac{2}{|\mu|}\max\{1, |\mu_\nu(\lambda)|\} \le \le \frac{2}{|\mu|}\max\left\{1, \frac{|\mu|}{2}\right\} = \max\left\{1, \frac{2}{|\mu|}\right\},$$

а також

$$|\rho_\nu(\lambda(\nu),t)| \le \frac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}\max\left\{1, \frac{2}{|\mu|}\right\}. \qquad (23)$$

Нехай $|\mu_\nu(\lambda)| \ge 2|\mu|$, тоді

$$|\mu-\mu_\nu(\lambda)| = |\mu_\nu(\lambda)|\left|\frac{\mu}{\mu_\nu(\lambda)}-1\right| \ge \frac{|\mu_\nu(\lambda)|}{2};$$

$$|\rho_\nu(\lambda(\nu),t)| = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu_\nu(\lambda)|} \le \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu_\nu(\lambda)|/2} = = 2|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}-1} = 2|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t-T}{T}} \le \le 2\max\left\{1, \frac{1}{|\mu_\nu(\lambda)|}\right\} = \max\left\{2, \frac{2}{|\mu_\nu(\lambda)|}\right\} \le \le \max\left\{2, \frac{2}{2|\mu|}\right\} = \max\left\{2, \frac{1}{|\mu|}\right\},$$

а отже,

$$|\rho_\nu(\lambda(\nu),t)| \le \frac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\}. \qquad (24)$$

Розглянемо випадок $\dfrac{|\mu|}{2}<|\mu_\nu(\lambda)|<2|\mu|$. Знаменник $|\mu - \mu_\nu(\lambda)|$ не менший, ніж $\min|z_1 - z_2|$, де z_1 і z_2 належать границям областей $V\mathcal{N}_{l,1}(\nu)$ і $V\mathcal{N}_{l,2}(\nu)$ відповідно. Даний мінімум досягається у випадку, якщо $z_2 = e^{\tilde{\nu}(\lambda_l(\nu)-(i+1)\chi_{1\nu}/2)T}$, а z_1 — проекція z_2 на промінь $z = \arg\lambda_l(\nu) - \chi_{1\nu}T$ і дорівнює

$$|\mu_{l\nu}(\lambda)|e^{-\chi_{1\nu}T/2}\sin(\chi_{1\nu}T/2).$$

Оскільки справджуються наступні оцінки

$$\chi_{1\nu}T/2 < \ln 2/4 < 1/4 < \pi/4$$

і $\sin x > 2\sqrt{2}x/\pi$ при $x \in [0, \pi/4]$, то

$$\sin\chi_{1\nu}T/2 \ge 2\sqrt{2}\chi_{1\nu}T/2\pi = \sqrt{2}\chi_{1\nu}T/\pi.$$

Тому з $|\mu_{l\nu}(\lambda)| \ge |\mu_\nu(\lambda)|e^{-\chi_{1\nu}T/2}$ отримаємо

$$|\mu - \mu_\nu(\lambda)| \ge |\mu_{l\nu}(\lambda)|e^{-\chi_{1\nu}T/2}\sin(\chi_{1\nu}T/2) \ge$$
$$\ge |\mu_\nu(\lambda)|e^{-\chi_{1\nu}T}\sqrt{2}\chi_{1\nu}T/\pi > |\mu|\chi_{1\nu}T/2\pi,$$

звідки випливає

$$|\rho_\nu(\lambda(\nu),t)| = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu - \mu_\nu(\lambda)|} \le \frac{\max\{1, |\mu_\nu(\lambda)|\}}{|\mu - \mu_\nu(\lambda)|} <$$
$$< \frac{\max\{1, 2|\mu|\}}{|\mu - \mu_\nu(\lambda)|} \le \frac{2\pi\max\{1, 2|\mu|\}}{|\mu|\chi_{1\nu}T} \le$$
$$\le \frac{2\pi}{\chi_{1\nu}T}\max\Big\{\frac{1}{|\mu|}, 2\Big\} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}\chi_\nu\tilde{\nu}^{-\eta_2}T}\times$$
$$\times\max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\} = \frac{2\pi\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}\chi_\nu T}\max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\} \le$$
$$\le \frac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} 8\sqrt{2n\pi\zeta_{\mathcal{N}}(2\eta_2)}\max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\}. \qquad (25)$$

Праві частини у формулах (22)–(25) оцінюються числом $\dfrac{\tau\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Таким чином, нерівність (21) виконується при $\eta_2 > \theta/2$ для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$.

Теорему доведено.

