УДК 517.956

©2014 р. О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРОСТОРИ ТИПУ S ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Досліджено топологічну структуру просторів типу S та властивості основних операцій у цих просторах.

We study the topological structure of S type spaces and properties of the main operations on these spaces.

І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов у відомій монографії "Пространства основных и обобщенных функций" [1] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних із збільшенням порядку, які задаються за допомогою нерівностей $|x^k\varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{kn}$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{kn}\}$ – подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом з φ, то маємо простір Л. Шварца $S \equiv S(\mathbb{R})$ швидко спадних на $\mathbb{R}$ функцій. Якщо $c_{kn} = l_k m_n$, де $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – деякі послідовності, то маємо простори $S_{l_k}^{m_n}$, які і на теперішній час повністю ще не досліджені. Найбільш детально вивчений випадок, коли $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha > 0$, $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$; відповідні простори при цьому позначають символом S_α^β.

Відомі простори типу W, введені Б.Л. Гуревичем [2] (див. також [3]), в яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності замість степеневих використовуються опуклі функції, також вкладаються в простори $S_{l_k}^{m_n}$ при конкретному виборі послідовностей $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ (див. [4]). Простори S_α^β, а також простори типу W використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими (або залежними лише від часу) коефіцієнтами. Представляє науковий інтерес більш детальне вивчення просторів $S_{l_k}^{m_n}$, які є узагальненнями просторів S_α^β (дослідження топологічної структури, властивостей функцій, основних операцій у вказаних просторах). У даній роботі даються відповіді саме на ці питання.

1. Простори S^{m_n}. Топологічна структура

Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка володіє наступними властивостями:

1) $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+ \ \forall n \geqslant n_0$: $m_n \leqslant m_{n+1}$; $m_n \geqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$;

2) $\forall \alpha > 0 \ \exists c_\alpha > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geqslant c_\alpha \cdot \alpha^n$;

3) $\exists M > 0 \ \exists h > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leqslant \leqslant M h^n m_n$;

4) $\exists \gamma > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$: $m_n^2 \leqslant \gamma m_{n-1} \cdot m_{n+1}$;

5) $\exists A > 0 \ \exists L > 0 \ \forall \{n,l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_n \cdot m_l \leqslant \leqslant A L^{n+l} m_{n+l}$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_n = (n!)^\beta$, $m_n = n^{n\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\beta > 0$ – фіксований параметр. Зауважимо, що послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ можна будувати, як доведено в [5], за допомогою неперервних функцій G: $[0,\infty) \to (0,\infty)$, котрі володіють наступними властивостями:

$1'$) $G(\lambda) \geqslant 1$, $\lambda \in [0,\infty)$; $\lim\limits_{\lambda\to\infty} G(\lambda) = +\infty$;

$2'$) функція G неперервно диференційовна і монотонно зростаюча на $[0,\infty)$;

$3'$) $\exists c > 0 \ \exists \alpha_0 > 0 \ \forall \lambda \in (0,\infty)$: $\lambda^{-1}G(\lambda) \geqslant \geqslant cG(\alpha_0\lambda)$;

$4'$) функція $\lambda G'(\lambda) G^{-1}(\lambda)$ монотонно зростає на $[0,\infty)$;

$5'$) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \exists \lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) > 0 \ \forall \lambda \geqslant \lambda_0$ $G(\lambda) \geqslant c_\varepsilon e^{\varepsilon\lambda}$;

при цьому $m_n = \sup\limits_{\lambda \geqslant 1}(\lambda^n / G(\lambda))$ (див. [5]). Як доведено в [5], правильними є нерівності

$$\sup_n \frac{\lambda^n}{m_n} \leqslant G(\lambda) \leqslant \lambda \sup_n \frac{\lambda^n}{m_n}, \quad \lambda \in [1, +\infty); \tag{1}$$

функція $\lambda G'(\lambda) G^{-1}(\lambda)$ монотонно зростає на $[0, \infty)$.

Прикладом функції G, яка задовольняє умови $1')$ – $5')$, може служити функція $\exp(\lambda^{1/\beta})$, $\lambda \in [0, \infty)$, де $\beta > 0$ – фіксований параметр. Безпосередньо переконуємося в тому, що відповідна послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, яка задовольняє умови 1) – 5), має вигляд: $m_n = (\beta e)^{n\beta} n^{n\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Символом S^{m_n} позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in S$, які задовольняють умову

$$\exists B > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c_k > 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}_+ \; \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_k B^n m_n \tag{2}$$

(сталі c_k, $B > 0$ залежать від φ). Топологічна структура в S^{m_n} визначається так. Символом $S^{m_n,B}$ позначимо сукупність таких функцій $\varphi \in S^{m_n}$, що

$$\forall \overline{B} > B \; \forall x \in \mathbb{R} : \; |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{k\overline{B}} \cdot \overline{B}^n m_n,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Інакше, $S^{m_n,B}$ складається з тих функцій $\varphi \in S^{m_n}$, які при довільному $\delta > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{k\delta} (B + \delta)^n m_n, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{k\delta} = \sup_{x,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(B+\delta)^n m_n},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, \delta \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Доведення цього твердження проводиться як і у випадку просторів $S^{\beta,B}$, побудованих за допомогою послідовності Жевре $m_n = n^{n\beta}$, де $\beta > 0$ [1].

Якщо $B_1 < B_2$, то S^{m_n,B_1} неперервно вкладається в $S^{m_n B_2}$ і кожна послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geqslant 1\}$ збіжна в просторі S^{m_n,B_1}, збігається і в просторі S^{m_n,B_2}. Отже, можна побудувати об'єднання зліченно нормованих просторів $S^{m_n,B}$ за всіма індексами $B \in \mathbb{N}$. Оскільки кожна функція $\varphi \in S^{m_n}$ належить до деякого $S^{m_n,B}$, то об'єднання просторів $S^{m_n,B}$ збігається з простором S^{m_n}. У зв'язку з цим послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geqslant 1\} \subset S^{m_n}$ називається збіжною до нуля (в S^{m_n}), якщо всі функції φ_ν належать деякому простору $S^{m_n,B}$ і збігаються до нуля за його топологією. Це означає [1], що послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geqslant 1\}$ правильно збігається до нуля (тобто функціональна послідовність $\{\varphi_\nu^{(q)}, \nu \geqslant 1\}$ при довільному $q \in \mathbb{Z}_+$ рівномірно збігається до нуля на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$) і для деяких c_k, $B > 0$, не залежних від ν, справджуються нерівності $|x^k \varphi_\nu^{(q)}(x)| \leqslant c_k B^q m_q$.

Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ спеціального вигляду, а саме $m_n = n! \rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – послідовність додатних чисел, яка задовольняє наступні умови: а) послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна; б) $\exists \omega > 1 \; \forall n \geqslant 1 \; \rho_{n-1}/\rho_n \leqslant \omega$; в) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$;

г) $\exists a > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists c_\varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}_+ :$

$$\rho_n \geqslant c_\varepsilon \inf_{\lambda \geqslant 1} \frac{e^{\varepsilon \lambda}}{(a\lambda)^n}.$$

Передусім зазначимо, що послідовність $\{n! \rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову 1). Справді, із а), б) випливає, що

$$m_n = n! \rho_n = (n+1) n! \rho_{n+1} \frac{\rho_n}{(n+1)\rho_{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega}{n+1} m_{n+1} \leqslant m_{n+1}, \forall n \geqslant n_0,$$

де $n_0 = [\omega - 1] + 1$.

Із умови г) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists c_\varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \; \rho_n \geqslant c_\varepsilon \varepsilon^n n^{-n} e^n a^{-n}.$$

Скориставшись формулою Стірлінга, знайдемо, що

$$n! \rho_n \geqslant \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n e^{\theta_n/(12n)} c_\varepsilon \varepsilon^n n^{-n} e^n a^{-n} \geqslant$$

$$\geqslant c_\varepsilon A^n \varepsilon^n, \; 0 < \theta_n < 1, A = a^{-1},$$

тобто послідовність $\{n! \rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ умову 2) також задовольняє.

Перевіримо виконання умови 3). Оскільки послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна, то, внаслідок формули Стірлінга, дістанемо, що

$$m_{n+1} \equiv (n+1)!\rho_{n+1} \leqslant (n+1)!\rho_n \leqslant$$
$$\leqslant Mh^n n!\rho_n, M = \sqrt{2}e, h = 2.$$

Отже, умова 3) виконується.

Доведемо, що послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, де $m_n = n!\rho_n$, володіє властивістю 4) (властивістю логарифмічної опуклості), яку запишемо у вигляді $m_n^2(m_{n-1} \cdot m_{n+1})^{-1} \leqslant \gamma$. Урахувавши властивість б), а також те, що послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{N}\}$ монотонно спадна, знайдемо, що

$$\frac{m_n^2}{m_{n-1} \cdot m_{n+1}} \leqslant \frac{(n!)^2 \rho_n^2}{(n-1)!(n+1)!\rho_{n-1} \cdot \rho_{n+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \cdot \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \leqslant \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \leqslant \omega.$$

Отже, нерівність логарифмічної опуклості для послідовності $n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, виконується з параметром $\gamma = \omega$.

