УДК 517.91:532.2

©2014 р. О.М. Нікітіна

Чернівецький факультет НТУ "Харківський політехнічний інститут"

СКІНЧЕННЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ (КОНТОРОВИЧА - ЛЄБЄДЄВА) - БЕССЕЛЯ - ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ $[R_0, R_3]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Запроваджено скінченне гібридне інтегральне перетворення (Конторовича - Лєбєдєва) - Бесселя - Фур'є на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі та показано його застосування до розв'язання задач математичної фізики неоднорідних середовищ.

We provide a finite hybrid integral (Kontorovich - Lebedev) - Bessel - Fourier transform on a segment $[R_0, R_3]$ of the polar axis. We apply this transform to solve problems of mathematical physics of nonhomogeneous structures.

У зв'язку з широким застосуванням у різноманітних технологічних процесах композитних матеріалів, виникає гостра потреба в розв'язанні достатньо широкого класу задач математичної фізики неоднорідних структур. Тому виникла необхідність в побудові таких інтегральних перетворень, які давали б можливість алгебраїзувати лінійні диференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами. Вперше інтегральні перетворення такого типу (гібридні інтегральні перетворення – ГІП) з'явились в математичній літературі в 70-их роках XX століття в роботах Уфлянда Я.С. та його учнів. Методика, запропонована в цих роботах, була застосована Проценко В.С. і його учнями для побудови гібридних інтегральних перетворень Фур'є-Лежандра, Лежандра-Фур'є, Фур'є-Ганкеля, Ганкеля-Лежандра. Подальший розвиток теорія ГІП знайшла у працях М.П. Ленюка та його учнів. Наявність основної тотожності інтегрального перетворення відповідного гібридного диференціального оператора дає можливість успішно застосовувати ці перетворення до розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних областях. Дана стаття присвячена запровадженню скінченного гібридного інтегрального перетворення (Конторовича - Лєбєдєва) - Бесселя - Фур'є на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі та його застосуванню до розв'язання задач математичної фізики неоднорідних середовищ.

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2 = \Big\{ r:\ r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);$$

$$R_0 > 0,\ R_3 < \infty \Big\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,(\alpha)} = \Theta(r-R_0)\Theta(R_1-r)B_{\alpha_1} + \Theta(r-R_1)\times$$

$$\times\Theta(R_2-r)B_{\nu,\alpha_2} + \Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)\frac{d^2}{dr^2} \quad (1)$$

У рівності (1) беруть участь диференціальний оператор Конторовича - Лєбєдєва $B_{\alpha_1} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1+1)r\frac{d}{dr} + \alpha_1^2 - \lambda^2 r^2$ [1], диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu,\alpha_2} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2+1)r^{-1}\frac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha_2^2)r^{-2}$ [2] та диференціальний оператор Фур'є [3]; $2\alpha_j + 1 > 0$, $\nu \geqslant \alpha_2$, $\lambda \in (0, \infty)$; $\Theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [4].

Означення. Областю визначення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)]; g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\Big(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\Big)g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0,$$

$$\left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right) g_3(r)\Big|_{r=R_3} = 0, \qquad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\Big[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) -$$

$$\left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k} = 0;\ j,k = 1,2. \qquad (3)$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \leqslant 0$, $\beta_{11}^0 \geqslant 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$; $\alpha_{22}^3 \geqslant 0$, $\beta_{22}^3 \geqslant 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$; $\alpha_{jm}^k \geqslant 0$, $\beta_{jm}^k \geqslant 0$; $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$.