Оскільки $\lambda_l(\nu) \in V\mathcal{N}_l(\nu)$ і

$$\left|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\right| = |\rho_\nu(\lambda_l(\nu),t)|,$$

то (14) виконується для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$.

Сформулюємо загальну теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми* 1, $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$, *де множина* $V\mathcal{N}_\varepsilon$ *задається рівністю* (19). *Тоді у разі* $\varphi_0 \in \mathbf{H}\mathcal{N}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, $\dots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$, *де* $\psi > q + n\theta/2$, *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2p}$*) векторів* $(a_{0,n,0,\dots,0}, \dots, a_{0,0,\dots,n}) \in \mathcal{O}_A^p$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від правих частин умов* (2).

Доведення. З теореми 1 випливає існування функцій u_k для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. За теоремою 3 для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $(a_{0,n,0,\dots,0}, \dots, a_{0,0,\dots,n})$ з множини $\mathcal{O}_A^p$ виконується оцінка (13) для $\eta_1 > (n-1)\theta/2$. Згідно з теоремою 4 для довільного $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$ виконується оцінка (14) для $\eta_2 > \theta/2$. Таким чином, з теореми 2 випливає як існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$, так і його неперервна залежність від функцій $\varphi_0 \in \mathbf{H}\mathcal{N}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, $\dots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$ для $\psi > q + n\theta/2$.

Теорему доведено.

4. Дослідження задачі для неоднорідного рівняння. Побудова функції Гріна. Розглянемо задачу з однорідними двоточковими нелокальними умовами (2) для неоднорідного диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, B\Big)u = \sum_{s_0+|s|\le n} a_{s_0,s}B^s\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}} = f, \quad (26)$$

$$M_m u = \mu\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = 0, \qquad (27)$$

де $m = 0, 1, \dots, n-1$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, $u = u(t,z)$ — шукана функція, а $f = f(t,z)$ — задана функція. Дослідимо питання однозначної розв'язності даної задачі у класі функцій зі спектром $\mathcal{N}$.

Означення. Під *розв'язком* задачі (26), (27) будемо розуміти функцію $u = u(t,z)$ із значеннями $u(t,\cdot)$ у просторі $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ для кожного $t \in [0,T]$, яка задовольняє рівняння (26) і умови (27) та належить до простору $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Розв'язок задачі (26), (27) шукаємо у вигляді ряду (3), де коефіцієнти $u_k(t)$ — невідомі функції, які треба визначити.

Функція $u_k = u_k(t)$ з формули (3) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ є класичним розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння

$$u_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} b_j(\nu_k) u_k^{(n-j)} = f_k(t), \qquad (28)$$

$$\mu u_k^{(m)}\big|_{t=0} - u_k^{(m)}\big|_{t=T} = 0, \qquad (29)$$

де $m = 0,1,\ldots,n-1$, коефіцієнти

$$b_j(\nu) = \sum_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s}\nu^s = \sum_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s_1,\ldots,s_p}\nu_1^{s_1}\ldots\nu_p^{s_p},$$

а функції $f_k(t)$ є коефіцієнтами Фур'є функції $f(t,z)$.

Розв'язок задачі (28), (29) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ можна представити у вигляді

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)d\tau, \qquad (30)$$

де $G_k(t,\tau)$ — функція Гріна задачі (4), (29).

Функція Гріна $G_k(t,\tau)$ існує тоді і тільки тоді, коли задача (4), (29) має лише тривіальний розв'язок, тобто виконується

$$\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_j(\nu)T} \neq 0.$$

В умовах теореми 1 задача (26), (27) може мати не більше одного розв'язку.

На основі формул (3), (30) одержимо формальне зображення розв'язку задачі (26), (27) у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} z^{\nu_k} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)d\tau. \qquad (31)$$

Для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ у квадраті

$$K_T = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}_+^2 :\ 0 \le t \le T,\ 0 \le \tau \le T\}$$

функції $G_k(t,\tau)$ визначаються формулою

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) + \frac{1}{2\tilde{\nu}_k^{n-1}} \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu_k)(t-\tau)}(\mu + e^{\tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu_k)T})}{\prod\limits_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}(\lambda_j(\nu_k) - \lambda_q(\nu_k))(\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu_k)T})}, \qquad (32)$$

де

$$g_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}\,(t-\tau)}{2\tilde{\nu}_k^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu_k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}(\lambda_j(\nu_k) - \lambda_q(\nu_k))}. \qquad (33)$$

Перепишемо формулу (32) у вигляді

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{2\tilde{\nu}_k^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu_k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}(\lambda_j(\nu_k) - \lambda_q(\nu_k))} \times$$
$$\times \left(\operatorname{sgn}\,(t-\tau) + \frac{\mu + e^{\tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu_k)T}}{\mu - e^{\tilde{\nu}_k\lambda_j(\nu_k)T}}\right).$$

