УДК 517.9

©2014 р. Л.М. Сергєєва

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ГЛОБАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДЕКІЛЬКОМА ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

Побудовано систему лінійних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої є глобальними розв'язками системи лінійних диференціальних рівнянь з кількома відхиленнями аргументу. Обґрунтовано існування такої системи, а також досліджено деякі властивості її розв'язків.

We provide a system of differential equations whose solutions are global solutions of a system of differential equations with multiple deviating arguments. We justify the existence of the provided system and study some properties of its solutions.

В праці [1] А.М. Самойленко запропонував апроксимувати систему лінійних рівнянь з одним відхиленням аргументу системою звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої були б розв'язками вихідної системи на $\mathbb{R}$, було також встановлено деякі властивості розв'язків цих систем. Для систем рівнянь з лінійно перетвореним аргументом на півосі аналогічні питання досліджені в статті А.М. Самойленка і Н.Л. Денисенко [2].

В роботах [3–4] розглянуто застосування запропонованого методу для знаходження і дослідження глобальних розв'язків деяких типів лінійних функціонально-диференціальних рівнянь.

У даній роботі для системи диференціальних рівнянь з декількома відхиленнями аргументу будується система звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої є глобальними розв'язками початкової системи.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i(t)x(t+\lambda_i) + f(t), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1,N}$. Побудуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t) + g(t), \ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

всі розв'язки якої будуть глобальними розв'язками системи рівнянь (1). Тут $A, B_i, C,$ – n-вимірні матричні, $i = \overline{1,N}$, f, g – векторні функції розмірності n.

Покажемо, що матрична функція $C = C(t)$ і вектор-функція $g = g(t)$ задовольняють рівняння вигляду:

$$C(t) = A(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Omega_{\tau}^{t+\lambda_i}(C), \tag{3}$$

$$g(t) = f(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i(t) \int_{t}^{t+\lambda_i} \Omega_{s}^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds. \tag{4}$$

Тут $\Omega_{\tau}^{t}(C)$ – нормована фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь (2), яка визначається з рівняння $\Omega_{\tau}^{t}(C) = I + \int_{\tau}^{t} C(s)ds + \int_{\tau}^{t} C(s)\int_{\tau}^{s} C(s_1)ds_1ds + \ldots + \int_{\tau}^{t} C(s)\int_{\tau}^{s} C(s_1)\ldots\int_{\tau}^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{n-1}\ldots ds_1ds + \ldots$, де I – одинична матриця, $t, \tau \in \mathbb{R}$. Даний ряд буде збіжним для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}$, причому рівномірно за (t, τ) на кожному компакті в $\mathbb{R}^2$. Загальний розв'язок системи рівнянь (2) визначається формулою Коші

$$x(t) = \Omega_{\tau}^{t}(C)x_0 + \int_{\tau}^{t} \Omega_{s}^{t}(C)g(s)ds, \tag{5}$$

де $t, \ \tau \in \mathbb{R}, \ x_0 \in \mathbb{R}^n$ – довільний сталий вектор. Функція (5) задовольняє систему рівнянь (1) тоді і тільки тоді, коли

$$C(t)[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds] + g(t) =$$

$$= A(t)[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds] +$$

$$+ \sum_{i=1}^N B_i(t)[\Omega_\tau^{t+\lambda_i}(C)x_0 +$$

$$+ \int_\tau^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds] + f(t). \qquad (6)$$

Покладаючи в тотожності (6) $x_0 = 0$, отримаємо

$$C(t)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) =$$

$$= A(t)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^N B_i(t)\int_\tau^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds + f(t),\ t\in\mathbb{R}. \qquad (7)$$

З (6) і (7) маємо рівняння

$$C(t)\Omega_\tau^t(C) = A(t)\Omega_\tau^t(C) + \sum_{i=1}^N B_i(t)\Omega_\tau^{t+\lambda_i}(C).$$

Враховуючи властивості матриці $\Omega_\tau^t(C)$, можна зробити висновок, що останнє рівняння буде вірне тільки тоді, коли

$$C(t) = A(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t)\Omega_t^{t+\lambda_i}(C).$$

Якщо підставити (3) в (7), то одержимо

$$A(t)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^N B_i(t)\Omega_t^{t+\lambda_i}(C)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) =$$

$$= A(t)\int_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^N B_i(t)\int_\tau^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds + f(t).$$

Звідси випливає, що

$$g(t) = f(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t)[\int_\tau^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds -$$

$$- \int_\tau^t \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds] =$$

$$= f(t) + \sum_{i=1}^N B_i(t)\int_t^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C)g(s)ds.$$

Отже, якщо всі розв'язки системи рівнянь (2) є глобальними розв'язками системи рівнянь (1), то матриця $C(t)$ задовольняє рівняння (3), а вектор-функція $g(t)$ – рівняння (4) при $t \in \mathbb{R}$.