Переконаємося тепер у тому, що послідовність $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, задовольняє умову 5). Для цього досить встановити існування чисел A, $L > 0$ таких, що

$$\frac{m_n \cdot m_l}{m_{n+l}} \leqslant AL^{n+l}, \quad \{n, l\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Урахувавши формулу Стірлінга, прийдемо до нерівності

$$\frac{m_n \cdot m_l}{m_{n+l}} \leqslant c \cdot 2^{n+l} \frac{n^n l^l \rho_n \rho_l}{(n+l)^{n+l}\rho_{n+l}}, \quad \{n, l\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

З умови б) випливає, що

$$\frac{\rho_n}{\rho_{n+l}} = \frac{\rho_n}{\rho_{n+l}} \frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}} \ldots \frac{\rho_{n+l-1}}{\rho_{n+l}} \leqslant \omega^l.$$

Нехай $n \geqslant l$. Оскільки послідовність $\{\rho_l, l \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна, то $\rho_l \leqslant \rho_0$, $\forall l \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$\frac{m_n \cdot m_l}{m_{n+l}} \leqslant c2^{n+l} \frac{n^n l^l}{n^{n+l}(1 + l/n)} \frac{\rho_n}{\rho_{n+l}} \rho_l \leqslant$$
$$\leqslant c2^{n+l} \frac{(l/n)^l \omega^l \rho_0}{\left(1 + \frac{l}{n}\right)^l} \leqslant AL^{n+l}, \quad A = c\rho, L = 2\omega,$$

що й потрібно було довести. Випадок $n \leqslant l$ розглядається аналогічно.

Послідовності $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, які володіють властивостями а) – г), можна будувати за допомогою послідовностей $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, котрі задовольняють умови 1) – 5). Вважаємо, що послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ побудована за функцією G, яка, крім умов $1')$ – $4')$, задовольняє ще умову $5')$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists c_\varepsilon > 0 \; \exists x_0 = x_0(\varepsilon) > 0 \; \forall x \geqslant x_0 :$$
$$G(x) \geqslant c_\varepsilon e^{a_0 \varepsilon x}, x_0 = \alpha_0^{-1},$$

де $\alpha_0 > 0$ – стала з умови $3')$. Прикладом функції G, яка задовольняє вказану умову, може служити функція $G(x) = \exp(x^{1/\beta})$, $x \in (0, \infty)$, де $\beta \in (0, 1)$ – фіксоване число.

Покладемо

$$\rho_0(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x|^n}{m_n}, \; |x| \geqslant 1;$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \rho_0(x), & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

де послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умови 1) – 5). Зазначимо, що ρ – неперервна, парна, невід'ємна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$ і монотонно спадає на $(-\infty, 1]$. З $3')$ та (1) випливають нерівності:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{x^n}{m_n} \equiv \rho_0(x) \geqslant \frac{G(x)}{x} \geqslant$$
$$\geqslant cG(\alpha_0 x) \geqslant cc_\varepsilon e^{\varepsilon x}, x \geqslant x_0 > 0. \tag{4}$$

Отже,

$$\frac{\rho(x)}{|x|^n} \geqslant c'_\varepsilon \frac{e^{\varepsilon |x|}}{|x|^n}, \quad |x| \geqslant x_0, n \in \mathbb{Z}_+, c'_\varepsilon = cc_\varepsilon. \tag{5}$$

Звідси дістаємо, що

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{\rho(x)}{|x|^n} = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

Нехай

$$\rho_n := \inf_{x \neq 0} \Omega_n(x), \quad \Omega_n(x) := \frac{\rho(x)}{|x|^n},$$
$$x \neq 0, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Наприклад, якщо $m_n = n^{n\beta}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(x) \sim \exp(|x|^{1/\beta})$, а $\rho_n = e^{n\beta}(n\beta)^{-n\beta}$.

Оскільки

$$\lim_{|x|\to 0} \Omega_n(x) = \begin{cases} \rho(0) = 1, & n = 0, \\ +\infty, & n \geqslant 1, \end{cases}$$

то звідси та з (6) випливає, що функція $\Omega_n(x)$, $x \neq 0$, досягає свого інфімуму. Крім того,

$$\inf_{x\neq 0} \frac{1}{|x|^n} = \begin{cases} 1, & |x| < 1, x \neq 0, \\ 0, & |x| \geqslant 1, n \geqslant 1. \end{cases}$$

Урахувавши, що $\rho(x) = 1$, $|x| < 1$, маємо

$$\rho_n = \inf_{|x|\geqslant 1} \frac{\rho(x)}{|x|^n} = \inf_{|x|\geqslant 1} \frac{\rho_0(x)}{|x|^n}.$$

Оскільки $\Omega_{n+1}(x) = \rho(x)/|x|^{n+1}$, $x \neq 0$, то

$$\Omega_{n+1}(x) = \frac{1}{|x|}\Omega_n(x) \leqslant \Omega_n(x), \quad |x| \geqslant 1.$$

Звідси дістаємо, що послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна (властивість а)).

Доведемо тепер, що послідовність $\left\{\dfrac{\rho_{n-1}}{\rho_n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ обмежена зверху.

Маємо, що $\rho_{n-1} = \inf\limits_{|x|\geqslant 1} \dfrac{\rho_0(x)}{|x|^{n-1}}$, де $\rho_0(x) = \sup\limits_n \dfrac{|x|^n}{m_n}$, $|x| \geqslant 1$. Зафіксуємо x: $|x| \geqslant 1$. Тоді для довільного ε: $0 < \varepsilon < \rho_0(x)$ знайдеться номер $n_1 = n_1(\varepsilon, x)$ такий, що $\dfrac{|x|^{n_1}}{m_{n_1}} > \rho_0(x) - \varepsilon$. Покладемо $\varepsilon = \dfrac{1}{q}\rho_0(x)$, $q > 1$. Тоді

$$\rho_0(x) - \varepsilon = \Big(1 - \frac{1}{q}\Big)\rho_0(x) < \frac{|x|^{n_1}}{m_{n_1}}, \quad |x| \geqslant 1,$$

або

$$\rho_0(x) < \frac{q}{q-1}\frac{|x|^{n_1}}{m_{n_1}} \equiv \tilde{\alpha}_0 \frac{|x|^{n_1}}{m_{n_1}}, \tilde{\alpha}_0 > 1, |x| \geqslant 1.$$

Звідси дістаємо нерівності

$$\rho_{n-1} \leqslant \frac{\rho_0(x)}{|x|^{n-1}} \leqslant \tilde{\alpha}_0 \frac{|x|^{n_1}}{|x|^{n-1}\cdot m_{n_1}} =$$

$$= \tilde{\alpha}_0 \frac{\rho_0(x)}{|x|^n}\frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x) m_{n_1}}, \quad |x| \geqslant 1.$$

Оцінимо вираз $\dfrac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x) m_{n_1}}$:

$$\frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x) m_{n_1}} = \Big(\frac{\rho_0(x)}{|x|^{n_1+1}} \cdot m_{n_1}\Big)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\inf_{|x|\geqslant 1} \frac{\rho_0(x)}{|x|^{n_1+1}} \cdot m_{n_1}\Big)^{-1} = \frac{1}{\rho_{n_1+1}\cdot m_{n_1}}.$$

Оскільки

$$\rho_{n_1+1} = \inf_{|x|\geqslant 1} \frac{\rho_0(x)}{|x|^{n_1+1}} = \Big(\sup_{|x|\geqslant 1} \frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x)}\Big)^{-1},$$

то

$$\sup_{|x|\geqslant 1} \frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x)} = (\rho_{n_1+1})^{-1}.$$

Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon_0 \in (0,1)$ знайдеться x_0: $|x_0| \geqslant 1$ таке, що

$$\frac{1}{\rho_{n_1+1}} < \frac{|x_0|^{n_1+1}}{\rho_0(x_0)} + \varepsilon_0.$$

Оскільки $m_{n_1} \geqslant 1$, то

$$\frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x) m_{n_1}} < \frac{1}{m_{n_1}}\Big(\frac{|x_0|^{n_1+1}}{\rho_0(x_0)} + \varepsilon_0\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x_0|^{n_1}}{m_{n_1}}\frac{|x_0|}{\rho_0(x_0)} + \varepsilon_0 \leqslant$$

$$\leqslant \rho_0(x_0)\frac{|x_0|}{\rho_0(x_0)} + \varepsilon = |x_0| + \varepsilon_0 \leqslant |x_0| + 1.$$

Тоді

$$\rho_{n-1} \leqslant \tilde{\alpha}_0(|x_0| + 1) \inf_{|x|\geqslant 1} \frac{\rho_0(x)}{|x|^n} \equiv \omega \cdot \rho_n, \quad (7)$$

де $\omega = \tilde{\alpha}_0(|x_0| + 1) > 1$, що й потрібно було довести.