Позначимо $\Delta_j(\nu) = \prod\limits_{\substack{1\le r<q\le n\\ q,r\neq j}}(\lambda_q(\nu) - \lambda_r(\nu))$, тоді функція Гріна запишеться у вигляді

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{\Delta\ \tilde{\nu}_k^{n-1}} \times$$
$$\times \begin{cases} \mu \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta_j(\nu_k)\ \rho_\nu(\lambda_j(\nu_k), t-\tau), & t>\tau; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta_j(\nu_k)\ \rho_\nu(\lambda_j(\nu_k), t+T-\tau), & t<\tau. \end{cases}$$

Знайдемо похідну по t порядку r функції Гріна, $r = 0,1,\ldots,n-1$,

$$\frac{\partial^r G_k(t,\tau)}{\partial t^r} = \frac{\tilde{\nu}_k^{r-n+1}}{\Delta} \times$$
$$\times \begin{cases} \mu \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta_j(\nu_k)\lambda_j^r(\nu_k)\rho_\nu(\lambda_j(\nu_k), t-\tau), & t>\tau; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta_j(\nu_k)\lambda_j^r(\nu_k)\rho_\nu(\lambda_j(\nu_k), t+T-\tau), & t<\tau. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta_j(\nu)$ — визначники $\Delta_{j,n-1}(\nu)$ порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1(\nu),\ldots,\lambda_n(\nu)$, то для довільних $\nu \in \mathbb{R}^p$ маємо

$$\Delta_j(\nu) \leq (n-1)! A_1^{(n-1)(n-2)/2}. \qquad (34)$$

Враховуючи нерівності (6) та (34) отримаємо наступні оцінки:

$$\left|\frac{\partial^r G_k(t,\tau)}{\partial t^r}\right| \leq \frac{C_7 \tilde{\nu}_k^{r-n+1}}{\Delta} \times$$
$$\times \begin{cases} M \sum\limits_{j=1}^{n} \rho_\nu(\lambda_j(\nu_k), t-\tau), & \text{при } t > \tau; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \rho_\nu(\lambda_j(\nu_k), t+T-\tau), & \text{при } t < \tau, \end{cases}$$

де $C_7 = (n-1)! A_1^{(n-1)(n-2)/2+r}$.

Із нерівностей (13), (14) та теорем 3 і 4 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n}) \in \mathcal{O}_A^p$ та параметра $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$, де множина $\mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ задається формулою (19), виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial^r G_k(t,\tau)}{\partial t^r}\right| \leq C_8 \tilde{\nu}_k^{\sigma+r+1}, \qquad (35)$$

де C_8 — стала і $\sigma > (\theta/2-1)n$.

З формули (30) та нерівності (35) для всіх $\nu \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_\Delta$ та $r = 0, 1, \ldots, n-1$ отримаємо оцінки

$$|u_k^{(r)}(t)| \leq C_8 \tilde{\nu}_k^{\sigma+r} T \max_t |f_k(t)|, \qquad (36)$$

і теорему існування та єдиності розв'язку задачі (26), (27) у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 6. *Нехай $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ і функція $f \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{q+\sigma}^0(\mathcal{D}^p)$, де $\sigma > (\theta/2-1)n$, множина $\mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ задається рівністю* (19)*, та виконуються умови теореми* 1. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n}) \in \mathcal{O}_A^p$ існує єдиний розв'язок задачі* (26), (27) *з простору $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$, який неперервно залежить від функції $f(t,z)$.*

Доведення. Із нерівності (36) одержимо

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq \tilde{C}^2 \tilde{\nu}_k^{2\sigma+2r} T^2 \max_t |f_k(t)|^2, \qquad (37)$$

для кожного $r = 0, 1, \ldots, n-1$ і $\nu \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_\Delta$, та із рівняння (28) — оцінку похідної n-ого порядку функції $u_k(t)$:

$$|u_k^{(n)}(t)|^2 \leq |f_k(t)|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\tilde{b}_j(\nu_k)|^2 |u_k^{(n-j)}(t)|^2 \leq$$
$$\leq |f_k(t)|^2 + \mathrm{const}\ \tilde{\nu}_k^{2\sigma+2n} \max_t |f_k(t)|^2. \qquad (38)$$

Тоді з формул (31), (37) і (38) отримаємо нерівність

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)} \leq C_9 \|f\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_{q+\sigma}^0(\mathcal{D}^p)},$$