З іншого боку, якщо вимірні функції C і g задовольняють рівняння (3), (4), то вектор-функція (5) при $t \in \mathbb{R}$ є глобальним розв'язком рівняння (1).

Отже, розв'язність рівнянь (3), (4) в просторі вимірних на $\mathbb{R}$ функцій є необхідною і достатньою умовою для того, щоб всі розв'язки рівняння (2) були глобальними розв'язками рівняння (1).

Теорема 1. *Нехай в системі диференціальних рівнянь* (1) *матричні функції* $A(t), B_i(t)$ $(i = \overline{1,N})$ *та вектор-функція* $f(t)$ *визначені й вимірні (за Лебегом) на* $\mathbb{R}$, $B_i(t)$ $(i = \overline{1,N})$ *– неперервні на* $\mathbb{R}$ *та виконуються нерівності:*

$$\|A(t)\| \leqslant \alpha,\ \|B_i(t)\| \leqslant \beta_i,$$

$$\|f(t)\| \leqslant 1,\ i = \overline{1,N},\ t \in \mathbb{R},$$

причому

$$\sum_{i=1}^N \beta_i|\lambda_i|e^{|\lambda_i|(\alpha+\frac{1}{\lambda})} < 1,\ \lambda = \max_{i=\overline{1,N}}|\lambda_i|, \qquad (8)$$

тоді всі розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь (2) *будуть розв'язками системи диференціально-функціональних рівнянь* (1) *при* $t \in \mathbb{R}$.

Доведемо спочатку, що рівняння (3), (4) мають розв'язки. Визначимо простір $\mathbb{C}(m)$ неперервних на $\mathbb{R}$ вектор-функцій $z = z(t)$, таких що

$$\|z\| = \sup_{t\in R}|z(t)| \leqslant m.$$

Тоді $\mathbb{C}(m)$ буде повним метричним простором з метрикою $\|x-y\|$. Аналогічно визначається простір $\mathbb{C}(m)$ неперервних на $\mathbb{R}$ матричних функцій $Z = Z(t)$. Для доведення теореми 1 доведемо спочатку дві допоміжні леми.

Розглянемо рівняння (3). Доведемо лему 1 про його розв'язність.

Лема 1. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує визначений і вимірний на* $\mathbb{R}$ *розв'язок* C *рівняння* (3), *такий, що*

$$\sup_{t\in R}|C(t)| \leqslant M_1,$$

де M_1 *– деяка стала, що залежить від* α, λ_i, β_i, $i = \overline{1,N}$.

Доведення леми 1. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,N}$. Виконаємо заміну змінних у рівнянні (3)

$$C = A + Z.$$

Отримаємо рівняння

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N} B_i \Omega_t^{t+\lambda_i}(A+Z). \tag{9}$$

Його розв'язки будуть неперервними функціями в силу умов, визначених вище.

Розглянемо оператор S

$$SZ(t) = \sum_{i=1}^{N} B_i \Omega_t^{t+\lambda_i}(A+Z).$$

в просторі $\mathbb{C}(m)$ матриць $Z = Z(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$. Тоді для $SZ(t)$ вірна оцінка

$$\|SZ\| = \sup_{t\in R}\left(\sum_{i=1}^{N} \|B_i\| \Omega_t^{t+\lambda_i}(\|A\|+m)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \beta_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}.$$

Якщо виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \leqslant m, \tag{10}$$

то оператор S переводить простір $\mathbb{C}(m)$ в себе.

Нехай $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}(m)$. Оцінимо різницю

$$SZ_1(t) - SZ_2(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} B_i \Omega_t^{t+\lambda_i}(A+Z_1) - \sum_{i=1}^{N} B_i \Omega_t^{t+\lambda_i}(A+Z_2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} B_i \left(\Omega_t^{t+\lambda_i}(A+Z_1) - \Omega_t^{t+\lambda_i}(A+Z_2)\right).$$

Введемо позначення $P_1 = A + Z_1$, $P_2 = A + Z_2$ і спочатку розглянемо різниці $\Omega_t^{t+\lambda_i}(P_1) - \Omega_t^{t+\lambda_i}(P_2)$, $i = \overline{1,N}$, тоді маємо

$$\left\| \int_t^{t+\lambda_i} P_1(s)ds - \int_t^{t+\lambda_i} P_2(s)ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{t+\lambda_i} \|P_1(s) - P_2(s)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_i \|Z_1 - Z_2\|, \; i = \overline{1,N}.$$