Визначимо величини

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{1}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}, \quad \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}},$$

$$\sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \Theta(r-R_0)\Theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \Theta(r-R_1)\times$$

$$\times\Theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1} + \Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)\sigma_3$$

та скалярний добуток

$$\Big(u(r), v(r)\Big) = \int_{R_0}^{R_3} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)\times$$

$$\times v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}\times$$

$$\times dr + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 dr, \quad u \in G, \quad v \in G. \ (4)$$

Для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ з умов спряження (3) випливає базова тотожність:

$$\left(u_k v_k' - u_k' v_k\right)\Big|_{r=R_k} =$$

$$= \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left(u_{k+1} v_{k+1}' - u_{k+1}' v_{k+1}\right)\Big|_{r=R_k},\ k = 1,2. \qquad (5)$$

Внаслідок крайових умов (2) та базової тотожності (5) маємо рівність

$$\Big(M_{\nu,(\alpha)}[u], v(r)\Big) = \Big(u(r), M_{\nu,(\alpha)}[v]\Big). \qquad (6)$$

Рівність (6) означає, що ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжнений. Значить, його спектр дійсний. Оскільки $M_{\nu,(\alpha)}$ не має на множині I_2 особливих точок, то його спектр дискретний [5].

Структуру власних чисел й відповідних їм власних вектор-функцій знайдемо, будуючи на множині I_2 ненульовий розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left(B_{\alpha_1} + b_1^2\right) V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$\left(B_{\nu,\alpha_2} + b_2^2\right) V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2), \qquad (7)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right) V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_2, R_3)$$

за крайовими умовами (2) та умовами спряження (3).

Тут β - спектральний параметр, а функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \Theta\Big(r - R_{i-1}\Big)\Theta\Big(R_i - r\Big) V_{\nu,(\alpha);i}(r,\beta) - \qquad (8)$$

спектральна функція, яка відповідає спектральному параметру β; $b_j \equiv b_j(\beta) = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geqslant 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича-Лєбєдєва) $(B_{\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)$ та $v_2 = D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_2} + b_2^2)v = 0$ складають функції Бесселя дійсного аргумента першого роду $v_1 = J_{\nu,\alpha_2}(b_2 r)$ та другого роду $v_2 = N_{\nu,\alpha_2}(b_2 r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2)v = 0$ складають тригонометричні функції $v_1 = \cos b_3 r$ та $v_2 = \sin b_3 r$ [3].

Якщо покласти

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1) + B_1 D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1),$$

$$r \in (R_0, R_1),$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 J_{\nu,\alpha_2}(b_2 r) + B_2 N_{\nu,\alpha_2}(b_2 r),$$

$$r \in (R_1, R_2), \qquad (9)$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 \cos b_3 r + B_3 \sin b_3 r,$$

$$r \in (R_2, R_3),$$

то крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин A_j, B_j $(j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$X^{01}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1)A_1 + X^{02}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1)B_1 = 0$$

$$X^{11}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1)A_1 + X^{12}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1)B_1 -$$

$$-u^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)A_2 - u^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)B_2 = 0$$

$$u^{21}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_2)A_2 + u^{22}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_2)B_2 -$$

$$-v^{21}_{j2}(b_3R_2)A_3 - v^{22}_{j2}(b_3R_2)B_3 = 0, \; j = 1, 2;$$

$$v^{31}_{22}(b_3R_3)A_3 + v^{32}_{22}(b_3R_3)B_3 = 0 \qquad (10)$$

У системі (10) прийняті загальновідомі позначення [6]:

$$X^{m1}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_m, b_1) =$$

$$= \Big(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^m_{j1}\Big)C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)\Big|_{r=R_m},$$

$$X^{m2}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_m, b_1) =$$

$$= \Big(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^m_{j1}\Big)D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)\Big|_{r=R_m},$$

$$u^{m1}_{\nu,\alpha_2;jk}(b_2R_m) = \Big(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha_2}{R_m} + \beta^m_{jk}\Big)\times$$

$$\times J_{\nu,\alpha_2}(b_2R_m) - \alpha^m_{jk}b_2^2R_mJ_{\nu+1,\alpha_2+1}(b_2R_m),$$

$$u^{m2}_{\nu,\alpha_2;jk}(b_2R_m) = \Big(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha_2}{R_m} + \beta^m_{jk}\Big)\times$$

$$\times N_{\nu,\alpha_2}(b_2R_m) - \alpha^m_{jk}b_2^2R_mN_{\nu+1,\alpha_2+1}(b_2R_m),$$

