УДК 515.12, 517.51

©2014 р. В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРЯМА ЗОРҐЕНФРЕЯ І НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Вивчається множина $D(f)$ точок розриву нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to \mathbb{L}$ зі значеннями в прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$. Зокрема, показано, що $D(f) = \varnothing$ якщо простір X зв'язний чи локально зв'язний. Далі для довільної підмножини A раціональної прямої $\mathbb{Q}$ і точки $b \in \mathbb{L}$ побудовано таку нарізно неперервну функцію $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, що $D(f) = A \times \{b\}$. З'ясовано також, що існує нарізно неперервна функція $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, що $\mathrm{pr}_{\mathbb{Q}}(D(f)) = \mathbb{Q}$. Аналогічні результати мають місце і для відображень $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$.

We investigate the discontinuity point set $D(f)$ of a separately continuous mapping $f : X \times Y \to \mathbb{L}$ with values in the Sorgenfrey line $\mathbb{L}$. In particular, we show that $D(f) = \varnothing$ if X is a connected or locally connected space. Moreover, for any subset A of $\mathbb{Q}$ and $b \in \mathbb{L}$ we construct a separately continuous function $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, such that $D(f) = A \times \{b\}$. We prove that there exists a separately continuous function $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ with $\mathrm{pr}_{\mathbb{Q}}(D(f)) = \mathbb{Q}$. Analogous results hold true for mappings $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$.

1. Вступ. Пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ – це топологічний простір, точками якого є точки з числової прямої $\mathbb{R}$, а околом точки x в $\mathbb{L}$ вважається підмножина U в $\mathbb{L}$, яка містить деякий проміжок $[x, x + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$. Її ввів Р. Зорґенфрей [1], хоча раніше П. Александров і П. Урисон у праці [2] (див. також [3]) ввели простір "дві стрілки", що є диз'юнктним об'єднанням двох своїх підпросторів C_0 і C_1, кожний з яких гомеоморфний до прямої Зорґенфрея (див. також [4, с. 318, вправа 3.10,c]).

У монографії Р. Енгелькінга [4] пряма Зорґенфрея названа універсальним контрприкладом. Там встановлено, що $\mathbb{L}$ – це досконало нормальний спадково сепарабельний простір континуальної ваги (а тому неметризовний) з першою аксіомою зліченності. Крім того, $\mathbb{L}$ – лінделефовий, а значить, паракомпактний простір, але $\mathbb{L}^2$ не буде ні паракомпактним, ні нормальним. Нарешті, $\mathbb{L}$ – це нульвимірний, а значить, спадково незв'язний простір [4, с. 529], отже, його компонентами зв'язності служать одноточкові множини $\{x\}$, де $x \in \mathbb{L}$. Дослідження топологічних властивостей прямої Зорґенфрея продовжується і в наш час (див., наприклад дисертацію М. Патракєєва [5]).

В останні роки пряма Зорґенфрея активно використовується математиками кафедри математичного аналізу ЧНУ у працях з теорії функцій. Так, В. Маслюченко, О. Маслюченко і О. Фотій вивчали многозначні відображення зі значенями в прямій Зорґенфрея [6-12], продовжуючи дослідження П. Кендерова [13] і Ґ. Дебса [14]. Зокрема, в [6] було встановлено, що кожне неперервне відображення $f : X \to \mathbb{L}$ зв'язного простору X у пряму Зорґенфрея $\mathbb{L}$ обов'язково стале. В. Маслюченко і О. Філіпчук [15] зауважили, що кожне нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{L}$, обов'язково стале, отже, не має розривів, але КС-функція $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{L}$, $g(x, y) = x$, розривна в кожній точці. Причина цього явища полягає в тому, що пряма Зорґенфрея не є метризовним простором. Більше того, $\mathbb{L}$ – не є ні σ-метризовним, ні напіввичерпним простором, ні простором Мура [16,17]. В. Маслюченко і В. Михайлюк у праці [18] побудували приклад нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, у якої на кожній вертикалі $\{x\} \times \mathbb{L}$ є точка розриву, показавши тим самим, що пряма Зорґенфрея не є конаміоковим простором.

У даній статті ми продовжимо ці дослідження. Спочатку ми з'ясовуємо, що коли X – зв'язний або локально зв'язний простір, то для довільного топологічного простору Y

кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to \mathbb{L}$ неперервне за сукупністю змінних. Оскільки пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ і раціональна пряма $\mathbb{Q}$ – це не зв'язні і не локально зв'язні простори, то виникає питання: якими можуть бути точки розриву у нарізно неперервного відображення $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$? Ми з'ясовуємо, що існують нарізно неперервні відображення $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ з одноточковими множинами точок розриву $D(f)$, і на основі цього для кожної підмножини $A \subseteq \mathbb{Q}$ і точки $b \in \mathbb{L}$ будуємо нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, для якого $D(f) = A \times \{b\}$. Далі, модифікуючи конструкцію з [18], ми будуємо приклад нарізно неперервного відображення $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, у якого на кожній вертикалі $\{x\} \times \mathbb{L}$ є точка розриву. Ми вказуємо також як згадані вище результати перенести на випадок відображень $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$.

Деякі з результатів даної статті були анонсовані в [19]. У проведених дослідженнях брала участь і Л.Боднарашек.

2. Нарізно неперервні відображення зі значеннями в $\mathbb{L}$ у випадку зв'язності або локальної зв'язності одного з співмножників. У праці [6] було доведено, що для зв'язного простору X кожна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, у якої кожна точка $x \in X$ є точкою локального мінімуму, стала. Звідси негайно випливає, що для зв'язного простору X кожне неперервне відображення $f : X \to \mathbb{L}$ стале. Наступні дві теореми легко виводяться з цього твердження.

Як звичайно, для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ ми покладаємо, $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$.

Теорема 1. *Нехай X – зв'язний простір, Y – довільний топологічний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{L}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді існує таке неперервне відображення $g : Y \to \mathbb{L}$, що $f(x, y) = g(y)$ на $X \times Y$, зокрема, f неперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : X \to \mathbb{L}$ неперервне, а значить, стале, адже простір X зв'язний. Тому існує такий елемент $g(y) \in \mathbb{L}$, що $f_y(x) = g(y)$ на X. Зафіксуємо якесь $x \in X$. Тоді $f^x(y) = f(x, y) = f_y(x) = g(y)$ на Y. За умовою функція $f^x : Y \to \mathbb{L}$ неперервна, отже, такою ж буде і функція g, причому для неї $f(x, y) = g(y)$ на $X \times Y$. Неперервність функції f легко випливає з неперервності функції g.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, у якому кожна точка має зв'язний окіл, Y – довільний топологічний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{L}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді f неперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0)$ – довільна точка з добутку $X \times Y$. За умовою існує зв'язний окіл U точки x_0 в X. Розглянемо звуження $g = f|_{U \times Y}$. За теоремою 1 відображення g буде неперервним, зокрема, неперервним у точці p_0. Оскільки $U \times Y$ – це окіл точки p_0 в топології добутку на $X \times Y$, то і f буде неперервним у точці p_0.