Далі,

$$\left\| \int_t^{t+\lambda_i} P_1(s) \int_t^{s} P_1(s_1) ds_1 ds - \right.$$

$$\left. - \int_t^{t+\lambda_i} P_2(s) \int_t^{s} P_2(s_1) ds_1 ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_t^{t+\lambda_i} (P_1(s) - P_2(s)) \int_t^{s} P_1(s_1) ds_1 ds + \right.$$

$$\left. + \int_t^{t+\lambda_i} P_2(s) \int_t^{s} (P_1(s_1) - P_2(s_1)) ds_1 ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_t^{t+\lambda_i} \int\limits_t^{s} \|P_1(s_1)\| ds_1 ds +$$

$$+ \int\limits_t^{t+\lambda_i} \|P_2(s)\| \int\limits_t^{s} ds_1 ds \Big) \|P_1 - P_2\| \leqslant$$

$$\leqslant 2(\alpha+m)\frac{\lambda_i^2}{2!}\|Z_1 - Z_2\| =$$

$$= \lambda_i \frac{(\alpha+m)\lambda_i}{1!}\|Z_1 - Z_2\|, \ i = \overline{1,N}.$$

Продовжуючи цей процес, одержимо

$$\Big\| \int\limits_t^{t+\lambda_i} P_1(s) \int\limits_t^{s} P_1(s_1) ...$$

$$\int\limits_t^{s_{n-2}} P_1(s_{n-1}) ds_{n-1} ... ds_1 ds -$$

$$- \int\limits_t^{t+\lambda_i} P_2(s) \int\limits_t^{s} P_2(s_1) ...$$

$$\int\limits_t^{s_{n-2}} P_2(s_{n-1}) ds_{n-1} ... ds_1 ds \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_i \frac{(\alpha+m)^{n-1}\lambda_i^{n-1}}{(n-1)!}\|Z_1 - Z_2\|, \ i = \overline{1,N}.$$

Отже,

$$\|\Omega_t^{t+\lambda_i}(P_1) - \Omega_t^{t+\lambda_i}(P_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|Z_1 - Z_2\|, \ i = \overline{1,N}.$$

Звідси випливає, що

$$\|SZ_1(t) - SZ_2(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|Z_1 - Z_2\|, t \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1,N}. \tag{11}$$

Оператор S буде оператором стиску в $\mathbb{C}(m)$, якщо виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} < 1. \tag{12}$$

Будемо вимагати одночасного виконання нерівностей (10) і (12). Введемо до розгляду величину $\lambda = \underset{i=\overline{1,N}}{max}|\lambda_i|$. Від умови (10) перейдемо до сильнішої

$$e^{\lambda(\alpha+m)} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \leqslant m.$$

Нехай виконується умова (8), коли $\lambda_i > 0$, тоді рівняння $e^{\lambda(\alpha+m)} \sum_{i=1}^{N} \beta_i = m$ матиме розв'язки, але тільки для

$$m_1 \leqslant m < \frac{1}{\lambda} \tag{13}$$

будуть одночасно виконуватись нерівності (10) і (12).

Отже, при виконанні нерівності (8) для значень m, які задовольняють нерівність (13), оператор S є оператором стиску і відображає простір $\mathbb{C}(m)$ в себе. Тобто S має в просторі $\mathbb{C}(m)$ єдину нерухому точку, яка і є розв'язком рівняння (3). Лему 1 доведено.

Розглянемо тепер рівняння (4) і доведемо наступну лему про його розв'язність.

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує визначений і вимірний на $\mathbb{R}$ розв'язок g рівняння (4), такий, що*

$$\sup_{t\in R}|g(t)| \leqslant M_2,$$

де M_2 – деяка стала, що залежить від α, λ_i, β_i, $i = \overline{1,N}$.