Зауважимо, що з (7) випливають нерівності:

$$\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} = \frac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-1}}\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \leqslant \omega^2, \quad \frac{\rho_{n-3}}{\rho_n} \leqslant \omega^3, \ldots$$

Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Оскільки послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна і обмежена знизу ($\rho_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$), то вона збіжна: $\exists a_0 \geqslant 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \inf\limits_n\{\rho_n\} = a_0$. Переконаємося в тому, що $a_0 = 0$. Припустимо, що $a_0 > 0$. Тоді $\rho_n \geqslant a_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ та для $\varepsilon = a_0/2$ знайдеться номер $\tilde{n}_0 = \tilde{n}_0(\varepsilon)$ такий, що $\rho_{n_0} < \dfrac{3}{2}a_0$. Оскільки $\rho_n \leqslant \rho_0$, $n \geqslant \tilde{n}_0$, то $a_0 \leqslant \rho_n < \dfrac{3}{2}a_0$, $n \geqslant \tilde{n}_0$. Крім того, для $\varepsilon = a_0/2$ знайдеться x_ε: $|x_\varepsilon| \geqslant 1$ таке, що

$$\rho_n \leqslant \frac{\rho(x_\varepsilon)}{|x_\varepsilon|^n} < \rho_n + \frac{a_0}{2}, \quad \forall n \geqslant \tilde{n}_0.$$

Отже,

$$a_0 \leqslant \frac{\rho(x_\varepsilon)}{|x_\varepsilon|^n} < 2a_0, \quad \forall n \geqslant \tilde{n}_0,$$

або

$$a_0|x_\varepsilon|^n \leqslant \rho(x_\varepsilon) < 2a_0|x_\varepsilon|^n, \quad \forall n \geqslant \tilde{n}_0.$$

Оскільки $\rho(x_\varepsilon) = \sup\limits_n(|x_\varepsilon|^n/m_n)$, то для довільного $\nu_k \in (0, a_0/2)$, $k \in \mathbb{N}$, знайдеться номер n_k такий, що

$$\frac{|x_\varepsilon|^{n_k}}{m_{n_k}} > \rho(x_\varepsilon) - \nu_k > a_0|x_\varepsilon|^{n_k} - \nu_k,$$

або

$$m_{n_k} < \frac{|x_\varepsilon|^{n_k}}{a_0|x_\varepsilon|^{n_k} - \nu_k} = \Big(a_0 - \frac{\nu_k}{|x_\varepsilon|^{n_k}}\Big)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a_0 - \nu_k}, \quad |x_\varepsilon| \geqslant 1.$$

Оскільки $a_0 - \nu_k > a_0 - \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{a_0}{2}$, $\forall k \geqslant$ $\geqslant 1$, то $m_{n_k} \leqslant \dfrac{2}{a_0}$, $\forall k \geqslant 1$. Отже, у послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, яка монотонно зростає ($m_n \leqslant m_{n+1}$, $\forall n \geqslant \max(n_0, \tilde{n}_0)$), існує обмежена зверху підпослідовність. Одержане протиріччя доводить, що $a_0 = 0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

З останнього співвідношення випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \rho_n}{n} = a$, де $a \in (-\infty, 0]$, або $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \rho_n}{n} = -\infty$. Оскільки $\sqrt[n]{\rho_n} = \exp\Big\{\dfrac{\ln \rho_n}{n}\Big\}$, то маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = a_1$, де $a_1 = e^a > 0$, або $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Доведемо, що в даному випадку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$.

Припустимо, що це не так, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = a_1 > 0$. Тоді для $\varepsilon = a_1/2$ знайдеться номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такий, що

$$\frac{a_1}{2} < \sqrt[n]{\rho_n} < \frac{3}{2}a_1, \quad \forall n \geqslant n_0,$$

або

$$\Big(\frac{a_1}{2}\Big)^n < \rho_n < \Big(\frac{3}{2}a_1\Big)^n, \quad \forall n \geqslant n_0 \Leftrightarrow$$

$$\Big(\frac{a_1}{2}\Big)^{n+n_0} < \rho_{n+n_0} < \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n+n_0}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Із означення ρ_{n+n_0} випливає, що для $\varepsilon = a_1/2$ знайдеться x_ε: $|x_\varepsilon| \geqslant 1$ таке, що

$$\rho_{n+n_0} \leqslant \frac{\rho(x_\varepsilon)}{|x_\varepsilon|^{n+n_0}} < \rho_{n+n_0} + \frac{a_1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\frac{\rho(x_\varepsilon)}{|x_\varepsilon|^{n+n_0}} \geqslant \rho_{n+n_0} > \Big(\frac{a_1}{2}\Big)^{n+n_0}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

тобто

$$\rho(x_\varepsilon) > \Big(\frac{a_1}{2}\Big)^{n+n_0}|x_\varepsilon|^{n+n_0} \geqslant \Big(\frac{a_1}{2}\Big)^{n_0}|x_\varepsilon|^{n+n_0},$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0$$

(тут враховано, що $0 < a_1 \leqslant 1$).

Оскільки $\rho(x_\varepsilon) = \sup\limits_n(|x_\varepsilon|^n/m_n)$, то для довільного ε_k: $0 < \varepsilon_k < \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a_1}{2}\Big)^{n_0}$, $k \in \mathbb{N}$, знайдеться номер n_k такий, що

$$\frac{|x_\varepsilon|^{n_k}}{m_{n_k}} > \rho(x_\varepsilon) - \varepsilon_k > \Big(\frac{a_1}{2}\Big)^{n_0}|x_\varepsilon|^{n+n_0} - \varepsilon_k \geqslant$$

$$\geqslant \Big(\frac{a_1}{2}\Big)^{n_0} - \varepsilon_k > \frac{1}{2}\Big(\frac{a_1}{2}\Big)^{n_0},$$

або

$$m_{n_k} < 2\Big(\frac{2}{a_1}\Big)^{n_0}|x_\varepsilon|^{n_k} \equiv c_0|x_\varepsilon|^{n_k}.$$

Отже, у послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, яка задовольняє умову 2), існує підпослідовність, яка цю умову не задовольняє. Одержане протиріччя доводить, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$.

Введемо позначення

$$\tilde{\rho}_n := \inf_{|x|\geqslant\tilde{x}_0} \frac{\rho_0(x)}{|x|^n},$$

$$\tilde{x}_0 = \begin{cases} x_0, & \text{якщо } x_0 \geqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } 0 < x_0 < 1, \end{cases}$$

де $x_0>0$ – параметр з умови 5′). З нерівності (4) випливає, що послідовність $\{\tilde\rho_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\tilde c_\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{Z}_+:\ \ \tilde\rho_n\geqslant$$
$$\geqslant\tilde c_\varepsilon\inf_{|x|\geqslant\tilde x_0}\frac{e^{\varepsilon|x|}}{|x|^n}\geqslant\tilde c_\varepsilon\inf_{|x|\geqslant1}\frac{e^{\varepsilon|x|}}{|x|^n},\qquad(8)$$

при цьому послідовність $\{\tilde\rho_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$, як і послідовність $\{\rho_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$, є монотонно спадною. Оскільки $\lim\limits_{|x|\to\infty}(\rho_0(x)/|x|^n)=+\infty$ для фіксованого $n\in\mathbb{Z}_+$, то

$$\tilde\rho_n=\inf_{|x|\geqslant x_0}\frac{\rho_0(x)}{|x|^n}\geqslant\inf_{|x|\geqslant1}\frac{\rho_0(x)}{|x|^n}=\rho_n,\quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Нехай $c>0$ – така стала, що $\rho_1\geqslant c\tilde\rho_1$. Звідси, з нерівності (7) та властивості монотонного спадання послідовності $\{\tilde\rho_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ випливає, що

$$\rho_2\geqslant\frac{1}{\omega}\rho_1\geqslant\frac{c}{\omega}\tilde\rho_1\geqslant\frac{c}{\omega}\tilde\rho_2,\rho_3\geqslant\frac{1}{\omega}\rho_2\geqslant\frac{c}{\omega^2}\tilde\rho_2\geqslant$$
$$\geqslant\frac{c}{\omega^2}\tilde\rho_3,\ldots,\rho_n\geqslant\frac{c}{\omega^{n-1}}\tilde\rho_n,\ldots$$

Тоді, з урахуванням (8),

$$\rho_n\geqslant\frac{c\tilde c_\varepsilon}{\omega^{n-1}}\inf_{|x|\geqslant1}\frac{e^{\varepsilon|x|}}{|x|^n}=c'_\varepsilon\inf_{|x|\geqslant1}\frac{e^{\varepsilon|x|}}{|\omega x|^n},\quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Отже, послідовність $\{\rho_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову 2).

Відзначимо, що послідовність $\rho_n=\inf\limits_{|x|\geqslant1}(\rho(x)/|x|^n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, володіє властивістю

$$\rho_n\leqslant\rho_{n-k}\cdot\rho_k,\quad\forall k:\ 0\leqslant k\leqslant n.\qquad(9)$$

Справді,

$$\rho_n=\inf_{|x|\geqslant1}\frac{\rho(x)}{|x|^n}=\inf_{|x|\geqslant1}\left\{\frac{\rho(x)}{|x|^{n-k}}\cdot\frac{1}{|x|^k}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{|x|\geqslant1}\left\{\frac{\rho(x)}{|x|^{n-k}}\cdot\frac{\rho(x)}{|x|^k}\right\}=$$
$$=\inf_{|x|\geqslant1}\frac{\rho(x)}{|x|^{n-k}}\cdot\inf_{|x|\geqslant1}\frac{\rho(x)}{|x|^k}=\rho_{n-k}\cdot\rho_k$$

(тут враховано, що $\rho(x)\geqslant1$, $|x|\geqslant1$), що й потрібно було довести. Із (9) випливає також, що справджується нерівність $\rho_{2n}\leqslant\rho_n^2$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

У подальших дослідженнях будемо користуватися ще однією властивістю функції ρ, яку доведемо в наступному твердженні.