Зрозуміло, що твердження теореми 2 буде справджуватися і в тому випадку, коли X – це локально зв'язний простір.

3. Про неперервність суми і добутку функції з значеннями в $\mathbb{L}$. Почнемо з дослідження на неперервність операцій додавання і множення в прямій Зорґенфрея.

Лема 1.*Відображення $s : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$, $s(x, y) = x + y$, неперервне в кожній точці добутку $\mathbb{L}^2 = \mathbb{L} \times \mathbb{L}$.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{L}^2$, $z_0 = s(p_0) = x_0 + y_0$, $\varepsilon > 0$ і $W = [z_0, z_0 + \varepsilon)$ – базисний окіл точки z_0 в $\mathbb{L}$. Розглянемо околи $U = [x_0, x_0 + \varepsilon/2)$ і $V = [y_0, y_0 + \varepsilon/2)$ точок x_0 і y_0 в $\mathbb{L}$. Якщо $p = (x, y) \in U \times V$, то для точки $z = s(p)$ матимемо $z_0 = x_0 + y_0 \leqslant \leqslant x + y = z < x_0 + \varepsilon/2 + y_0 + \varepsilon/2 = z_0 + \varepsilon$. Тому $s(U \times V) \subseteq W$, що і дає нам неперервність додавання s в $\mathbb{L}^2$.

Лема 2. *Відображення $m : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$, $m(x, y) = xy$, неперервне в усіх точках замкненого квадранта $E = [0, +\infty)^2$ і розривна в кожній точці доповнення $\mathbb{L}^2 \setminus E$.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in E$. Тоді $x_0 \geqslant 0$ і $y_0 \geqslant 0$. Візьмемо довільне число δ з проміжку $(0, 1]$, припустимо, що для точки $p = (x, y)$ виконуються нерівності $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$ і $y_0 \leqslant y < y_0 + \delta$, і оцінимо різницю $z - z_0$, де $z = m(p) = xy$ і

$z_0 = m(p_0) = x_0 y_0$.

Маємо $0 \leqslant z - z_0 = (x - x_0)y + x_0(y - y_0) < \delta(y_0 + \delta) + x_0\delta \leqslant \delta(y_0 + 1) + x_0\delta = \gamma\delta$, де $\gamma = x_0 + y_0 + 1 \geqslant 1 > 0$. Взявши тепер для даного $\varepsilon > 0$ число $\delta = min\{1, \varepsilon/\gamma\}$, ми отримаємо, що при $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$ і $y_0 \leqslant \leqslant y < y_0 + \delta$ виконується нерівність

$$x_0 y_0 \leqslant xy < x_0 y_0 + \varepsilon,$$

що і дає нам неперервність функції m у точці p_0.

Нехай тепер $p_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus E$. Доведемо, що функція $m : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$ розривна в точці p_0. Зауважимо, що лінійна функція $f : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, $f(x) = ax$, буде при $a \geqslant 0$ неперервною і скрізь розривною при $a < 0$. Оскільки $p_0 \in E$, то $x_0 < 0$ або $y_0 < 0$. Якщо $x_0 < 0$, то функція $m^{x_0}(y) = x_0 y$ скрізь розривна, зокрема, розривна в точці y_0, якщо ж $y_0 < 0$, то функція $m_{y_0}(x) = y_0 x$ скрізь розривна, а значить, розривна в точці x_0. Таким чином, функція m не є нарізно неперервною в точці p_0, а значить, вона розривна в цій точці.

Лема 3. *Нехай X – топологічний простір, $x_0 \in X$ і функції $f : X \to \mathbb{L}$ і $g : X \to \mathbb{L}$ неперервні в точці x_0. Тоді і їх сума $h = f + g$ буде неперервною в точці x_0.*

Доведення. Відображення $\varphi = (f, g) : X \to \mathbb{L}^2$, $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, неперервне в точці x_0, бо його компоненти f і g неперервні в точці x_0 за умовою. Операція додавання $s : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$, $s(u, v) = u + v$, неперервна за лемою 1, зокрема, неперервна в точці $q_0 = (u_0, v_0) = (f(x_0), g(x_0))$. Але $(s \circ \varphi)(x) = f(x) + g(x)$, отже, $h = s \circ \varphi$. Неперервність у точці x_0 відображення h негайно випливає з теореми про неперервність композиції.

Лема 4. *Нехай функції $f : X \to \mathbb{L}$ і $g : X \to \mathbb{L}$ неперервні в точці x_0, причому $f(x_0) \geqslant 0$ і $g(x_0) \geqslant 0$. Тоді і їх добуток $h = fg : X \to \mathbb{L}$ буде неперервною функцією в точці x_0.*

Доведення. Це негайно випливає з того, що $h = m \circ \varphi$, де $\varphi = (f, g)$, і леми 2, згідно з якою множення $m : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$ буде неперервним у точці $\varphi(x_0) = (f(x_0), g(x_0))$.

4. Деякі допоміжні неперервні функції на $\mathbb{Q}$, $\mathbb{L}$ і $\mathbb{Q} \times \mathbb{L}$ зі значеннями в $\mathbb{L}$.

Символом χ_A ми будемо позначати характеристичну функцію множини A у заданій множині X.

Лема 5. *Нехай X – топологічний простір, $\mathcal{T}$ – топологія на $\mathbb{R}$, така, що $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ – це T_1-простір і $A \subseteq X$. Характеристична функція $f = \chi_A : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ буде неперервною тоді і тільки тоді, коли множина A є відкритою і замкненою у просторі X.*

Доведення. Нехай A – відкрито-замкнена множина в X і $B \subseteq \mathbb{R}$. Очевидно, що $f^{-1}(B) = X$, якщо $\{0, 1\} \subseteq B$, $f^{-1}(B) = \varnothing$, якщо $\{0, 1\} \cap B = \varnothing$, $f^{-1}(B) = A$, якщо $1 \in B$ і $0 \notin B$ і $f^{-1}(B) = X \setminus A$, якщо $1 \notin B$ а $0 \in B$. Всі множини X, $\varnothing$, A і $X \setminus A$ відкриті, отже, f – неперервна функція.