Доведення леми 2. Виконаємо в рівнянні (4) заміну змінних $g = f + z$, отримаємо рівняння

$$z(t) = \sum_{i=1}^{N} B_i(t) \Big[\int\limits_t^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C) f(s) ds +$$

$$+ \int\limits_t^{t+\lambda_i} \Omega_s^{t+\lambda_i}(C) z(s) ds \Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} B_i(t) \Big[\int\limits_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s) ds +$$

$$+ \int\limits_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) z(t+s) ds \Big]. \tag{14}$$

Визначимо оператор S_1 в просторі $\mathbb{C}(M_2)$ функцій $z = z(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$

$$S_1 z(t) = \sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Bigg[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s)ds +$$

$$+ \int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) z(t+s)ds\Bigg].$$

Функція $S_1 z(t)$ буде неперервною на $\mathbb{R}$, причому

$$\|S_1 z\| \leqslant (1 + M_2)\sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}.$$

Тому, якщо

$$(1 + M_2)\sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \leqslant M_2. \qquad (15)$$

то оператор S_1 переводить простір $\mathbb{C}(M_2)$ в себе. Для довільних вектор-функцій $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(M_2)$ розглянемо різницю

$$S_1 z_1(t) - S_1 z_2(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Bigg[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s)ds +$$

$$+ \int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) z_1(t+s)ds\Bigg] -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Bigg[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) f(t+s)ds +$$

$$+ \int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C) z_2(t+s)ds\Bigg] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Bigg[\int_0^{\lambda_i} \Omega_{s+t}^{t+\lambda_i}(C)(z_1(t+s) -$$

$$- z_2(t+s))ds\Bigg].$$

Тому

$$\|S_1 z_1(t) - S_1 z_2(t)\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} \|z_1 - z_2\|.$$

При виконанні умови $\sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)} < 1$ оператор S_1 буде оператором стиску в $\mathbb{C}(M_2)$. Враховуючи цю нерівність, із (15) одержимо, що при

$$M_2 \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}}{1 - \sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}}$$

оператор S_1 відображає $\mathbb{C}(M_2)$ в себе і є стискаючим. Простір $\mathbb{C}(M_2)$ є повним нормованим простором і цього достатньо, щоб існував єдиний розв'язок рівняння (14), отже, і рівняння (4). Лему 2 доведено.

Доведення теореми 1. Щоб довести теорему 1, потрібно було показати, що кожне із рівнянь (3) і (4) має єдиний розв'язок на $\mathbb{R}$. Існування єдиного розв'язку для рівняння (3) було доведено в лемі 1, а для рівняння (4) – в лемі 2.

Якщо $\lambda_i, i = \overline{1, N}$, є числами різних знаків, то при доведенні теореми замість λ_i потрібно писати $|\lambda_i|$, як в умові (8).

Теорему 1 доведено.

Наступна теорема характеризує властивості розв'язків рівнянь (3) і (4).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і матричні функції $A(t), B_i(t)$ $(i = \overline{1, N})$ та вектор-функція $f(t)$ в системі диференціальних рівнянь (1) є r разів неперервно диференційовними, періодичними, квазіперіодичними або майже періодичними функціями. Тоді r разів неперервно диференційовними, періодичними, квазіперіодичними або майже періодичними є розв'язки C і g рівнянь* (3), (4).

Справді, із рівнянь (9) і (14) випливає, що їх розв'язки мають гладкість на порядок вищу, ніж гладкість функцій $A, B_i (i = \overline{1, N})$ та f. Тому функції $C(t)$ і $g(t)$ мають гладкість функцій A, B_i $(i = \overline{1, N})$, f. Для завершення доведення теореми 2 доведемо спочатку наступну лему.

Лема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1 та існує послідовність $\tau_n \in \mathbb{R}, n =$*

$1, 2, \ldots,$ *така, що*

$$\lim_{n\to\infty}[\|A_n-A\|+\sum_{i=1}^{N}\|B_n^i-B_i\|+\|f_n-f\|]=0, \tag{16}$$

де $A_n = A(t+\tau_n)$, $B_n^i = B_i(t+\tau_n)$, $f_n = f(t+\tau_n)$, $i=\overline{1,N}$. *Тоді розв'язки* C *і* g *рівнянь* (3), (4) *задовольняють умову*

$$\lim_{n\to\infty}[\|C_n-C\|+\|g_n-g\|]=0, \tag{17}$$

де $C_n = C(t+\tau_n), g_n = g(t+\tau_n)$.

Доведення леми 3. Встановимо співвідношення (17) для розв'язків рівнянь (3), (4). Позначимо $\Omega_\tau^t(C) = \Omega_\tau^t(C(s))$ і розглянемо спочатку різницю $Z_n - Z = Z(t+\tau_n) - Z(t)$. Маємо

$$Z_n - Z = \sum_{i=1}^{N} B_i(t+\tau_n)\Omega_{t+\tau_n}^{t+\tau_n+\lambda_i}(A(s)+Z(s)) -$$

$$-\sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Omega_t^{t+\lambda_i}(A(s)+Z(s)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} B_i(t+\tau_n)\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s+\tau_n)+$$