Лема 1. *Функція ρ диференційовна на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Передусім дослідимо функцію ρ на диференційовність у точках $x=\pm1$. Урахувавши парність цієї функції, проаналізуємо випадок $x=1$. За означенням,

$$\rho'(1+0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\rho(1+\Delta x)-\rho(1)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{(1+\Delta x)^n}{m_n}-1\right\}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{\Delta x}\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\{\frac{(1+\Delta x)^n}{m_n}-1\right\}.$$

Розглянемо функцію

$$\tilde\rho(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(|x|^n/m_n), & |x|\geqslant1.\end{cases}$$

Нехай $\{\varepsilon_k, k\in\mathbb{N}\}$ – монотонно прямуюча до нуля послідовність додатних чисел. Із означення функції $\tilde\rho$ випливає, що для фіксованого $\Delta x\in(0,1)$ і $\varepsilon_k=(\Delta x)^{2k}$

$$\exists n_k=n_k(\varepsilon_k)\geqslant1:$$
$$\frac{(1+\Delta x)^{n_k}}{m_{n_k}}>\tilde\rho(1+\Delta x)-\varepsilon_k,$$

тобто

$$\tilde\rho(1+\Delta x)<\frac{(1+\Delta x)^{n_k}}{m_{n_k}}+\varepsilon_k,\quad k\geqslant1.$$

Крім того, для довільного $\alpha>0$ правильною є нерівність $m_k\geqslant(\alpha^n/\tilde\rho(\alpha))$, $n\in\mathbb{N}$, оскільки $\tilde\rho(\alpha)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\alpha^n/m_n)$. Отже,

$$\forall k\geqslant1:\ \ \tilde\rho(1+\Delta x)\leqslant\frac{(1+\Delta x)^{n_k}}{\alpha^{n_k}}\tilde\rho(\alpha)+\varepsilon_k\leqslant$$
$$\leqslant(1+\Delta x)^{n_k}\inf_{\alpha>0}\frac{\tilde\rho(\alpha)}{\alpha^{n_k}}+\varepsilon_k=(1+\Delta x)^{n_k}\rho_{n_k}+\varepsilon_k.$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{\rho_{n_k}}=0$, то для $\varepsilon=(1+\Delta x)^{-1}>0$ знайдеться номер $k_0=k_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $k\geqslant k_0$

$$\rho_{n_k}<\varepsilon^{n_k}=\frac{1}{(1+\Delta x)^{n_k}}.$$

Тоді

$$\forall k\geqslant k_0:\ \ (1+\Delta x)^{n_k}\rho_{n_k}+\varepsilon_k\leqslant1+(\Delta x)^{2k}\leqslant$$

$$\leqslant 1+(\Delta x)^{2k_0}.$$

Отже, $\tilde{\rho}(1+\Delta x)-1\leqslant(\Delta x)^{2k_0}$. Якщо $n=0$, то

$$\frac{(1+\Delta x)^n}{m_n}\Big|_{n=0}=1,\quad \frac{(1+\Delta x)^n}{m_n}\Big|_{n=0}-1=0.$$

Таким чином, $0\leqslant\dfrac{\Delta\rho(1)}{\Delta x}\leqslant(\Delta x)^{2k_0-1}$, звідки і випливає співвідношення $\rho'(1+0)=0$. Для односторонньої похідної функції ρ у точці $x=1$ зліва маємо:

$$\rho'(1-0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\rho(1+\Delta x)-\rho(1)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1-1}{\Delta x}=0.$$

Отже, $\rho'(1+0)=\rho'(1-0)=0$. Це і означає, що похідна функції ρ у точці $x=1$ існує і дорівнює нулеві. Диференційовність функції ρ у довільній точці $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$ доводиться аналогічно. Диференційовність функції ρ у кожній точці $x\in(-1,1)$ є очевидною, оскільки $\rho=1$ на інтервалі $(-1,1)$.

Лема доведена.

Використовуючи лему 1 знайдемо ще одне спеціальне зображення елементів послідовності $\{\rho_k,k\in\mathbb{Z}_+\}$. З цією метою для кожного $k\in\mathbb{N}$ розглянемо функцію $\varphi_k(y):=y^{-k}\rho(y)$, $y\in(0,+\infty)$, яка є диференційовною на $(0,+\infty)$. Оскільки $\rho(y)\geqslant c_\varepsilon\exp(\varepsilon y)$, $\varepsilon>0$, $y\geqslant y_0>0$ (див. (5)), то звідси випливає, що $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi_k(y)=+\infty$. Крім того, $\lim\limits_{y\to+0}\varphi_k(y)=+\infty$ і $\varphi_k(y)>0$, $y\in(0,+\infty)$. Отже, φ_k досягає свого мінімуму на проміжку $(0,+\infty)$, який знайдемо за допомогою методів диференціального числення:

$$\varphi_k'(y)=y^{-(k+1)}(y\rho'(y)-k\rho(y)).$$

Прирівнявши $\varphi_k'(y)$ до нуля, знайдемо, що $y\mu(y)=k$, $k\in\mathbb{N}$, де $\mu(y):=\rho'(y)/\rho(y)$. Функція μ – невід'ємна і неперервна на проміжку $[0,+\infty)$. Оскільки $\ln\rho(y)=\displaystyle\int_0^y\mu(\xi)d\xi$, то внаслідок теореми про середнє значення для визначеного інтеграла маємо, що $\ln\rho(y)=\mu(\tilde{y})y$, $0<\tilde{y}<y$, тобто $\mu(\tilde{y})=\ln\rho(y)/y$. З властивостей функції ρ випливає, що $\ln\rho(y)$ при $y\to+\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію на проміжку $[1,+\infty)$, тобто $\lim\limits_{y\to+\infty}\mu(y)=+\infty$. Припустимо, що виконується умова $\rho'(2)/\rho(2)=\mu(2)>1$. Тоді рівняння $y\mu(y)=k$ має єдиний розв'язок $\nu_k=k+1$, $k\in\mathbb{N}$ $(1<\nu_1<2)$. Зазначимо, що послідовність розв'язків $\{\nu_k,k\geqslant 1\}$ є зростаючою і необмеженою. Дійсно, якби $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\nu_k=c<+\infty$, то, виділяючи збіжну підпослідовність $\{\nu_{k_m},m\in\mathbb{N}\}$ таку, що $\lim\limits_{m\to\infty}\nu_{k_m}=a$, $a<+\infty$, одержали б протиріччя, оскільки $\nu_{k_m}\mu(\nu_{k_m})=k_m$ і, перейшовши до границі при $m\to\infty$ дістали б, що $a\mu(a)=+\infty$.

Безпосередньо переконуємося в тому, що кожна функція φ_k, $k\in\mathbb{N}$, досягає свого мінімуму в точці $y_k=\nu_k$:

$$\inf_{y>0}(y^{-k}\rho(y))=\Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^k\rho(\nu_k).$$

Таким чином, одержали співвідношення $\rho_k=\nu_k^{-k}\rho(\nu_k)$. Оскільки $\rho_0=1$, то надалі, за домовленістю вважатимемо, що $\Big(\dfrac{1}{\nu_0}\Big)^0:=1$ (насправді ж у випадку рівняння $x\mu(x)=0$ кожне число $x\in[0,1]$ є його розв'язком, бо $\mu(x)=0$ у кожній точці відрізка $x\in[0,1]$).

Зауваження 1. *Надалі вважатимемо, що послідовність $\{\nu_k,k\in\mathbb{N}\}$ задовольняє умову*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\nu_k^2}=0. \qquad (A)$$

Оскільки ν_k, $k\in\mathbb{N}$, – розв'язок рівняння $\nu_k\mu(\nu_k)=k$, то $k/\nu_k=\mu(\nu_k)$. Отже, $k/\nu_k^2=\mu(\nu_k)/\nu_k$ і умову (A) можна записати у вигляді $\lim\limits_{k\to+\infty}\mu(\nu_k)/\nu_k=0$ або

$$\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu(x)}{x}=0\Big)\Leftrightarrow\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{\rho'(x)}{x\rho(x)}=0\Big).$$

Із властивостей функції μ випливає також, що $\dfrac{\mu(x)}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$ монотонно. Справді, із співвідношення $\mu(\tilde{x})=\ln\rho(x)/x$,

$0 < \tilde{x} < x$, випливає, що на проміжку $(1, +\infty)$ функція μ диференційовна. Тоді

$$\left(\frac{\mu(x)}{x}\right)' = \frac{x\mu'(x) - \mu(x)}{x^2}, \quad x > 1.$$

Продиференціювавши співвідношення $x\mu(x) = k$ знайдемо, що $x\mu'(x) = -\mu(x)$. Отже,

$$\left(\frac{\mu(x)}{x}\right)' = -\frac{2\mu(x)}{x^2} < 0, \quad x > 1,$$

оскільки $\mu(x) > 0$ в кожній точці $x \in (1, +\infty)$, що й потрібно було довести.