Навпаки, нехай функція f неперервна. Оскільки одноточкові множини $\{0\}$ і $\{1\}$ замкнені в $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ та $f^{-1}(1) = A$ і $f^{-1}(0) = X \setminus A$, то множини A і $X \setminus A$ замкнені, отже, A – відкрито-замкнена множина в X.

Зауважимо, що насправді тут доведено, що для відкрито-замкненої множини A характеристична функція $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ буде неперервною, коли $\mathbb{R}$ наділити дискретною топологією

Лема 6. *Для довільних дійсних чисел a і b, таких, що $a < b$, характеристична функція $f = \chi_{[a,b)} : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ є неперервною.*

Доведення. Зауважимо, що проміжок $[a, b)$ і його доповнення $\mathbb{L} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ – це відкриті підмножини прямої Зорґенфрея $\mathbb{L}$. Тому твердження леми 6 негайно випливає з леми 5.

Символом $\mathbb{Q}$ ми позначаємо множину раціональних чисел з топологією, індукованою з числової прямої $\mathbb{R}$. Цей топологічний простір, ми називаємо раціональною прямою.

Лема 7. *Нехай a і b – ірраціональні числа, такі, що $a < b$. Тоді характеристична функція $f = \chi_{(a,b)\cap\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ неперервна.*

Доведення. Множина $A = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ відкрита в $\mathbb{Q}$ і її доповнення $\mathbb{Q} \setminus A = ((-\infty, a) \cup (b, +\infty)) \cap \mathbb{Q}$ – це теж відкрита в $\mathbb{Q}$ множина. Отже, функція f буде неперервною за лемою 5.

Лема 8. *Нехай a і b – ірраціональні чи-*

сла, такі, що $a < b$, a c і d – довільні дійсні числа, такі, що $c < d$, $I = (a, b) \cap \mathbb{Q}$, $J = [c, d)$ і $P = I \times J$. Тоді функція $f = \chi_P : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ є неперервною.

Доведення. Ясно, що $f(x, y) = \chi_P(x, y) = \chi_I(x)\chi_J(y)$. Згідно з лемами 6 і 7 функції $\chi_I : \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ і $\chi_J : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ неперервні. Проекції $\mathrm{pr}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{Q}$, $\mathrm{pr}_{\mathbb{Q}}(x, y) = x$, і $\mathrm{pr}_{\mathbb{L}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, $\mathrm{pr}_{\mathbb{L}}(x, y) = y$ – це неперервні функції. Тоді і функції $g, h : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$,

$$g(x, y) = \chi_I(x) = \chi_I(\mathrm{pr}_{\mathbb{Q}}(x, y))$$

та

$$h(x, y) = \chi_J(y) = \chi_J(\mathrm{pr}_{\mathbb{L}}(x, y)),$$

будуть неперервними за теоремою про неперервність композиції. При цьому $g(x, y) \geqslant 0$ і $h(x, y) \geqslant 0$ на $\mathbb{Q} \times \mathbb{L}$. Оскільки

$$f(x, y) = g(x, y)h(x, y),$$

то функція $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ буде неперервною за лемою 4.

Лему 8 можна також вивести і з леми 5, адже множина $P = I \times J$ є відкрито-замкненою в добутку $\mathbb{Q} \times \mathbb{L}$.

5. Побудова нарізно неперервних функцій $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ з одноточковою множиною точок розриву. Носієм функції $f : T \to \mathbb{R}$ ми називаємо множину $\mathrm{supp} f = \{t \in T : f(t) \neq 0\}$. Для точки $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ символом $|p|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ ми позначаємо максимум норму на $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3. *Нехай $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{L}$, α – додатне ірраціональне число, β – додатне дійсне число, $\alpha_n = \frac{\alpha}{n}$, $\beta_n = \frac{\beta}{n}$, $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, $I_n = (a_{n+1}, a_n) \cap \mathbb{Q}$, $J_n = [b_{n+1}, b_n)$, $I = (a, a_1) \cap \mathbb{Q}$, $J = (b, b_1)$, $P_n = I_n \times J_n$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ і $P = I \times J$. Тоді функція*

$$f = f_{a,b,\alpha,\beta} = \chi_E : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$$

буде нарізно неперервною, $D(f) = \{(a, b)\}$, $\mathrm{supp} f \subseteq P$, $0 \leqslant f(p) \leqslant 1$ на $\mathbb{Q} \times \mathbb{L}$ і для кожного $x \in \mathbb{Q}$ розріз $f^x : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – це характеристична функція $\chi_{[\gamma_1, \gamma_2)}$ деякого напіввідкритого проміжка $[\gamma_1, \gamma_2)$, для якого $b < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 < b_1 = b + \beta$.

Доведення. Покладемо $T = \mathbb{Q} \times \mathbb{L}$ і $u_n = \chi_{P_n}$ для кожного номера n. Оскільки $a_{n+1} < a_n$ і $b_{n+1} < b_n$ для кожного n, то $I_n \cap I_m = \varnothing$, $J_n \cap J_m = \varnothing$, а значить, і $P_n \cap P_m = \varnothing$, при $n \neq m$. Тому $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ і, як легко перевірити, $I = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, адже всі числа a_n ірраціональні, та $J = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} J_n$. В такому разі $f(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(p)$ на T.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in T$ і $c = (a, b)$. Припустимо, що $p_0 \neq c$ і доведемо, що функція f неперервна в точці p_0. Зрозуміло, що $\delta_0 = \frac{1}{2}|p_0 - c|_\infty > 0$. Оскільки $\alpha_n \to 0$ і $\beta_n \to 0$ в $\mathbb{R}$, то існує такий номер N, що $\alpha_n < \delta_0$ і $\beta_n < \delta_0$ при $n > N$. Розглянемо δ_0-окіл $W_0 = \{p \in T : |p - p_0|_\infty < \delta_0\}$ точки p_0 у просторі $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ і покажемо, що $W_0 \cap P_n = \varnothing$ при $n > N$. Справді, нехай $n > N$ і $p \in W_0$. Тоді $|p_0 - c|_\infty - |p - c|_\infty \leqslant |(p_0 - c) - (p - c)|_\infty = |p_0 - p|_\infty = |p - p_0|_\infty < \delta_0$, отже, $|p - c|_\infty > |p_0 - c|_\infty - \delta_0 = 2\delta_0 - \delta_0 = \delta_0 > \alpha_{N+1} \geqslant \alpha_n = a_n - a > 0$ і $|p - c|_\infty > \delta_0 > \beta_{N+1} \geqslant \beta_n = b_n - b > 0$, а значить, $|p - c|_\infty > \max\{a_n - a, b_n - b\} = |c_n - c|_\infty$, де $c_n = (a_n, b_n)$. Для точки $q = (u, v)$ з прямокутника $Q_n = (a, a_n) \times (b, b_n)$ будемо мати, що $0 < u - a < a_n - a$ і $0 < v - b < b_n - b$, отже, $|q - c|_\infty < |c_n - c|_\infty$. Це показує, що $p \notin Q_n$. Тому $W_0 \cap P_n = \varnothing$ при $n > N$, адже $P_n \subseteq Q_n$.