де $C_9 > 0$ — величина, яка не залежить від функції f, але залежить від коефіцієнтів рівняння (26) та параметра μ. З отриманої нерівності випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

5. Встановлення умов однозначної розв'язності задачі (26)**,** (2)**.** Використовуючи результати отримані при дослідженні задач (1), (2) та (26), (27), розглянемо питання однозначної розв'язності у класі функцій зі спектром $\mathcal{N}$ задачі (26), (2):

$$Lu = \sum_{s_0+|s|\leq n} a_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f,$$

$$M_m u = \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = \varphi_m,$$

де $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, u — шукана функція, а $\varphi_0 = \varphi_0(z)$, $\varphi_1 = \varphi_1(z)$, ..., $\varphi_{m-1} = \varphi_{m-1}(z)$, $f = f(t,z)$ — задані функції.

Означення. Під *розв'язком* задачі (26), (2) будемо розуміти функцію $u = u(t,z)$ із значеннями $u(t,\cdot)$ у просторі $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ для кожного $t \in [0,T]$, яка задовольняє рівняння (26) і умови (2) та належить до простору $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Розв'язок задачі (26), (2) можна представити у вигляді суми

$$u = v + w, \qquad (39)$$

де $v = v(t,z)$ — розв'язок задачі (1), (2), а $w = w(t,z)$ — розв'язок задачі (26), (27), які зображаються формулами (11), (31).

Сформулюємо і доведемо теорему існування та єдиності розв'язку задачі (26), (2) у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 7. *Нехай справджуються умови теореми* 1 *та виконується наступні включення:* $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$ *та* $f \in \mathbf{H}\mathcal{N}^0_{q+\sigma}(\mathcal{D}^p)$, $\varphi_0 \in \mathbf{H}\mathcal{N}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$, *де* $\sigma > (\theta/2-1)n$, $\psi > q + n\theta/2$, *множина* $V\mathcal{N}_\varepsilon$ *задається рівністю* (19). *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2p}$*) векторів* $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n}) \in \mathcal{O}^p_A$ *існує єдиний розв'язок задачі* (26), (2) *з простору* $\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від функцій* φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_{n-1} *і* f.

Доведення. Оскільки для розв'язку $u(t,z)$ виконується рівність (39), то

$$\|u\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

тоді

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)} \leq C_{10}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_{\psi-j}(\mathcal{S}^p)} + \\ + \|f\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}^0_{q+\sigma}(\mathcal{D}^p)}\Big),$$

де $C_{10} > 0$ — величина, яка не залежить від функції f, але залежить від коефіцієнтів рівняння (26) та параметра нелокальних умов μ, звідки й випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

6. Висновки. У роботі досліджено коректність крайових задач з нелокальними однорідними та неоднорідними умовами для диференціально-операторних рівнянь з частинними похідними. Встановлено умови однозначної розв'язності даних задач у шкалі $\{\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ просторів функцій зі спектром $\mathcal{N}$, асимптотику якого задає число $\theta > 0$.

Побудовано формули для розв'язків розглядуваних задач, а також проведено аналіз малих знаменників, який грунтується на метричному підході. На основі отриманих оцінок знизу малих знаменників встановлено достатні умови існування розв'язків задач у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)$ з довільним дійсним параметром q. Встановлено обернену залежність між граничною швидкістю зростання спектру $\mathcal{N}$ і гладкістю правих частин f, $\varphi_0, \varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Берник В.И., Пташник Б.Й., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, №4. – С. 637-645.

2. *Борок В.М., Фардигола Л.В.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое // Матем.заметки. – 1990. – 48:1. – С. 20-25.

3. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Мир, 1976. – 624 с.

4. *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, №2. – С. 186-195.

5. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Нелокальні за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2012. – **2**, №2-3. – С. 41-48.

6. *Задорожна Н.М., Пташник Б.Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, №7. – С. 915-921.

7. *Ільків В.С.* Розв'язність нелокальної задачі для систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів // Науковий вісник Ужгородського університету. – 2010. – **4**. – С. 72-85.

8. *Ільків В.С., Магеровська Т.В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісник Нац. університету "Львівська Політехніка". Фізико-математичні науки. – 2007. – №601. – С. 12-17.

9. *Ільків В.С., Страп Н.І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними у багатовимірній комплексній області // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Математика і інформатика. – 2013. – **24**, №1 – С. 60-72.

10. *Ільків В.С., Страп Н.І., Волянська І.І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ у комплексній області // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2012. – **10**. – С. 15-26.

11. *Пташник Б.Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наукова думка, 1984. – 264 с.

12. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

13. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.