Надалі розглядатимемо простори S^{m_n}, де послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ має спеціальний вигляд, а саме, $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, при цьому послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ володіє властивостями а) – г).

2. Основні операції в просторі $S^{n!\rho_n}$

Операція диференціювання. У просторі $S^{n!\rho_n}$ визначена і обмежена операція диференціювання. Більш того, ця операція визначена і обмежена в кожному зліченно нормованому просторі $S^{n!\rho_n,B}$. При цьому, множина $A \subset S^{n!\rho_n,B}$ називається обмеженою, якщо для кожної функції $\varphi \in A$ справджуються оцінки (3) для довільного $\delta > 0$ зі сталими $c_{k\delta}$, не залежними від φ, де $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Отже, нехай φ – довільний елемент обмеженої множини $A \subset S^{n!\rho_n,B}$. Покладемо $\varphi_1(x) = \varphi'(x)$. Внаслідок (3) знайдемо, що

$$\begin{aligned}|x^k\varphi_1^{(n)}(x)| &= |x^k\varphi^{(n+1)}(x)| \leqslant \\ &\leqslant c_{k\delta}(B+\delta)^{n+1}(n+1)!\rho_{n+1} \leqslant \\ &\leqslant c_{k\delta}(B+\delta)^{n+1}n!(n+1)\rho_n = \\ &= c'_{k\delta}(B+\delta)^n n!(n+1)\rho_n, \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Оскільки

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}: \quad n+1 \leqslant c_\varepsilon(1+\varepsilon)^{n+1}, \tag{10}$$

то

$$|x^k\varphi_1^{(n)}(x)| \leqslant c''_{k\delta}(B+\delta)^n(1+\varepsilon)^n n!\rho_n.$$

Якщо взяти ε з проміжку $\left(0, \dfrac{\delta}{B+\delta}\right)$, то правильними є нерівності

$$|x^k\varphi_1^{(n)}(x)| \leqslant c''_{k\delta}(B+2\delta)n!\rho_n.$$

Оскільки 2δ – довільно мала величина разом з δ, то звідси випливає, що при диференціюванні образом обмеженої множини $A \subset S^{n!\rho_n,B}$ знову ж таки є обмежена множина в $S^{n!\rho_n,B}$.

Множення на нескінченно диференційовні функції. Нагадаємо, що коли X – деякий лінійний топологічний простір, а функція f така, що відповідність $X \ni \varphi \to f\varphi \in X$ є лінійним і неперервним оператором з X в X, то f називається мультиплікатором у просторі X.

Припустимо, що функція $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ задовольняє умову

$$\exists c > 0 \ \exists B_0 > 0 \ \exists h \geqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R}: \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant cB_0^n n!\rho_n(1+|x|^h). \tag{11}$$

Множення на цю функцію є обмеженою операцією в просторі $S^{n!\rho_n,B}$, яка відображає цей простір в простір $S^{n!\rho_n,\tilde{B}}$, де $\tilde{B} = \max\{B_0\omega, B\}$, $\omega > 1$ – стала, яка обмежує послідовність $\left\{\dfrac{\rho_{n-1}}{\rho_n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Справді, для $\varphi \in S^{n!\rho_n,B}$ маємо

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{k\delta}(B+\delta)^n n!\rho_n, \quad \forall\delta > 0, x \in \mathbb{R}, \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Тоді

$$\begin{aligned}|x^k(f(x)\varphi(x))^n| &\leqslant |x|^k\sum_{j=0}^n C_n^j|f^{(j)}(x)|\times \\ \times|\varphi^{(n-j)}(x)| &\leqslant c\sum_{j=0}^n C_n^jB_0^jj!\rho_j(|x|^k+|x|^{k+h})\times \\ \times|\varphi^{(n-j)}(x)| &\leqslant c\sum_{j=0}^n C_n^jB_0^jj!\rho_j(c_{k\delta}+c_{k+h,\delta})\times \\ &\times(B+\delta)^{n-j}(n-j)!\rho_{n-j} \leqslant \\ &\leqslant c'_{k\delta}n!\sum_{j=0}^n B_0^j(B+\delta)^{n-j}\rho_j\rho_{n-j} = \\ &= c'_{k\delta}n!\rho_n\sum_{j=0}^n B_0^j(B+\delta)^{n-j}\frac{\rho_{n-j}}{\rho_n}\rho_j,\end{aligned}$$

де $c'_{k\delta} = c(c_{k\delta} + c_{k+h,\delta})$. Далі скористаємося тим, що послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна, тобто $\rho_j \leqslant \rho_0$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Крім того (див. властивість б)),

$$\exists \omega > 1 \ \forall n \geqslant j : \ \frac{\rho_{n-j}}{\rho_n} \leqslant \omega^j.$$

Нехай $\tilde{B} = \max\{B_0\omega, B\}$. Тоді, урахувавши (10), знайдемо, що

$$|x^k(f(x)\varphi(x))^{(n)}| \leqslant c''_{k\delta} n!\rho_n \sum_{j=0}^{n} \tilde{B}^j(\tilde{B}+\delta)^{n-j} \leqslant$$

$$\leqslant c''_{k\delta} n!\rho_n(\tilde{B}+\delta)^n n!\rho_n(n+1) \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{c}''_{k\delta}(\tilde{B}+\delta)^n(1+\varepsilon)^n n!\rho_n \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{c}''_{k\delta}(\tilde{B}+2\delta)^n n!\rho_n,$$

якщо $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{\delta}{\tilde{B}+\delta}\right)$. Звідси вже випливає, що $f\varphi \in S^{n!\rho_n,\tilde{B}}$.

Із наведених вище міркувань випливає, що при вказаній операції обмежена множина простору $S^{n!\rho_n,B}$ відображається в обмежену множину простору $S^{n!\rho_n,\tilde{B}}$, тобто операція

$$S^{n!\rho_n,B} \ni \varphi \to f\varphi \in S^{n!\rho_n,\tilde{B}}$$

є обмеженою (неперервною).

Зауваження 2. *Якщо посилити умову на функцію $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, то можна домогтися того, що оператор множення на цю функцію відображатиме кожну обмежену множину простору $S^{n!\rho_n,B}$ в себе. Ця умова така:*

$$\exists h \geqslant 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|f^{(n)}(x)| \leqslant c_\varepsilon \varepsilon^n n!\rho_n(1+|x|^h).$$

Операція зсуву аргументу. У кожному просторі $S^{n!\rho_n,B}$ визначений і є обмежений оператор зсуву

$$T_{x_0} : \ S^{n!\rho_n,B} \ni \varphi(x) \to T_{x_0}\varphi(x) =$$
$$= \varphi(x-x_0) \in S^{n!\rho_n,B}.$$

Дійсно, якщо $\varphi \in S^{n!\rho_n,B}$, то справджуються оцінки (12). Оскільки

$$\sup_x |x^k\varphi^{(n)}(x-x_0)| = \sup_x |(x+x_0)^k\varphi^{(n)}(x)|,$$

то

$$|(x+x_0)^k\varphi^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{k} C_k^j|x_0|^{k-j} \sup_x |x^j\varphi^{(n)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k} C_k^j|x_0|^{k-j} c_{j\delta}(B+\delta)^n n!\rho_n \leqslant \tilde{c}_{k\delta}(B+\delta)^n n!\rho_n,$$
$$\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $\tilde{c}_{k\delta} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j|x_0|^{k-j}c_{j\delta}$. Отже, $\varphi(x-x_0)$ належить до простору $S^{n!\rho_n,B}$, що й потрібно було довести. При вказаній операції кожна обмежена множина простору $S^{n!\rho_n,B}$ відображається в обмежену множину цього ж простору.

Теорема 1. *Функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ є елементом простору $S^{n!\rho_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову*

$$\exists b > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_k > 0 \ \forall z = x+iy \in \mathbb{C} :$$
$$|z^k\varphi(z)| \leqslant c_k\rho(by), \qquad (13)$$

де

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho_0(y), & |y| \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\rho_0(y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{|y|^n}{n!\rho_n}, \quad |y| \geqslant 1.$$

Доведення див. у [6].

Урахувавши теорему 1, вкажемо ще один клас функцій, які є мультиплікаторами у просторі $S^{n!\rho_n}$. А саме, кожна функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, і задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall z = x+iy \in \mathbb{C} :$$
$$|f(z)| \leqslant c_\varepsilon\rho(\varepsilon y), \qquad (14)$$

є мультиплікатором у просторі $S^{n!\rho_n}$. При доведенні цього твердження скористаємося тим, що функція ρ володіє властивістю [6]

$$\forall \{y_1, y_2\} \subset (0,\infty) : \rho(y_1)\rho(y_2) \leqslant \rho(y_1+y_2). \qquad (15)$$

Нехай функція $\varphi \in S^{n!\rho_n}$ (тобто φ задовольняє умову (13)), а функція f задовольняє умову (14). Тоді, урахувавши (15), знайдемо, що

$$\exists b > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_k > 0 : \ |z^k f(z)\varphi(z)| \leqslant$$
$$c_\varepsilon c_k \rho(by)\rho(\varepsilon y) \leqslant \tilde{c}_k \rho(\tilde{b}y),$$
$$\tilde{c}_k = c_\varepsilon c_k, \tilde{b} = b + \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $f\varphi \in S^{n!\rho_n}$, що й потрібно було довести.