З доведеного негайно випливає, що

$$f(p) = \sum_{n=1}^{N} u_n(p)$$

на множині W_0, адже $u_n(p) = 0$ на W_0 при $n > N$, бо $P_n \cap W_0 = \varnothing$. Множина W_0 відкрита в добутку T і всі функції $u_n = \chi_{P_n}$ неперервні на T за лемою 8, адже точки a_{n+1} і a_n ірраціональні, а значить, їх звуження $u_n|_{W_0}$ будуть теж неперервними. За лемою 3 звуження $f|_{W_0}$ – це теж неперервна функція як скінченна сума неперервних функцій $u_n|_{W_0}$. Але $p_0 \in W_0$ і W_0 – відкрита в T множина, тому і f буде неперервною в точці p_0. Зрозуміло, що звідси випливає і нарізна неперервність функції f у точці $p_0 \neq c$. Але $f(a, y) = f(x, b) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{Q}$ і $y \in \mathbb{L}$, бо за побудовою $(\{a\} \times \mathbb{L}) \cap E = \varnothing$ і $(\mathbb{Q} \times \{b\}) \cap E = \varnothing$, таким чином, і функції $f^a : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ і $f_b : \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ будуть неперервними, адже вони нульові. Отже, f буде нарізно неперервною і в точці c.

Покажемо тепер, що f розривна в точці c. Розглянемо окіл $O = [0, \frac{1}{2})$ точки $0 = f(c)$ в прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$ і довільний базисний окіл $W = U \times V$ де $U = (a - \delta, a + \delta) \cap \mathbb{Q}$ і $V = [b, b+\delta)$, точки c у просторі T. Оскільки $\alpha_n \to 0$ і $\beta_n \to 0$, то існує такий номер m, що $\alpha_n < \delta$ і $\beta_n < \delta$ при $n > m$. Тоді $a_n = a + \alpha_n < a + \delta$ і $b_n = b + \beta_n < b + \delta$ при $n > m$. Але $a < a_{n+1} < a_n$ і $b < b_{n+1} < b_n$ для довільних n. Тому $I_n \subseteq U$ і $J_n \subseteq V$, а значить, $P_n = I_n \times J_n \subseteq U \times V = W$ при $n > m$. Зафіксуємо якийсь номер $n > m$ і візьмемо довільну точку $p^* \in P_n$. Тоді $p^* \in W$ і $f(p^*) = u_n(p^*) = 1 > \frac{1}{2}$. Отже, $f(p^*) \notin O$, а значить $f(W) \nsubseteq O$. Це показує, що $c \in D(f)$.

Включення $\mathrm{supp} f \subseteq P$ і нерівність $0 \leqslant f(p) \leqslant 1$ очевидні. З побудови функції f ясно, що для довільної точки $x \in \mathbb{Q} \setminus I$ вертикальний розріз f^x нульовий, отже, $f^x = \chi_{[\gamma,\gamma)}$, де γ – довільне число з інтервалу $(b, b+\beta)$. Якщо ж $x \in I$, то існує єдиний номер n, такий, що $x \in I_n$. Тоді $f^x = \chi_{[b_{n+1}, b_n)}$, адже $f^x = u_n^x$, причому $b < b_{n+1} < b_n < b+\beta$.

6. Побудова нарізно неперервної функції з даною множиною точок розриву на горизонталі.

Теорема 4. *Нехай A – довільна підмножина раціональної прямої і $b \in \mathbb{L}$. Тоді існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, таке, що $D(f) = A \times \{b\}$.*

Доведення. Припустимо спочатку, що множина A непорожня і скінченна. Тоді її можна записати у вигляді $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, де $a_k \in \mathbb{Q}$ при $k = 1, ..., n$ і $a_1 < ... < a_n$. Покладемо $p_k = (a_k, b)$ при $k = 1, ..., n$ і розглянемо довільне додатне ірраціональне число α. Функції $u_k = f_{a_k,b,\alpha,\alpha} : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ будуть нарізно неперервними невід'ємними і для них $D(u_k) = \{p_k\}$ за теоремою 3. За лемою 3 функція $f = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ буде нарізно неперервною і неперервною за сукупністю змінних у кожній точці множини $(\mathbb{Q} \times \mathbb{L}) \setminus (A \times \{b\})$. Покажемо, що f розривна у кожній точці p_k, де $k = 1, ..., n$. Оскільки функція u_k розривна в точці p_k, невід'ємна і $u_k(p_k) = 0$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного околу W точки p_k в $\mathbb{Q} \times \mathbb{L}$ існує точка $p_W \in W$, така, що $u_k(p_W) \geqslant \varepsilon$. Але $u_j(p_W) \geqslant 0$ для всіх $j \neq k$. Тому і

$$f(p_W) = u_k(p_W) + \sum_{j \neq k} u_j(p_W) \geqslant u_k(p_W) \geqslant \varepsilon,$$

що доводить розривність f у точці p_k. Таким чином, $D(f) = \{p_1, ..., p_n\} = A \times \{b\}$ і шукана функція побудована.

Припустимо тепер, що множина A нескінченна. Оскільки $A \subseteq \mathbb{Q}$ і множина $\mathbb{Q}$ зліченна, то і A – це зліченна множина, отже, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Покладемо $p_n = (a_n, b)$ для $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо числа $\alpha_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$, де $n \in \mathbb{N}$. Ясно, що всі вони ірраціональні, $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ для кожного n і $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. З теореми 3 випливає, що функції $u_n = \frac{1}{2^n} f_{a_n,b,\alpha_n,\alpha_n}$ нарізно неперервні, $0 \leqslant u_n(p) \leqslant \frac{1}{2^n}$ на $\mathbb{Q} \times \mathbb{L}$, $D(u_n) = \{p_n\}$ і $\mathrm{supp} u_n \subseteq P_n = (a_n, a_n + \alpha_n) \times (b, b + \alpha_n)$. Функція

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) \qquad (*)$$

визначається цією формулою на всьому добутку $\mathbb{Q} \times \mathbb{L}$, адже на ньому $0 \leqslant u_n(x, y) \leqslant \frac{1}{2^n}$ для кожного n, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збігається, тому і ряд $(*)$ збігається за першою ознакою порівняння. Зауважимо, що йдеться про збіжність частинних сум $g_n(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x, y)$ до суми $f(x, y)$ всього ряду в $\mathbb{R}$, а не в $\mathbb{L}$.