$$v^{m1}_{j2}(b_3R_m) = -\alpha^m_{j2}b_3\sin b_3R_m + \beta^m_{j2}\cos b_3R_m,$$

$$v^{m2}_{j2}(b_3R_m) = \alpha^m_{j2}b_3\cos b_3R_m + \beta^m_{j2}\sin b_3R_m.$$

Однорідна алгебраїчна система (10) має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулеві [7]:

$$\delta_{\nu,(\alpha)}(\beta) \equiv \delta_{22}(b_3R_2, b_3R_3)a_{\nu,(\alpha);1}(\beta) -$$

$$-\delta_{12}(b_3R_2, b_3R_3)a_{\nu,(\alpha);2}(\beta) =$$

$$= \delta_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1)b_{\nu,\alpha_2;2}(\beta) -$$

$$-\delta_{\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1)b_{\nu,\alpha_2;1}(\beta) = 0. \qquad (11)$$

У рівності (11) беруть участь функції:

$$\delta_{\alpha_1;j1}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1) =$$

$$= X^{01}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1)X^{12}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1) -$$

$$-X^{02}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1)X^{11}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1),$$

$$\delta_{\nu,\alpha_2;jk}(b_2R_1, b_2R_2) = u^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)u^{22}_{\nu,\alpha_2;k1}(b_2R_2) -$$

$$-u^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)u^{21}_{\nu,\alpha_2;k1}(b_2R_2),$$

$$\delta_{j2}(b_3R_2, b_3R_3) = v^{21}_{j2}(b_3R_2)v^{32}_{22}(b_3R_3) -$$

$$-v^{22}_{j2}(b_3R_2)v^{31}_{22}(b_3R_3),$$

$$a_{\nu,(\alpha);j}(\beta) = \delta_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1)\delta_{\nu,\alpha_2;2j}(b_2R_1, b_2R_2) -$$

$$-\delta_{\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1)\delta_{\nu,\alpha_2;1j}(b_2R_1, b_2R_2),$$

$$b_{\nu,\alpha_2;j}(\beta) = \delta_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_1, b_2R_2)\delta_{22}(b_3R_2, b_3R_3) -$$

$$-\delta_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1, b_2R_2)\delta_{12}(b_3R_2, b_3R_3).$$

Корінь β_n трансцендентного рівняння (11) підставимо в систему (10) й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Якщо взяти $A_1 = -A_0X^{02}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_{1n})$, $B_1 = A_0X^{01}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_{1n})$, де величина A_0 підлягає визначенню, то перше рівняння системи стає тотожністю; $b_{jn} = (\beta_n^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geqslant \geqslant 0$, $j = \overline{1,3}$.

Розглянемо стосовно A_2, B_2 алгебраїчну систему рівнянь:

$$u^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_{2n}R_1)A_2 + u^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_{2n}R_1)B_2 =$$

$$= A_0\delta_{\alpha_1;j1}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_{1n}), \quad j = 1, 2. \qquad (12)$$

Визначник алгебраїчної системи (12)

$$q_{\nu,\alpha_2}(\beta_n) = u^{11}_{\nu,\alpha_2;12}u^{12}_{\nu,\alpha_2;22} - u^{11}_{\nu,\alpha_2;22}\times$$

$$\times u^{12}_{\nu,\alpha_2;12}(b_{2n}R_1) = \frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{b_{2n}^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (12) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_2 = A_0[q_{\nu,\alpha_2}(\beta_n)]^{-1}\times$$

$$\times[\delta_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_{1n})u^{12}_{\nu,\alpha_2;22}(b_{2n}R_1) -$$

$$-\delta_{\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_{1n})u^{12}_{\nu,\alpha_2;12}(b_{2n}R_1)], \qquad (13)$$

$$B_2 = A_0[q_{\nu,\alpha_2}(\beta_n)]^{-1}\times$$

$$\times[\delta_{\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_{1n}u^{11}_{\nu,\alpha_2;12}(b_{2n}R_1) -$$

$$-\delta_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_{1n})u^{11}_{\nu,\alpha_2;22}(b_{2n}R_1)].$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$v^{21}_{j2}(b_{3n}R_2)A_3 + v^{22}_{j2}(b_{3n}R_2)B_3 =$$

$$= -A_0[q_{\nu,\alpha_2}(\beta_n)]^{-1}a_{\nu,(\alpha);j}(\beta_n). \qquad (14)$$