3. Простори S_{l_k}

Розглянемо послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка володіє властивостями 1) – 5) (див. п. 1). Вважаємо також, що послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ побудована за функцією G, яка задовольняє умови $1')$ – $5')$. Символом S_{l_k} позначимо сукупність нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють умову

$$\exists A > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_n > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_n A^k l_k. \tag{16}$$

Покладемо

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} (l_k/|x|^k), & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Оскільки $\gamma(x) = 1/\tilde{\gamma}(x)$, де

$$\tilde{\gamma}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \sup\limits_k(|x|^k/l_k), & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

а властивості функції $\tilde{\gamma}$ вивчені вже раніше, то маємо, що γ – невід'ємна, диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$ і монотонно зростає на $(-\infty, 1]$, $0 < \gamma(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$. Крім того, із властивостей функції $\tilde{\gamma}$ випливає, що

$$\exists c_0' > 0\ \exists c' > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) :$$
$$\gamma(x) \leqslant c_0' e^{-c'|x|}. \tag{17}$$

Наприклад, якщо $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, то γ задовольняє нерівності (див. [1]):

$$\exp\Big\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\Big\} \leqslant \gamma(x) \leqslant c\exp\Big\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\Big\},$$
$$c = e^{\alpha e/2}.$$

Правильним є наступне твердження.

Теорема 2. *Функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ є елементом простору S_{l_k} тоді й лише тоді, коли вона задовольняє умову*

$$\exists a > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_n > 0\ \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_n \gamma(ax). \tag{18}$$

Доведення. Нехай $\varphi \in S_{l_k}$, тобто виконується умова (16). Якщо $|x| \geqslant A$, то з (16) випливають нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_n A^k \frac{l_k}{|x|^k} = c_n \frac{l_k}{|A^{-1}x|^k} \leqslant$$
$$\leqslant c_n \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{l_k}{|A^{-1}x|^k} = c_k \gamma(A^{-1}x).$$

Якщо ж $|A^{-1}x| < 1$, то $\inf\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} (l_k/|A^{-1}x|^k) = 1$, тобто $|\varphi^n(x)| \leqslant c_n$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\gamma(A^{-1}x) = 1$, коли $|A^{-1}x| < 1$, то звідси дістаємо, що з умови (16) випливає умова (18) з $a = A^{-1}$.

Навпаки, нехай функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ задовольняє умову (18). Зафіксуємо довільне $k \in \mathbb{Z}_+$ і домножимо обидві частини нерівності (18) на $|x|^k$, $x \neq 0$. Тоді

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_n |x|^k \gamma(ax) = c_n a^{-k}(|ax|^k \gamma(ax)).$$

Оскільки $\gamma(x) = \inf\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} (l_k/|x|^k)$, $|x| \geqslant 1$, то $\gamma(x) \leqslant l_k|x|^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, тобто $|x|^k\gamma(x) \leqslant l_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, для x: $|x| \geqslant a^{-1}$ справджуються нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_n a_1^k l_k, \quad a_1 = a^{-1}, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Якщо $|x| < a^{-1}$, то $\gamma(a)x = 1$ і

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_n |x|^k \leqslant c_n a_1^k \leqslant c_n a_1^k l_k,$$
$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

оскільки $l_k \geqslant 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси випливає, що $\varphi \in S_{l_k}$.

Теорема доведена.

Позначимо через $S_{l_k, A}$ сукупність функцій φ з простору S_{l_k}, для яких справджуються нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{n\overline{A}} \overline{A}^k l_k, \quad x \in \mathbb{R}, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $\overline{A} > A$. Інакше, $S_{l_k,A}$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{l_k}$, які при довільному $\rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{n\rho}(A+\rho)^k l_k, x \in \mathbb{R}, \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Якщо скористатися теоремою 2, то можна стверджувати, що $S_{l_k,A}$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{l_k}$, які задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{n\rho}\gamma((a-\rho)x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

при кожному $\rho \in (0,a)$.

Покладемо

$$M_p(x) = \Big(\gamma\Big(a\Big(1-\frac{1}{p}\Big)x\Big)\Big)^{-1}, \quad p \in \{2,3,\dots\}. \tag{19}$$

Функції M_p утворюють зростаючу послідовність; при цьому $S_{l_k,A}$ перетворюється в зліченно нормований простір з нормами

$$\|\varphi\|_p \equiv \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0\leqslant n\leqslant p}} \{M_p(x)|\varphi^{(n)}(x)|\}. \tag{20}$$

Отже, $S_{l_k,A}$ збігається з простором $K\{M_p\}$, введеним в [1], з фіксованою послідовністю вагових функцій (19), тобто до простору $S_{l_k,A}$ можна застосувати всі результати, що стосуються загальних просторів $K\{M_p\}$. З нормами (20) $S_{l_k,A}$ є повним зліченно нормованим простором, а $S_{l_k} = \cup S_{l_k,A}$ за всіма $A \in \mathbb{N}$. Із загального критерія збіжності в просторах $K\{M_p\}$ (див. [1]) випливає, що послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geqslant 1\} \subset S_{l_k}$ збігається до нуля в цьому просторі тоді й лише тоді, коли вона правильно збігається до нуля (див. п. 1) і при цьому справджуються оцінки

$$|\varphi_\nu^{(n)}(x)| \leqslant c_n\gamma(ax), \quad n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

де сталі c_n та a не залежать від ν.

4. Основні операції в просторі S_{l_k}. Використовуючи властивості послідовності $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ нескладно перевірити, що в просторі S_{l_k} визначені і є неперервними операції множення на x, диференціювання та зсуву аргументу.

Мультиплікатором у просторі S_{l_k} є нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall q \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_{q\varepsilon} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|f^{(q)}(x)| \leqslant c_{q\varepsilon}(\gamma(\varepsilon x))^{-1}. \tag{21}$$

При доведенні (21) скористаємося однією властивістю функції γ, яку сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Лема 2. *Правильною є нерівність*

$$\ln\gamma(x_1) + \ln\gamma(x_2) \geqslant \ln\gamma(x_1+x_2), \tag{22}$$

$$\forall\{x_1,x_2\} \subset [0,+\infty).$$

Доведення. Передусім зазначимо, що $\{\gamma(x_1), \gamma(x_2), \gamma(x_1+x_2)\} \subset (0,1]$ для довільних фіксованих $\{x_1,x_2\} \subset [0,+\infty)$. Оскільки $\gamma(x) = 1$ для $x \in [0,1]$, то нерівність (22) досить довести на проміжку $(1,+\infty)$. Справді, якщо $\{x_1,x_2\} \subset [0,1]$ і $(x_1+x_2) \in [0,1]$, то нерівність (22) перетворюється в рівність. Якщо $\{x_1,x_2\} \subset [0,1]$ і $x_1+x_2 > 1$, то нерівність (22) також справджується, бо $0 < \gamma(x_1+x_2) < 1$, $\ln\gamma(x_1+x_2) < 0$, а $\ln\gamma(x_1) = \ln\gamma(x_2) = 0$. Якщо $x_1 \in [0,1]$, $x_2 > 1$, то $x_1+x_2 > 1$, $\ln\gamma(x_1) = 0$, $\ln\gamma(x_1) \geqslant \ln\gamma(x_1+x_2)$, оскільки $\gamma(x_1+x_2) \leqslant \gamma(x_2)$ (тут враховано те, що γ монотонно спадає на проміжку $(1,+\infty)$). Аналогічно розглядається випадок $x_2 \in [0,1]$, $x_1 > 1$.

Отже, нехай $\{x_1,x_2\} \subset (1,+\infty)$. Нерівність (22) рівносильна нерівності

$$\gamma(x_1)\cdot\gamma(x_2) \geqslant \gamma(x_1+x_2), \quad \{x_1,x_2\} \subset (1,+\infty). \tag{23}$$

Для доведення (23) досить встановити, що

$$\frac{\gamma(x_1)\cdot\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)} \geqslant 1, \quad \{x_1,x_2\} \subset (1,+\infty).$$

Нехай $1 < x_1 \leqslant x_2$. Оскільки γ монотонно спадає на $(1,+\infty)$, то $\gamma(x_1) \geqslant \gamma(x_2)$. Отже,

$$\frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)} \geqslant \frac{\gamma^2(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)}.$$

За означенням, $\gamma(x_2) = \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}(l_n/|x|_2^n)$, $x \in (1,+\infty)$. Розглянемо послідовність $\{\varepsilon_k = \beta_k\gamma(x_2), k \in \mathbb{N}\}$, де послідовність $\{\beta_k, k \in \mathbb{N}\}$ додатних чисел монотонно прямує до нуля.