Доведемо, що функція f і буде шуканою.

Спочатку з'ясуємо, що функція $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ буде неперервною в кожній точці $p_0 = (x_0, y_0)$, де $y_0 \neq b$.

Нехай $y_0 < b$. Зауважимо, що множина $G = \mathbb{Q} \times (-\infty, b)$ відкрита в добутку $\mathbb{Q} \times \mathbb{L}$ і $f(p) = 0$ на G за побудовою, бо $u_n(p) = 0$ на G для всіх n. Тому функція f буде неперервною в кожній точці з G, зокрема, в точці $p_0 \in G$.

Нехай $y_0 > b$. Оскільки $\alpha_n \to 0$, то існує такий номер N, що $b+\alpha_n < y_0$ при $n \geqslant N$. Множина $G_N = \mathbb{Q} \times (b+\alpha_N, +\infty)$ відкрита в добутку $\mathbb{Q}\times\mathbb{L}$, причому $\mathrm{supp} u_n \cap G_N = \varnothing$ при $n \geqslant N$, бо $b+\alpha_n \leqslant b+\alpha_N$ при $n \geqslant N$, а $\mathrm{supp} u_n \subseteq P_n$ для кожного n. Тому $u_n(p) = 0$ при $n \geqslant N$ на G_N, отже, $f(p) = \sum\limits_{n=1}^{N-1} u_n(p)$ на G_N. За побудовою всі функції u_n неперервні в кожній точці з G_N, отже, за лемою 3 і звуження $f|_{G_N}$ буде неперервним в кожній точці з G_N, зокрема в точці p_0. Але G_N – це відкритий окіл точки p_0 в $\mathbb{Q}\times\mathbb{L}$, адже $p_0 \in G_N$, тому і f неперервна в точці p_0.

З доведеного випливає, що всі y-розрізи $f_y : \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ неперервні при $y \neq b$. Оскільки $f_b(x) = 0$ на $\mathbb{Q}$ за побудовою, то і b-розріз f_b буде неперервним. Отже, відображення f неперервне відносно другої змінної. Вертикальні x-розрізи $f^x : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ теж будуть неперервними в кожній точці $y \neq b$.

Перевіримо, що для довільного $x \in \mathbb{Q}$ відображення $f^x : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ буде неперервним і в точці b. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що $f^x(b) = f(x,b) = f_b(x) = 0$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збігається, то його залишок прямує до нуля, отже, існує такий номер N, що $\sum\limits_{n>N} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Покладемо $h_N(p) = \sum\limits_{n>N} u_n(p)$ для $p \in \mathbb{Q}\times\mathbb{L}$. Тоді $0 \leqslant h_N(p) < \varepsilon$ на $\mathbb{Q}\times\mathbb{L}$. Ясно, що $f = g_N + h_N$. Згідно з теоремою 3 x-розрізи $u_n^x = \frac{1}{2^n}\chi_{[c_n,d_n)}$, де $b < c_n \leqslant d_n$. Тому $g_N^x(y) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{2^n}\chi_{[c_n,d_n)}(y) = 0$ при $b \leqslant y < c = \min\{c_1, ..., c_N\} = b+\delta$, де $\delta = c - b > 0$. Тому при $b \leqslant y < b+\delta$

$$f^x(b) = 0 \leqslant f^x(y) = g_N^x(y) + h_N^x(y) =$$
$$= h_N^x(y) = h_N(x,y) < \varepsilon = f^x(b) + \varepsilon.$$

Це показує, що відображення $f^x : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ неперервне і в точці b. Таким чином, ми довели, що побудована нами функція $f : \mathbb{Q}\times\mathbb{L} \to \mathbb{L}$ нарізно неперервна і сукупно неперервна поза прямою $y = b$.

Залишилось довести, що функція f розривна в точках p_n і неперервна в точках множини $(\mathbb{Q}\setminus A) \times \{b\}$.

Розглянемо базисний δ-окіл W точки $p_n = (a_n, b)$ в добутку $\mathbb{Q}\times\mathbb{L}$, тобто множину

$$W = ((a_n - \delta, a_n + \delta) \cap \mathbb{Q}) \times [b, b+\delta).$$

Числа $\alpha_{n,k} = \frac{\alpha_n}{k}$ додатні і прямують до нуля при $k \to \infty$, тому

$$\beta_{n,k} = a_n + \alpha_{n,k} \to a_n \text{ і } \gamma_{n,k} = b + \alpha_{n,k} \to b$$

при $k \to \infty$, причому $\beta_{n,k} > a_n$ і $\gamma_{n,k} > b$ для кожного k.

Тому існує такий номер m, що $\beta_{n,m} < a_n + \delta$ і $\gamma_{n,m} < b + \delta$. Візьмемо довільну точку p^* з множини $P_{n,m} = ((\beta_{n,m+1}, \beta_{n,m}) \cap \mathbb{Q}) \times [\gamma_{n,m+1}, \gamma_{n,m})$. Для неї $u_n(p^*) = \frac{1}{2^n}$, при цьому $p^* \in W$, бо $P_{n,m} \subseteq W$, адже $a_n < \beta_{n,m+1} < \beta_{n,m} < a_n + \delta$ і $b < \gamma_{n,m+1} < \gamma_{n,m} < b + \delta$. Оскільки всі функції u_j невід'ємні, то

$$f(p^*) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(p^*) =$$

$$= u_n(p^*) + \sum_{j\neq n} u_j(p^*) \geqslant u_n(p^*) = \frac{1}{2^n}.$$

Зауважимо, що $f(p_n) = 0$ за побудовою. Таким чином, для $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ ми в кожному δ-околі W точки p_n знайшли точку p^*, для якої $f(p^*) \notin [f(p_n), f(p_n) + \varepsilon)$. Це показує, що $p_n \in D(f)$.