Визначник алгебраїчної системи (14)

$$v_{12}^{21}(b_{3n}R_2)v_{22}^{22}(b_{3n}R_2) - v_{22}^{21}(b_{3n}R_2)v_{12}^{22}(b_{3n}R_2) =$$
$$= c_{22}b_{3n} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_3 = \omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n),\ B_3 = -\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n),$$
$$A_0 = c_{22}b_{3n}q_{\nu,\alpha_2}(\beta_n), \qquad (15)$$
$$\omega_{\nu,(\alpha);j}(\beta_n) = a_{\nu,\alpha_2;2}(\beta_n)v_{12}^{2j}(b_{3n}R_2) -$$
$$-a_{\nu,\alpha_2;1}(\beta_n)v_{22}^{2j}(b_{3n}R_2),\ j = 1,2.$$

Підставивши визначені величини A_j, B_j згідно формул (13) та (15) у рівності (9), отримуємо функції:

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) = c_{22}b_{3n}q_{\nu,\alpha_2}(\beta_n)[X_{\alpha_1;11}^{01}(\lambda R_0, b_{1n})\times$$
$$\times D_{\alpha_1}(\lambda r, b_{1n}) - X_{\alpha_1;11}^{02}(\lambda R_0, b_{1n})C_{\alpha_1}(\lambda r, b_{1n})],$$
$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n) = c_{22}b_{3n}[\delta_{\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1; b_{1n})\times$$
$$\times\Psi_{\nu,\alpha_2;12}^{1}(b_{2n}R_1, b_{2n}r) - \delta_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1; b_{1n})\times$$
$$\times\Psi_{\nu,\alpha_2;12}^{1}(b_{2n}R_1, b_{2n}r)], \qquad (16)$$
$$\Psi_{\nu,\alpha_2;j2}^{1}(b_{2n}R_1, b_{2n}r) = u_{\nu,\alpha_2;j2}^{11}(b_{2n}R_1)\times$$
$$\times N_{\nu,\alpha_2}(b_{2n}r) - u_{\nu,\alpha_2;j2}^{12}(b_{2n}R_1)J_{\nu,\alpha_2}(b_{2n}r);\ j = 1,2.$$

Введемо до розгляду квадрат норми власної функції:

$$\Big|\Big|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big|\Big|^2 = \Big(V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n), V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big) =$$
$$= \int_{R_0}^{R_3}\Big[V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big]^2\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1}\Big[V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\Big]^2\times$$
$$\times\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr + \int_{R_1}^{R_2}\Big[V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big]^2\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr +$$
$$+ \int_{R_2}^{R_3}\Big[V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\Big]^2\sigma_3 dr,\ (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2). \qquad (17)$$

Згідно з роботою [8] сформулюємо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння (11) складають дискретний спектр ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$: корені дійсні, різні, симетричні відносно $\beta = 0$ й на додатній піввісі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система власних вектор-функцій $\Big\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) \in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є за системою $\Big\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\times$$
$$\times\frac{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\Big|\Big|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big|\Big|^2} \qquad (18)$$

Ряд Фур'є (18) визначає пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ й обернене $H_{\nu,(\alpha)}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ [8]:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_3} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n \qquad (19)$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\frac{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\Big|\Big|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big|\Big|^2} \equiv g(r) \qquad (20)$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r) = \Big\{B_{\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)]; g_3''(r)\Big\}$$

неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\Big(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\Big)g_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0,$$
$$\Big(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\Big)g_3(r)\Big|_{r=R_3} = g_R \qquad (21)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)\times\right.$$

$$\left.\times g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk};\ j,k=1,2, \qquad (22)$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}\Big[M_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\Big]=-\beta_n^2\tilde{g}_n-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde{g}_{jn}+$$

$$+(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0+$$

$$+(\alpha_{22}^3)^{-1}V_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\sigma_3g_R+\sum_{k=1}^{2}d_k\times$$

$$\times\Big[Z_{\nu,(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{\nu,(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}\Big]. \qquad (23)$$

У рівності (23) прийняті позначення:

$$d_1=\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}(c_{11})^{-1},\ d_2=\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}(c_{12})^{-1},$$

$$\tilde{g}_{1n}=\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_{2n}=\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2r^{2\alpha_2+1}dr,$$

$$\tilde{g}_{3n}=\int_{R_2}^{R_3}g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3dr,$$

$$Z_{\nu,(\alpha);i2}^k(\beta_n)=\left(\alpha_{i2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^k\right)\times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k},\ i,k=1,2.$$

Формули (19), (20) та (23) складають математичний апарат, спроможний будувати розв'язок достатньо широкого класу задач математичної фізики неоднорідних структур.

Зауваження. Якщо перейти до ортонормованих власних функцій за правилом

$$v_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)=V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big(\Big|\Big|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\Big|\Big|\Big)^{-1},$$

то ряд Фур'є (18) матиме вигляд:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3}g(\rho)v_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho v_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n). \qquad (24)$$

Формули (19), (20) приймуть спрощену форму:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)]=\int_{R_0}^{R_3}g(r)v_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n, \qquad (25)$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_nv_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\equiv g(r). \qquad (26)$$

Логічну схему застосування запровадженого СГІП покажемо на типових задачах.

Задача 1 (статики). Побудувати обмежений в області

$$D=\Big\{(r,z):\ r\in I_2,\ z\in(-\infty,+\infty)\Big\}$$

розв'язок еліптичної системи [9]

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial z^2}-\gamma_1^2u_1+B_{\alpha_1}[u_1]=-f_1(r,z),\ r\in(R_0,R_1),$$
$$\frac{\partial^2u_2}{\partial z^2}-\gamma_2^2u_2+B_{\nu,\alpha_2}[u_2]=-f_2(r,z),\ r\in(R_1,R_2), \qquad (27)$$
$$\frac{\partial^2u_3}{\partial z^2}-\gamma_3^2u_3+\frac{\partial^2u_3}{\partial r^2}=-f_3(r,z),\ r\in(R_2,R_3)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_1(r,z)\Big|_{r=R_0}=g_0(z),$$

$$\left(\alpha_{22}^3\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^3\right)u_3(r,z)\Big|_{r=R_3}=g_R(z) \qquad (28)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r,z)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)\times\right.$$

$$\left.\times u_{k+1}(r,z)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}(z),\ j,k=1,2. \qquad (29)$$

Розв'язання. Запишемо систему (27) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+B_{\alpha_1}-\gamma_1^2\right)u_1(r,z)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+B_{\nu,\alpha_2}-\gamma_2^2\right)u_2(r,z)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\gamma_3^2\right)u_3(r,z)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}f_1(r,z)\\ f_2(r,z)\\ f_3(r,z)\end{bmatrix}. \qquad (30)$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}$ згідно правила (25) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,(\alpha)}[...] = \Big[\int\limits_{R_0}^{R_1} ...v_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr$$