Тоді для $\varepsilon_k > 0$ знайдеться номер $n_k = n_k(\varepsilon_k)$ такий, що

$$\frac{l_{n_k}}{x_2^{n_k}} < \gamma(x_2) + \varepsilon_k = (1+\beta_k)\gamma(x_2),$$

тобто

$$\gamma(x_2) > \frac{1}{1+\beta_k}\frac{l_{n_k}}{x_2^{n_k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Відповідно,

$$\gamma(x_1+x_2) \leqslant \frac{l_{n_k}}{(x_1+x_2)^{n_k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Урахувавши ці нерівності, знайдемо, що

$$\frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)} \geqslant \frac{l_{n_k}^2(x_1+x_2)^{n_k}}{(1+\beta_k^2)x_2^{2n_k}l_{n_k}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{l_{n_k}}{(1+\beta_1)^2 x_2^{n_k}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(тут враховано, що $x_1 + x_2 \geqslant x_2$; $\beta_k < \beta_1$, $k \geqslant 2$). Крім того, $\gamma(\alpha) \leqslant l_n/\alpha^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для довільного $\alpha > 1$, або

$$\forall \alpha > 1 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \ \ l_n \geqslant \alpha^n \gamma(\alpha).$$

Покладемо $\alpha = x_2\delta$, де $\delta > 1$ – фіксоване число, і підберемо номер n_k так, щоб справджувалася нерівність $\delta^{n_k}\gamma(x_2\delta) \geqslant (1+\beta_1)^2$. Безпосередньо знаходимо, що

$$n_k \geqslant \Big[\ln\Big(\frac{(1+\beta_1)^2}{\gamma(x_2\delta)}\Big)(\ln\delta)^{-1}\Big] + 1.$$

Для такого номера n_k справджуються нерівності

$$\frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)} \geqslant \frac{\delta^{n_k}\gamma(x_2\delta)}{(1+\beta_1)^2} \geqslant 1,$$

що й потрібно було довести.

Доведемо тепер, що функція $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка задовольняє умову (21), є мультиплікатором у просторі S_{l_k}.

Нехай $\varphi \in S_{l_k}$. Тоді, згідно з теоремою 2,

$$\exists a > 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_q > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant c_k\gamma(ax).$$

Візьмемо $\varepsilon \in (0, a)$ і скористаємося (21). Тоді

$$|(f(x)\varphi(x))^{(q)}| \leqslant \sum_{j=0}^{q} C_q^j |f^{(j)}(x)| \cdot |\varphi^{(q-j)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{q} C_q^j c_{j\varepsilon} c_{q-j}\frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)} \equiv \tilde{c}_1\frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)} =$$

$$\tilde{c}_q e^{\ln\gamma(ax) - \ln\gamma(\varepsilon x)},$$

де $\tilde{c}_q = \sum_{j=0}^{q} C_q^j c_{j\varepsilon} c_{q-j}$. Із (22) випливає нерівність

$$\ln\gamma(ax) - \ln\gamma(\varepsilon x) \leqslant \ln\gamma((a-\varepsilon)x), \quad 0 < \varepsilon < a.$$

Тоді

$$|(f(x)\varphi(x))^{(q)}| \leqslant \tilde{c}_q e^{\ln\gamma((a-\varepsilon)x)} = \tilde{c}_q\gamma(a_1 x),$$

$$a_1 = a - \varepsilon > 0.$$

Отже, $f\varphi \in S_{l_k}$. Із наведених міркувань випливає також, що якщо φ перебігає обмежену множину $A \subset S_{l_k}$, то кожна функція $f\varphi$, $\varphi \in A$, належить обмеженій множині $A_1 \subset S_{l_k}$, тобто операція $S_{l_k} \ni \varphi \to f\varphi \in S_{l_k}$ є неперервною у просторі S_{l_k}, що й потрібно довести.

5. Простори $S_{l_k}^{m_n}$ та $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$

Розглянемо послідовності $\{m_n = n!\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{l_k = k!d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де послідовності $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ володіють властивостями а) – г) (див. п. 1). Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову:

$$\exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \leqslant cA^kB^nl_km_n \tag{24}$$

(сталі c, A, $B > 0$ залежать від функції φ).

Відомо, що півнорми

$$p_{kn}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k\varphi^{(n)}(x)|, p'_{kn}(\varphi) =$$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |x^k\varphi^{(n)}(x)|^2 dx\Big)^{1/2}, \quad \varphi \in S,$$

еквівалентні. Звідси випливає еквівалентність наступних тверджень

1) $(\varphi \in S^{m_n}) \Leftrightarrow (\exists B > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_k > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\|x^k\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant c_kB^nm_n);$$

2) $(\varphi \in S_{l_k}) \Leftrightarrow (\exists A > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_n > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$:
$$\|x^k\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant c_n A^k l_k);$$

3) $(\varphi \in S^{m_n}_{l_k}) \Leftrightarrow (\exists c > 0\ \exists A > 0\ \exists B > 0\ \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$:
$$\|x^k\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant cA^k B^n l_k m_n).$$

Теорема 3. *Правильною є рівність* $S^{m_n}_{l_k} = S^{m_n} \cap S_{l_k}$.

Доведення. Якщо $\varphi \in S^{m_n}_{l_k}$, то, очевидно, $\varphi \in S_{l_k}$ і $\varphi \in S^{m_n}$, тобто $\varphi \in S^{m_n} \cap S_{l_k}$.

Доведемо, що $S_{l_k} \cap S^{m_n} \subset S^{m_n}_{l_k}$. Для довільної функції $\varphi \in S_{l_k} \cap S^{m_n}$ знайдуться сталі c, $h > 0$ такі, що
$$\|x^k\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant ch^k k! d_k, \quad \|\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant ch^n n! \rho_n,$$
$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$
Тоді, як і при доведенні теореми 1 знаходимо, що
$$\|x^k\varphi^{(n)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant c^2 \sum_{s=0}^{r} \frac{n!(2k)!h^{2k-s}h^{2n-s}}{s!(n-s)!(2k-s)!}\times$$
$$\times(2k-s)!(2n-s)!d_{2k-s}\rho_{2n-s},$$
де $r = \min\{2k, n\}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$. При доведенні теореми 1 встановлено також, що
$$(2n-s)!\rho_{2n-s} \leqslant \omega^{2k+n}2^n n! \rho_n^2, \omega > 1, \forall s:$$
$$0 \leqslant s \leqslant r.$$
Аналогічно,
$$(2k-s)!d_{2k-s} \leqslant \omega_1^{2k+n}2^k k! d_k^2, \omega_1 > 1, \forall s:$$
$$0 \leqslant s \leqslant r.$$
Урахувавши ці оцінки, прийдемо до нерівності
$$\|x^k\varphi^{(n)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant c^2(n!)^2(2k)!k!h^{2k+2n}\times$$
$$\times(\omega\omega_1)^{2k+n}2^{n+k}(\rho_n d_k)^2 \sum_{s=0}^{r}\frac{(2k)!}{s!(2k-s)!}.$$
Оскільки
$$\sum_{s=0}^{r}\frac{(2k)!}{s!(2k-s)!} \leqslant \sum_{s=0}^{2k}\frac{(2k)!}{s!(2k-s)!} =$$
$$= \sum_{s=0}^{2k} C^s_{2k} = 2^{2k},$$
то
$$\|x^k\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant c{\cdot}2^{(5k+n)/2}h^{k+n}\tilde{\omega}^{2k+n}n!\rho_n k!\rho_k =$$
$$= cA^k B^n l_k m_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$
де $\tilde{\omega} = \max\{\omega, \omega_1\}$, $A = 2^{5/2}\tilde{\omega}^2 h$, $B = 2^{1/2}\tilde{\omega}h$. Звідси випливає, що $\varphi \in S^{m_n}_{l_k}$.

Зауваження 3. *Якщо послідовності* $\{m_n\}$ *та* $\{l_k\}$ *володіють властивостями 1) – 5) та додатково задовольняють умови:*
$$\exists L > 0\ \exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+: \ \ m_{2n} \leqslant LM^{2n}m_n^2,$$
$$\exists L_1 > 0\ \exists M_1 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+: \ \ l_{2k} \leqslant L_1 M_1^{2k} l_k^2,$$
то безпосередньо можна переконатися в тому, що теорема 3 також має місце.