Нехай $x_0 \in \mathbb{Q}\setminus A$ і $p_0 = (x_0, b)$. Доведемо, що відображення f неперервне в точці p_0. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер N, що $\sum\limits_{n>N} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Всі функції u_n неперервні в точці p_0, бо $p_0 \neq p_n$ для кожного n. Тому їх скінченна сума $g_N(p) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(p)$ теж буде неперервною в точці p_0 за лемою 3. Оскільки $g_N(p_0) = 0$, то знайдеться такий окіл W точки p_0 в $\mathbb{Q}\times\mathbb{L}$, що $0 \leqslant g_N(p) < \frac{\varepsilon}{2}$ для кожного $p \in W$. Тоді для кожного $p \in W$ будемо мати

$$f(p_0) = 0 \leqslant f(p) = \sum_{n=1}^{N} u_n(p) + \sum_{n>N} u_n(p) =$$

$$= g_N(p) + h_N(p) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} <$$

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon=f(p_0)+\varepsilon.$$

Таким чином, $f(p)\in[f(p_0),f(p_0)+\varepsilon)$, як тільки $p\in W$, а це і означає, що функція f неперервна в точці p_0.

7. Побудова нарізно неперервної функції $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{L}\to\mathbb{L}$, у якої $C_{\mathbb{L}}(f)=\varnothing$. Для топологічних просторів X, Y і Z і функції $f:X\times Y\to Z$ покладемо

$$C_Y(f)=\{x\in X:\{x\}\times Y\subseteq C(f)\}.$$

Легко перевірити, що

$$C_Y(f)=X\setminus \mathrm{pr}_X(D(f)),$$

де $\mathrm{pr}_X:X\times Y\to X$ – проекція на X, яка визначається формулою $\mathrm{pr}_X(x,y)=x$.

У цьому пункті ми, розвиваючи побудови з [18], побудуємо нарізно неперервне відображення $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{L}\to\mathbb{L}$, у якого $C_{\mathbb{L}}(f)=\varnothing$. Розглянемо простір $X=\mathbb{Q}\cap(0,1)$ з топологією, індукованою з $\mathbb{R}$, і простір $Y=(0,1)$ з топологією, індукованою з $\mathbb{L}$. Легко перевірити, що простір X гомеоморфний раціональній прямій $\mathbb{Q}$, а Y – прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$. Тому ми спочатку займемося побудовою прикладу нарізно неперервного відображення $f:X\times Y\to\mathbb{L}$, у якого $C_Y(f)=\varnothing$.

Розглянемо канторові сходи $g:[0,1]\to[0,1]$ (див., наприклад, [20, с.334]), неперервну зростаючу функцію, яка на інтервалах суміжності канторової множини набуває сталих значень. Точніше, нехай $\Delta_{n,1},\dots,\Delta_{n,2^{n-1}}$ – відрізки n-го рангу, такі, що відповідні інтервали $\mathring{\Delta}_{n,1},\dots,\mathring{\Delta}_{n,2^{n-1}}$, викидаються на n-му кроці при побудові канторової множини, а саме, $\Delta_{1,1}=[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $\Delta_{2,1}=[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]$, $\Delta_{2,2}=[\frac{7}{9},\frac{8}{9}]$, і т.д. Ми вважаємо, що відрізки $\Delta_{n,k}$ при $k=1,\dots,2^{n-1}$ занумеровані зліва направо у порядку зростання. Тоді $g(x)=\frac{2k-1}{2^n}$ при $x\in\Delta_{n,k}$, де $n\in\mathbb{N}$, $k=1,\dots,2^{n-1}$.

Занумеруємо відрізки $\Delta_{n,k}$ у просту послідовність

$$\Delta_{1,1},\Delta_{2,1},\Delta_{2,2},\Delta_{3,1},\Delta_{3,2},\Delta_{3,3},\Delta_{3,4},\dots,$$
$$\Delta_{n,1},\Delta_{n,2},\dots,\Delta_{n,2^{n-1}},\dots$$

і позначимо через $\overline{V}_m=[b_m,b_m+l_m]=\Delta_{n_m,k_m}$ член цієї послідовності з номером m, а через V_m – відповідний інтервал $V_m=\mathring{\Delta}_{n_m,k_m}=(b_m,b_m+l_m)$. При цьому $l_m>0$ для кожного m. Занумеруємо і двійково-раціональні числа на інтервалі $(0,1)$ у відповідну послідовність

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},\dots,\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n},\dots$$

і позначимо через $a_m=\frac{2k_m-1}{2^{n_m}}$ її член з номером m. В такому разі $g(y)=a_m$, якщо $y\in\overline{V}_m$, а $g^{-1}(a_m)=\overline{V}_m$. Крім того $g(0)=0$, $g(1)=1$.

Для кожного номера m виконується нерівність $a_m<1$, тому існує таке ірраціональне число h_m, що $0<h_m\leqslant l_m$ і $a_m+h_m<1$. Покладемо $U_m=(a_m,a_m+h_m)\cap\mathbb{Q}$ і $W_m=U_m\times V_m$. Для кожного m розглянемо нарізно неперервну функцію $u_m:X\times Y\to\mathbb{L}$

$$u_m(x,y)=f_{a_m,b_m,h_m,l_m}(x,y),$$

яка побудована в теоремі 3, для якої $\mathrm{supp}u_m\subseteq W_m$, $D(u_m)=\{p_m\}$, де $p_m=(a_m,b_m)$, при цьому $0\leqslant u_m(p)\leqslant 1$ на W_m і $u_m(p_{m,k})=1$ для деякої послідовності точок $p_{m,k}\in W_m$, яка прямує до p_m в $X\times Y$.

Розглянемо на добутку $X\times Y$ функцію

$$f(p)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(p).$$

Оскільки $V_m\cap V_j=\varnothing$ при $m\neq j$, то і $W_m\cap W_j=\varnothing$ при $m\neq j$ і $\mathrm{supp}u_m\subseteq W_m$, то $f(p)=u_m(p)$ на W_m і $f(p)=0$ на $(X\times Y)\setminus\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}W_m$.

Покажемо, що функція $f:X\times Y\to\mathbb{L}$ нарізно неперервна. Зафіксуємо деяке $y\in Y$. Якщо $y\in V_m$ для деякого номера m, то $f_y=(u_m)_y$, отже, y-розріз f_y буде неперервним, адже u_m – нарізно неперервна функція. Якщо ж $y\notin V_m$ для кожного m, то за побудовою $f_y=0$. Таким чином, функція f неперервна відносно першої змінної.