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} ...v_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr$$

$$\int\limits_{R_2}^{R_3} ...v_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 dr\Big]. \qquad (31)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (31) до системи (30) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (23) одержуємо крайову задачу: побудувати обмежений на декартовій осі $|z| < \infty$ розв'язок диференціального рівняння

$$\sum_{j=1}^{3}\Big[\frac{d^2}{dz^2} - (\beta_n^2 + \gamma_j^2 + k_j^2)\Big]\tilde{u}_{jn}(z) = -\tilde{F}_n(z) \equiv$$

$$\equiv -\Big[\tilde{f}_n(z) + (-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\nu,(\alpha)}(R_0,\beta_n)\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\times$$

$$\times g_0(z) + (\alpha_{22}^3)^{-1}V_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\sigma_3 g_R(z) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\Big(Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k}(z) -$$

$$-Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{1k}(z)\Big)\Big]. \qquad (32)$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_1^2 > 0$. Покладемо всюди $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geqslant 0$, $k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geqslant 0$, $\tilde{u}_{1n} + \tilde{u}_{2n} + \tilde{u}_{3n} = \tilde{u}_n$. Диференціальне рівняння (32) набуває вигляду:

$$\Big(\frac{d^2}{dz^2} - \omega_n^2\Big)\tilde{u}_n(z) = -\tilde{F}_n(z),\ \omega_n^2 = \beta_n^2 + \gamma_1^2. \qquad (33)$$

Якщо функція $\tilde{F}_n(z)$ має скінченні граничні значення при $z \to \pm\infty$ або нуль, то шуканим розв'язком диференціального рівняння (33) є функція

$$\tilde{u}_n(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n|z-\xi|}}{2\omega_n}\tilde{F}_n(\xi)d\xi,\ \omega_n = (\beta_n^2+\gamma_1^2)^{1/2}. \qquad (34)$$

Оператор $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ згідно правила (26) як обернений до (31) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[...] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} ...v_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} ...v_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} ...v_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n) \end{bmatrix}. \qquad (35)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(z)]$, де функція $\tilde{u}_n(z)$ визначена формулою (34). У результаті низки елементарних перетворень отримуємо єдиний розв'язок еліптичної задачі (27) - (29):

$$u_j(r,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[W_{\nu,(\alpha);1j}(r,z,\xi)g_0(\xi) +$$

$$+W_{\nu,(\alpha);3j}(r,z,\xi)g_R(\xi)\Big]d\xi +$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{R_{m-1}}^{R_m} \mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jm}(r,\rho,z,\xi)f_m(\rho,\xi)\times$$

$$\times\sigma_m\varphi_m(\rho)d\rho d\xi + \sum_{k=1}^{2} d_k\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);12}(r,z,\xi)\times$$

$$\times\omega_{2k}(\xi) - \mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);22}(r,z,\xi)\omega_{1k}(\xi)\Big]d\xi;\ j = \overline{1,3}; \qquad (36)$$

$$(\varphi_1(r) = r^{2\alpha_1-1},\ \varphi_2(r) = r^{2\alpha_2+1},\ \varphi_3(r) = 1).$$

У рівності (36) беруть участь головні розв'язки еліптичної задачі (27) - (29):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);1j}(r,z,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\xi|}}{2\omega_n}(-\alpha_{11}^0)^{-1}\times$$

$$\times v_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1},\ j = \overline{1,3} \qquad (37)$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);3j}(r,z,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\xi|}}{2\omega_n}(\alpha_{22}^3)^{-1}\times$$

$$\times v_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\sigma_3,\ j=\overline{1,3} \quad (38)$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);i2}(r,z,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\xi|}}{2\omega_n}Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n)\times$$

$$\times v_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n);\ i,k=1,2;\ j=\overline{1,3} \quad (39)$$

4) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,z,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\xi|}}{2\omega_n}v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\times$$

$$\times v_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n),\ j,k=\overline{1,3}. \quad (40)$$

Вектор-функція $u(r,z)=\{u_1(r,z);u_2(r,z);u_3(r,z)\}$ повністю визначає єдине інтегральне зображення аналітичного розв'язку даної еліптичної задачі.