Теорема 4. *Функція* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *є елементом простору* $S^{m_n}_{l_k}$ *тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції* $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, *яка задовольняє умову*
$$\exists a > 0\ \exists b > 0\ \exists c > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}:$$
$$|\varphi(z)| \leqslant c\gamma(ax)\rho(by),$$
де
$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}(l_k/|x|^k), & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$
$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}(|y|^n/m_n), & |y| \geqslant 1, \end{cases}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\varphi \in S^{m_n}_{l_k}$, тобто виконується умова (24). Аналогічно тому, як це зроблено при доведенні теореми 1, з урахуванням (24) встановлюємо, що функція φ аналітично продовжується у всю комплексну площину, при цьому справджується оцінка
$$x^k\varphi(x+iy)| \leqslant cA^k l_k \rho(by),$$
$$b > 0, k \in \mathbb{Z}_+, \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$
Звідси дістаємо, що
$$|\varphi(x+iy)| \leqslant c \inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{A^l l_k}{|x|^k}\rho(by) =$$

$$= c \inf_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{l_k}{\left|\frac{x}{A}\right|^k}\rho(by) = c\gamma(ax)\rho(by), a = A^{-1}.$$

Достатність. Внаслідок інтегральної формули Коші маємо, що

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{n+1}}dz, \quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

де γ_r – коло радіуса R з центром у точці x. Тоді

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant cn! \inf_R \frac{\rho(bR)}{R^n}\gamma(ax_0) =$$

$$= cn! b^n \inf_R \frac{\rho(R)}{R^n}\gamma(ax_0) = cb^n n! \rho_n \gamma(ax_0),$$

де x_0 – точка максимуму функції $\gamma(a\xi)$, $\xi \in [x-R, x+R]$. Оскільки γ – парна на $\mathbb{R}$ функція, яка спадає на проміжку $[1,+\infty)$, то $x_0 = x+\theta R$, де $\theta\in\{0,1,-1\}$, причому $\theta = 0$, коли $x = 0$. За означенням, $\gamma(\xi) = \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}(l_k/|\xi|^k)$, $|\xi|\geqslant 1$. Отже, нехай $|ax_0|\geqslant 1$. Звідси випливає, що $|ax|\geqslant 1+ah\geqslant 1$. Тоді

$$\gamma(ax_0) = \gamma(ax\pm aR) = \inf_k \frac{l_k}{|ax\pm aR|^k} =$$

$$\inf_k \frac{l_k}{|ax|^k\left|1\pm\frac{R}{x}\right|^k},\ R\neq \pm x.$$

Оскільки $l_k\geqslant 1$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $R\neq\pm x$, то

$$\gamma(ax_0) = \inf_k \frac{l_k}{|ax\pm aR|^k} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_k\left\{\frac{l_k}{|ax|^k}\frac{l_k}{\left|1\pm\frac{R}{x}\right|^k}\right\} =$$

$$= \inf_k\frac{l_k}{|ax|^k}\inf_k\frac{l_k}{\left|1\pm\frac{R}{x}\right|^k} =$$

$$= \gamma(ax)\gamma\Big(1\pm\frac{R}{x}\Big)\leqslant\gamma(ax).$$

Якщо ж $|ax_0|<1$, то $|ax|<1+aR$. Тоді існує стала $c = c_{a,R} > 1$ така, що $\gamma(ax_0) = 1 < c_{a,R}\gamma(a,x)$, $|ax|<1+aR$.

Отже,

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant \tilde{c}n!b^n\rho_n\gamma(ax), \quad x\in\mathbb{R},$$

де $\tilde{c} = \max\{c, 1, c_{a,R}\}$. Тоді для x: $|x|\geqslant \dfrac{1}{a}$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leqslant \tilde{c}n!b^n\rho_n|x|^k\frac{l_k}{|ax|^k} =$$

$$= \tilde{c}n!\rho_n b^n\tilde{a}^k l_k = \tilde{c}b^n\tilde{a}^k l_k m_n, \tilde{a} = a^{-1}.$$

Якщо ж $|x|\leqslant\dfrac{1}{a}$, то $\gamma(ax) = 1$ і

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leqslant\tilde{c}n!b^n\rho_n|x|^k\leqslant\tilde{c}n!b^n\rho_n\tilde{a}^k\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{c}n!b^n\rho_n\tilde{a}^k l_k = \tilde{c}b^n\tilde{a}^k m_n l_k, \quad \{k,n\}\subset\mathbb{Z}_+,$$

оскільки $l_k\geqslant 1$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Звідси випливає, що функція φ є елементом простору $S_{l_k}^{m_n}$. Теорема доведена.

Топологічна структура в $S_{l_k}^{m_n}$ визначається так. Символом $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi\in S_{l_k}^{m_n}$ таких, що

$$\forall\overline{A}>A\ \forall\overline{B}>B\ \forall x\in\mathbb{R}:$$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leqslant c\overline{A}^k\overline{B}^n l_k m_n, \quad \{k,n\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Інакше, $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ складається з тих функцій $\varphi\in S_{l_k}^{m_n}$, які при довільних $\delta>0$, $\rho>0$ задовольняють нерівності

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leqslant c_{\delta\rho}(A+\delta)^k(B+\rho)^n l_k m_n,$$

$$\{k,n\}\subset\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n}\frac{|x^k\varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^n l_k m_n},$$

$$\{\delta,\rho\}\subset\Big\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\Big\}. \tag{25}$$

Якщо $A_1<A$, $B_1<B_2$, то $S_{l_k,A_1}^{m_n,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{l_k,A_2}^{m_n,B_2}$ і

$$S_{l_k}^{m_n} = \lim_{\substack{A\to\infty\\B\to\infty}}\operatorname{ind} S_{l_k,A}^{m_n,B}.$$

Отже, збіжність послідовності $\{\varphi_\nu,\nu\geqslant 1\}\subset S_{l_k}^{m_n}$ до нуля в просторі $S_{l_k}^{m_n}$ – це збіжність за топологією одного з просторів $S_{l_k,A}^{m_n,B}$, до якого належать всі функції φ_ν. Іншими словами, $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ у просторі $S_{l_k}^{m_n}$

тоді й лише тоді, коли функціональна послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, n \geqslant 1\}$ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$ рівномірно збігається до нуля на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і для деяких c, A, $B > 0$, не залежних від ν, справджуються нерівності

$$|x^k \varphi_\nu^{(n)}(x)| \leqslant c A^k B^n l_k m_n, \quad x \in \mathbb{R}, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій φ з простору $S_{l_k}^{m_n}$ в $\mathbb{C}$, позначимо символом $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Із теореми 4 випливає, що простір $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $S_{l_k,a}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ за всіма індексами $a \in \left\{\dfrac{1}{n}, n \geqslant 1\right\}$, $b \in \mathbb{N}$, де $S_{l_k,A}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, для яких справджується нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant c\gamma(\overline{a}x)\rho(\overline{b}y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\overline{a}$ – довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ – довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in S_{l_k,a}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\gamma\Big(a\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)x\Big)\rho((b + \omega)y)},$$

$$p \in \{2, 3, \dots\}, \quad \omega \in \mathbb{N},$$

то ці норми, внаслідок теореми 4, еквівалентні нормам (25). Отже, послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x), \nu \geqslant 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geqslant 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому мають місце нерівності

$$|\varphi_\nu(z)| \leqslant c\gamma(ax)\rho(by), \quad z = x + iy \in C,$$

зі сталими c, a, $b > 0$, не залежними від ν.

Із одержаних результатів щодо просторів S^{m_n}, S_{l_k} та теорем 3, 4 випливає, що в просторі $S_{l_k}^{m_n}$ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргументу. Мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}$ є функція $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists c_\varepsilon > 0 : \; |f(z)| \leqslant c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Зауваження 4. *Із теорем 3, 4 випливає, що означення простору $S_{l_k}^{m_n}$ еквівалентне наступному:*

$$(\varphi \in S_{l_k}^{m_n}) \Leftrightarrow (\exists c > 0 \; \exists a > 0 \; \exists B > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \; \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant cB^n m_n \gamma(ax)).$$

Простори $S_{l_k}^{m_n}$ є досконалими, тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні. Доведення цієї властивості здійснюється за схемою доведення досконалості просторів типу $K\{M_p\}$, застосованою в [1].

Зауваження 5. *І.К. Бабенко у праці [7] довів необхідні й достатні умови нетривіальності простору $S_{a_k}^{b_n}$. Т.І. Готинчан [8] встановила необхідні й достатні умови нетривіальності простору W_M^Ω, який відноситься до просторів типу W. Проаналізувавши методику досліджень, проведених в [8], умову нетривіальності простору $S_{l_k}^{m_n}$ сформулюємо наступним чином: для того, щоб простір $S_{l_k}^{m_n}$ був нетривіальним, необхідно й достатньо, щоб*

$$\exists c > 0 \; \exists d > 0 \; \exists x_0 > 0 \; \forall x \geqslant x_0 :$$

$$\ln \rho(x) \geqslant c \ln \tilde{\gamma}(dx), \quad \tilde{\gamma} = 1/\gamma$$

(тут ρ та γ – функції, пов'язані з простором $S_{l_k}^{m_n}$).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

2. *Гуревич Б.Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем / Б.Л. Гуревич // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 99, № 6. – С. 893-896.

3. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

4. *Готинчан Т.І.* Різні форми означення просторів типу W / Т.І. Готинчан, Р.М. Атаманюк // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 21–26.

5. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

6. *Городецький В.В.* Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева в пространствах типа S // В.В. Городецкий, О.В. Мартынюк // СМЖ. – 2013. – Т. 54, № 3. – С. 569–584.

7. *Бабенко К.И.* Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций / К.И. Бабенко // Труды Моск. матем. общества. – 1956. – Т. 5. – С. 523–542.

8. *Готинчан Т.І.* Про нетривіальність та вкладання просторів типу W / Т.І. Готинчан // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 1601. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 39–44.