Для доведення неперервності функції f відносно другої змінної розіб'ємо квадрат $Q=[0,1]^2$ на дві множини

$$A=\{(x,y)\in Q:x\leqslant g(y)\}\text{ і }B=Q\setminus A.$$

Для точок $p=(x,y)\in W_m$ маємо, що $x>a_n=g(y)$, отже, $W_m\subseteq B$. Тому $f(p)=0$ на $A\cap T$.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in A \cap T$. Оскільки функція $g : Y \to X$ зростає, то з нерівності $y_0 \leqslant y < 1$ випливає, що $g(y_0) \leqslant g(y)$, але $x_0 \leqslant g(y_0)$, отже, і $x_0 \leqslant g(y)$. Таким чином, усі точки (x_0, y) при $y_0 \leqslant y < 1$ попадають в множину $A \cap T$ і для них $f^{x_0}(y) = f(x_0, y) = 0$. Тому функція $f^{x_0} : Y \to \mathbb{L}$ неперервна в точці y_0.

Зауважимо, що $B = \varphi^{-1}((0, +\infty))$, де $\varphi(x, y) = x - g(y)$. Функція $g : [0,1] to [0,1]$ неперервна, а з нею і функція $\varphi : Q \to \mathbb{R}$, причому множина $(0, +\infty)$ відкрита в $\mathbb{R}$, отже, і B буде відкритою множиною в Q як прообраз відкритої множини при неперервному відображенні. Множина $A = Q \setminus B$ буде замкненою в Q.

Припустимо, що $p_0 \in B \cap T$. Розглянемо відстань

$$\rho = d(p_0, A) = inf\{d(p, p_0) : p \in A\}$$

відносно метрики $d(p, p_0) = |p - p_0|_\infty$ на Q. Оскільки множина A замкнена в $\mathbb{Q}$ то $\rho > 0$, адже $p_0 \notin A$. Покладемо $\delta_0 = \frac{\rho}{2}$. Оскільки $l_m \to 0$ при $m \to \infty$, то існує такий номер m_0, що $l_m < \delta_0$ при $m > m_0$. Але $h_m \leqslant l_m$, отже, і $h_m < \delta_0$ при $m > m_0$. Оскільки для кожної точки $p = (x, y) \in W_m$ маємо, що $a_m < x < a_m + h_m$ і $b_m < y < b_m + l_m$, то

$$|p - p_m|_\infty = \max\{|x - a_m|, |y - y_m|\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{h_m, l_m\} < \delta_0$$

при $m > m_0$. При цьому $p_m \in A$, адже $g(b_m) = a_m$, отже, $d(p, A) < \delta_0$, якщо $m > m_0$. Розглянемо δ_0-окіл

$$W_0 = \{p \in T : d(p, p_0) < \delta_0\}.$$

Зрозуміло, $W_0 \cap W_m = \varnothing$ при $m > m_0$. Справді, якби для деякого $m > m_0$ існувала точка $q \in W_0 \cap W_m$, то

$$\rho = d(p_0, A) \leqslant d(p_0, q) + d(q, A) < \delta_0 + \delta_0 = \rho,$$

звідки $\rho < \rho$, що неможливо. Таким чином, множина W_0 може перетинатися лише з множинами $W_1, ..., W_{m_0}$. Звідси випливає, що $f(p) = \sum\limits_{m=1}^{m_0} u_n(p)$ на W_0.

Оскільки $p_0 \in B$, то $p_0 \neq p_m$ для кожного m, адже $p_m \in A$. Тому функції u_mнеперервні в точці p_0, а значить, і звуження $f|_{W_0}$ неперервне в точці p_0. Але множина W_0 відкрита в T. Звідси випливає, що f неперервна в точці p_0, а значить і функція f^{x_0} буде неперервною в точці y_0. Таким чином, нарізна неперервність функції f перевірена.

Тепер з'ясуємо, що $\mathrm{pr}_X(D(f)) = X$. Нехай $x_0 \in X$. Якщо $x_0 = a_m$ для деякого m, то розглянемо точку $p_m = (a_m, b_m)$ і покажемо, що f розривна в точці p_m. За побудовою існує така послідовність точок $p_{m,k} \in W_m$, що $p_{m,k} \to p_m$ в просторі $T = X \times Y$ і $u_m(p_{m,k}) = 1$ для кожного k. Тоді

$$f(p_{m,k}) = u_m(p_{m,k}) = 1$$

для кожного k. Оскільки $f(p_m) = 0$, $f(p_{m,k}) = 1 \to 1$ в $\mathbb{L}$ і $p_{m,k} \to p_m$ в T, то f розривна в точці p_m.

Нехай $x_0 \neq a_m$ для кожного m. Оскільки відображення $g : [0,1] \to [0,1]$ неперервне, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ і $0 < x_0 < 1$, то існує така точка $y_o \in Y$, що $g(y_0) = x_0$. Покажемо, що f розривна в точці $p_0 = (x_0, y_0)$. Оскільки $p_0 \in A \cap T$, то $f(p_0) = 0$. Розглянемо окіл $O = [0, \frac{1}{2})$ точки $f(p_0) = 0$ в прямій Зорґенфрея і довільний базисний окіл $W = ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}) \times [y_0, y_0 + \varepsilon)$ точки p_0 в T, де $\varepsilon > 0$. Оскільки функція $g : [0,1] \to [0,1]$ неперервна в точці y_0 і зростає, то існує таке $\delta > 0$, що $\delta < \varepsilon$ і $x_0 = g(y_0) \leqslant g(y) < g_0(y_0) + \frac{\varepsilon}{2} = x_0 + \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $y_0 \leqslant y < y_0 + \delta$. З побудови канторової множини випливає, що в інтервалі $(y_0, y_0 + \delta)$ міститься безліч відрізків V_m, зокрема, якийсь відрізок $\overline{V}_m = [b_m, b_m + l_m]$ з $l_m < \frac{\varepsilon}{2}$. Ясно, що тоді $a_m = g(b_m) \in (x_0, x_0 + \varepsilon/2)$, бо $y_m \in (y_0, y_0 + \delta)$, а тоді $a_m + h_m < a_m + l_m < x_0 + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = x_0 + \varepsilon$. Таким чином, $U_m = (a_m, a_m + h_m) \cap \mathbb{Q} \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$, а значить, $W_m \subseteq W$. Знайдемо в множині W_m таку точку p^*, що $u_m(p^*) = 1$. Тоді $f(p^*) = u_n(p^*) = 1 > \frac{1}{2}$. Ми знайшли таку точку $p^* \in W$, для якої $f(p^*) \notin O$, що і дає нам розривність функції f у точці p_0.

Таким чином, ми з'ясували, що для побудованої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{L}$ проекція $pr_X(D(f)) = X$. Звідси легко вивести таке твердження.