Задача 2 (квазістатики). Побудувати обмежений в області

$$D_1=\Big\{(t,r):\ t\in(0,\infty);\ r\in I_2\Big\}$$

розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [9]

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}+\gamma_1^2u_1-a_1^2B_{\alpha_1}[u_1]=f_1(t,r),\ r\in(R_0,R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2u_2-a_2^2B_{\nu,\alpha_2}[u_2]=f_2(t,r),\ r\in(R_1,R_2), \quad (41)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2u_3-a_3^2\frac{\partial^2u_3}{\partial r^2}=f_3(t,r),\ r\in(R_2,R_3)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\Big|_{t=0}=g_j(r),\ r\in(R_{j-1},R_j),\ j=\overline{1,3}, \quad (42)$$

крайовими умовами

$$\Big(\alpha^0_{11}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^0_{11}\Big)u_1(t,r)\Big|_{r=R_0}=g_0(t),$$

$$\Big(\alpha^3_{22}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^3_{22}\Big)u_3(t,r)\Big|_{r=R_3}=g_R \quad (43)$$

та умовами спряження

$$\Big[\Big(\alpha^k_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j1}\Big)u_k(t,r)-\Big(\alpha^k_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j2}\Big)\times$$

$$\times u_{k+1}(t,r)\Big]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t);\ j,k=1,2. \quad (44)$$

Розв'язання. Запишемо систему (41) і початкові умови (42) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2B_{\alpha_1}\Big)u_1(t,r)\\ \Big(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2B_{\nu,\alpha_2}\Big)u_2(t,r)\\ \Big(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big)u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\end{bmatrix}. \quad (45)$$

Застосуємо до задачі (45) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (31). Внаслідок основної тотожності (23) отримуємо задачу Коші [5]:

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\frac{d}{dt}+\beta_n^2+\gamma_j^2+k_j^2\Big)\tilde u_{jn}(t)=\tilde F_n(t),$$

$$\tilde u_n(t)\Big|_{t=0}=\tilde g_n. \quad (46)$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_2^2>0$. Покладемо всюди $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\geqslant0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\geqslant0$, $\tilde u_{1n}(t)+\tilde u_{2n}(t)+\tilde u_{3n}(t)=\tilde u_n(t)$. Рівняння (46) набуває вигляду:

$$\Big(\frac{d}{dt}+\omega_n^2\Big)\tilde u_n(t)=F_n(t),\ \omega_n^2=\beta_n^2+\gamma_2^2. \quad (47)$$

При цьому залишається справедливою початкова умова

$$\tilde u_n(t)\Big|_{t=0}=\tilde g_n. \quad (48)$$

Розв'язком задачі Коші (47), (48) є функція

$$\tilde u_n(t)=e^{-\omega_n^2t}\tilde g_n+\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\tilde F_n(\tau)d\tau. \quad (49)$$

Введемо до розгляду головні розв'язки параболічної задачі (41) - (44):

1) породжені неоднорідністю системи (41) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2t}v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\times$$

$$\times v_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n);\ j,k=\overline{1,3}, \tag{50}$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);1j}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n^2 t}}{-\alpha_{11}^0}v_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)\times$$

$$\times v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1},\ j=\overline{1,3} \tag{51}$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);3j}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}(\alpha_{22}^3)^{-1}v_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\times$$

$$\times v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)a_3^2\sigma_3;\ j=\overline{1,3} \tag{52}$$

4) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);i2}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n)\times$$

$$\times v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)d_k;\ i,k=1,2;\ j=\overline{1,3}. \tag{53}$$

Застосуємо до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (49), за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (35). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку параболічної задачі (41) - (44):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\Big[W_{\nu,(\alpha);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)+$$

$$+W_{\nu,(\alpha);3j}(t-\tau,r)g_R(\tau)\Big]d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)[f_k(\tau,\rho)+$$

$$+\delta_+(\tau)g_k(\rho)]\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho d\tau+ \tag{54}$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^t\Big[\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-$$

$$-\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)\Big]d\tau;\ j=\overline{1,3},$$

$\delta_+(t)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $t = 0+$ [6].

<u>**Задача 3**</u> (динаміки). Побудувати обмежений в області D_1 розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу [9]

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\gamma_1^2 u_1-B_{\alpha_1}[u_1]=f_1(t,r),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\gamma_2^2 u_2-B_{\nu,\alpha_2}[u_2]=f_2(t,r), \tag{55}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+\gamma_3^2 u_3-\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}=f_3(t,r)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\Big|_{t=0}=g_j(r),\ \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_j(r),\ j=\overline{1,3} \tag{56}$$

крайовими умовами (43) та умовами спряження (44).

<u>Розв'язання</u>. Запишемо систему (55) і початкові умови (56) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2-B_{\alpha_1}\Big)u_1(t,r)\\ \Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2-B_{\nu,\alpha_2}\Big)u_2(t,r)\\ \Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_3^2-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big)u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix}, \tag{57}$$

$$\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}\psi_1(r)\\ \psi_2(r)\\ \psi_3(r)\end{bmatrix}. \tag{58}$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_3^2>0$. Покладемо всюди $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\geqslant 0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\geqslant 0$, $k_3^2=0$. Застосуємо до задачі (57), (58) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (31). Внаслідок основної тотожності (23) одержуємо задачу Коші [5]:

$$\Big(\frac{d^2}{dt^2}+\beta_n^2+\gamma_3^2\Big)\tilde{u}_n(t)=\tilde{F}_n(t),$$

$$\tilde{u}_n\Big|_{t=0}=\tilde{g}_n,\ \frac{d\tilde{u}_n}{dt}\Big|_{t=0}=\tilde{\psi}_n. \tag{59}$$

Розв'язком задачі Коші (59) є функція

$$\tilde{u}_n(t)=\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\tilde{\psi}_n+\frac{d}{dt}\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\tilde{g}_n+$$

$$+\int_0^t \frac{\sin\omega_n(t-\tau)}{\omega_n}\tilde{F}_n(\tau)d\tau,\ \omega_n=(\beta_n^2+\gamma_3^2)^{1/2}. \tag{60}$$

Застосувавши до матриці-елементу $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (60), за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (35), маємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку доної гіперболічної задачі:

$$u_j(t,r)=\sum_{m=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{m-1}}^{R_m}\Big[\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jm}(t-\tau,r,\rho)\times$$

$$\times[f_m(\tau,\rho)+\psi_m(\rho)\delta_+(\tau)\Big]\sigma_m\varphi_m(\rho)d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{3}\int_{R_{m-1}}^{R_m}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jm}(t,r,\rho)g_m(\rho)\sigma_m\varphi_m(\rho)\times$$

$$\times d\rho+\int_0^t\Big[W_{\nu,(\alpha);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)+$$

$$+W_{\nu,(\alpha);3j}(t-\tau,r)g_R(\tau)\Big]d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^t\Big[\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-$$

$$-\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)\Big]d\tau,\ j=\overline{1,3}. \tag{61}$$

Головні розв'язки даної гіперболічної задачі функції впливу $\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jm}(t,r,\rho)$, функції Гріна $W_{\nu,(\alpha);1j}(t,r)$, $W_{\nu,(\alpha);3j}(t,r)$ та $\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);i2}(t,r)$ визначені формулами (50) - (53), в яких функція $exp[-\omega_n^2 t]$ замінена на функцію $(\omega_n^{-1}\sin\omega_n t)$, де $\omega_n=(\beta_n^2+\gamma_3^2)^{1/2}$.

Зауваження 1. Наведені задачі статики, квазістатики та динаміки поліпараметричні. Це дає можливість безпосередньо вибором параметрів із загальних структур виділити необхідні практично важливі випадки (в рамках даної моделі).

Зауваження 2. Одержані інтегральні зображення наведених задач носять алгоритмічний характер. Це дозволяє їх успішно використовувати як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ленюк М.П., Міхалевська Г.І.* Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. - Чернівці: Прут, 2002. - 280 с.
2. *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 62 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
3. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз. 1959. - 468с.
4. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.
5. *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. - Тернопіль: Економ. думка, 2004. - 368с.
6. *Ленюк М.П.* Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики. Том 1. - Чернівці: Прут, 2010. - 352 с.
7. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1971. - 432с.
8. *Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В.* Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. - Чернівці: Прут, 2001. - 228с.
9. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 735с.