Теорема 5. *Існує нарізно неперервна функція $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, така, що $\mathrm{pr}_{\mathbb{Q}}(D(g)) = \mathbb{Q}$.*

Доведення. Нехай $\varphi : \mathbb{Q} \to X$ і $\psi : \mathbb{L} \to Y$ гомеоморфізми і $f : X \times Y \to \mathbb{L}$ – побудована вище нарізно неперервна функція, для якої $pr_X(D(f)) = X$. Розглянемо функцію $g(x, y) = f(\varphi(x), \psi(y))$. Зрозуміло, що ця функція $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ і буде шуканою. Нарізна неперервність функції g випливає з того, що $g^x = f^{\varphi(x)} \circ \psi$ і $g_y = f_{\psi(y)} \circ \varphi$. Перевіримо рівність $\mathrm{pr}_{\mathbb{Q}}(D(g)) = \mathbb{Q}$. Нехай $x_0 \in \mathbb{Q}$. Розглянемо точку $u_0 = \varphi(x_0) \in X$. Оскільки $pr_X(D(f)) = X$, то існує така точка $v_0 \in Y$, що $q_0 = (u_0, v_0) \in D(f)$. Візьмемо, ту єдину точку $y_0 \in \mathbb{L}$, що $v_0 = \psi(y_0)$. Оскільки відображення $\varphi \times \psi : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to X \times Y$, $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ – це теж гомеоморфізм, і $q_0 \in D(f)$, то $p_0 = (x_0, y_0) \in D(g)$, адже $g = f \circ (\varphi \times \psi)$ і $(\varphi \times \psi)(p_0) = q_0$. Отже, $x_0 = \mathrm{pr}_{\mathbb{Q}} p_0 \in pr_X(D(g))$.

8. Прикінцеві зауваження. Природно також поставити питання про опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$. Легко зрозуміти, що всі теореми, які ми довели тут для відображень $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ переносяться і на випадок відображень $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$.

Вихідним тут є таке твердження:

Лема 9. *Нехай $I = [a, b), J = [c, d)$ і $P = I \times J$. Тоді функція $f = \chi_P : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$ неперервна.*

Доведення. Це негайно випливає з леми 5, оскільки множина P буде відкрито-замкненою в $\mathbb{L}^2$.

На основі леми 9 так само як у п.5 будується нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$ з одноточковою множиною точок розриву.

Теорема 6. *Нехай $c = (a, b) \in \mathbb{L}^2$, α і β – додатні дійсні числа, $\alpha_n = \frac{\alpha}{n}$, $\beta_n = \frac{\beta}{n}$, $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, $I_n = [a_{n+1}, a_n)$, $J_n = [b_{n+1}, b_n)$, $I = (a, a + \alpha)$, $J = (b, b + \beta)$, $P_n = I_n \times J_n$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ і $P = I \times J$. Тоді функція*

$$f = f_{a,b,\alpha,\beta} = \chi_E : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$$

буде нарізно неперервною, $D(f) = \{c\}$, $\mathrm{supp} f \subseteq P$, $0 \leqslant f(p) \leqslant 1$ на $\mathbb{L}^2$ і для кожного $x \in \mathbb{L}$ вертикальний x-розріз $f^x = \chi_{[\gamma_1, \gamma_2)}$ деякого напіввідкритого проміжка $[\gamma_1, \gamma_2)$, для деяких $b < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 < b_1 = b + \beta$.

Повторюючи побудови з доведення теореми 4, ми з теореми 6 виводимо наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай A – довільна не більш ніж зліченна підмножина прямої Зорґенфрея $\mathbb{L}$ і $b \in \mathbb{L}$. Тоді існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$, таке, що $D(f) = A \times \{b\}$.*

Нарешті з теореми 6 як у п. 7 виводиться

Теорема 8. *Існує нарізно неперервне відображення $g : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$, таке, що $C_{\mathbb{L}}(g)) = \varnothing$.*

1. *Sorgenfrey R.H.* On the topological product of paracompact spaces // Bull. Amer. Math. Soc. – 1947. – 53. – P. 631-632.

2. *Alexandroff P., Urysohn P.* Memoire sur les espaces topologiques compacts // Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam. – 1929. – 14. – 1-96p.

3. *Александров П.С., Урысон П.С.* Мемуар о компактных топологических пространствах. – М.: Наука, 1971. – 144с.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752с.

5. *Патракеев М.А.* Топология прямой Зоргенфрея. Дис...канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. – Екатеренбург, 2005. – 70 с.

6. *Кожукар О.Г., Маслюченко В.К.* Навколо теореми Дебса про многозначні відображення // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 191 – 192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 61 - 66.

7. *Маслюченко В.К., Фотій О.Г.* Неперервні знизу відображення з компактними значеннями в прямій Зорґенфрея // Мат. студії. – 2005. – **24**, №2. – С. 203 - 206.

8. *Маслюченко В.К., Фотій О.Г.* Неперервні зверху відображення зі значеннями в прямій Зорґенфрея // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 68 - 72.

9. *Фотій О.Г.* Зв'язки між різними типами неперервності многозначних відображень. Дис...канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Чернівці, 2007. – 122 с.

10. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Фотій О.Г.* Простір n-точкових множин і n-значні відображення // Доповіді НАН України. – 2006, №10. – С. 24 - 27.

11. *Маслюченко В.К. Фотій О.Г.* Сталість неперервних зверху двозначних відображень у пряму Зорґенфрея // Укр. мат. журн.– 2007, **59**, №8 – с.1034-1039.

12. *В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко, О. Г. Фотій.* Про неперервність знизу неперервних зверху відображень зі значеннями в прямій Зорґенфрея // Мат. студії. -– 2013. -– **40**, №1. — С.23–29.

13. *Кендеров П.С.* Многозначные отображения и их свойства, подобные непрерывности // Успехи мат. наук. – 1980. – **35**, N 3. – С. 194 - 196.

14. *Debs G.* Points de continuité d'une function séparément continue // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**, №1. – P. 167 - 176.

15. *Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* Істотність σ-метризовності в результатах про сукупну неперервність KC-функцій // Міжнар. конф., присв. 125 річн. від нар. Ганса Гана. Чернівці, 27 червня – 3 липня 2004 р. Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 65-66.

16. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори // Мат. вісн. НТШ. – 2010. – **7**. – С.111-121.

17. *Banakh T.O.* (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions // Мат.Студії. – 2002. – 18, №1. – С.10-18.

18. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Пряма Зорґенфрея і конаміокові простори // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 239. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 92 - 93.

19. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Нарізно неперервні відображення і пряма Зорґенфрея // КММК-2013. Тези доповідей. 22 вересня - 4 жовтня, Судак, 2013. - С. 4-5.

20. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Елементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1968. – 496с.