$$+Z(t+s+\tau_n))-$$

$$-\sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s)+Z(t+s)) =$$

$$= \Big[\sum_{i=1}^{N} B_i(t+\tau_n)\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s+\tau_n)+$$

$$+Z(t+s+\tau_n))-$$

$$-\sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s+\tau_n)+$$

$$+Z(t+s+\tau_n))\Big]+$$

$$+\Big[\sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s+\tau_n)+$$

$$+Z(t+s+\tau_n))-$$

$$-\sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s)+Z(t+s+\tau_n))\Big]+$$

$$+\Big[\sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s)+Z(t+s+\tau_n))-$$

$$-\sum_{i=1}^{N} B_i(t)\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s)+Z(t+s))\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(B_i(t+\tau_n)-B_i(t))\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s+\tau_n)+$$

$$+Z(t+s+\tau_n))+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} B_i(t)(\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s+\tau_n)+Z(t+s+\tau_n))-$$

$$-\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s)+Z(t+s+\tau_n)))+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} B_i(t)(\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s)+Z(t+s+\tau_n))-$$

$$-\Omega_0^{\lambda_i}(A(t+s)+Z(t+s))). \tag{18}$$

Враховуючи (11) і (18), отримуємо

$$\|Z_n - Z\| \leqslant \sum_{i=1}^{N}\|B_n^i - B_i\|e^{\lambda_i(\alpha+m)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|A_n-A\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|Z_n-Z\|.$$

Якщо виконується оцінка (8), то

$$\|Z_n - Z\| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{N}\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}}{1-\sum_{i=1}^{N}\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}}\|A_n-A\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{\lambda_i(\alpha+m)}}{1-\sum_{j=1}^{N}\beta_j\lambda_j e^{\lambda_j(\alpha+m)}}\|B_n^i-B_i\|.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\|Z_n-Z\|=0.$$

А ця рівність доводить, що

$$\lim_{n\to\infty}\|C_n-C\|=0. \tag{19}$$

Нехай $z_n = z(t+\tau_n)$. Тоді із врахуванням (14), для різниці $z_n - z$ одержимо рівняння

$$z_n - z = \sum_{i=1}^{N} B_i(t+\tau_n)\times$$

$$\times\Big[\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C)f(t+\tau_n+s)ds+$$

$$+\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C)z(t+\tau_n+s)ds\Big]-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}B_i(t)\Big[\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C)f(t+s)ds+$$

$$+\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C)z(t+s)ds\Big]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Big[B_i(t+\tau_n)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C)f(t+\tau_n+s)ds-$$

$$-B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C)f(t+\tau_n+s)ds+$$

$$+B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C)f(t+\tau_n+s)ds-$$

$$-B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C)f(t+\tau_n+s)ds+$$

$$+B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C)f(t+\tau_n+s)ds-$$

$$-B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C)f(t+s)ds\Big]+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\Big[B_i(t+\tau_n)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C)z(t+\tau_n+s)ds-$$

$$-B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C)z(t+\tau_n+s)ds+$$

$$+B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+\tau_n+s}^{t+\tau_n+\lambda_i}(C)z(t+\tau_n+s)ds-$$

$$-B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C)z(t+\tau_n+s)ds+$$

$$+B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C)z(t+\tau_n+s)ds-$$

$$-B_i(t)\int\limits_0^{\lambda_i}\Omega_{t+s}^{t+\lambda_i}(C)z(t+s)ds\Big].$$

Враховуючи попередньо встановлені оцінки, отримаємо

$$\|z_n-z\|\leqslant\sum_{i=1}^{N}\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|B_n^i-B_i\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|C_n-C\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|f_n-f\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}M\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|B_n^i-B_i\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|C_n-C\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\|z_n-z\|=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}(1+M)\|B_n^i-B_i\|+$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{N}\beta_i\lambda_i e^{\lambda_i(\alpha+m)}\Big)\Big((1+M)\|C_n-C\|+$$

$$+\|f_n-f\|+\|z_n-z\|\Big).$$

Звідси, із врахуванням нерівності (8), умови (16) леми і одержаної рівності (19), випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n-z\|=0,$$

тому і $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-g\|=0$.

Лему доведено.

Із доведеної леми випливає справедливість теореми 2 для майже періодичних функцій $A(t)$, $B_i(t)$ $(i = \overline{1,N})$, $f(t)$, до того ж частотні базиси функцій $A(t)$, $B_i(t)$ $(i = \overline{1,N})$, $f(t)$ та розв'язків C і g співпадають. Тому теорема 2 справедлива і для випадку, коли $A(t)$,$B_i(t)$ $(i = \overline{1,N})$, $f(t)$ періодичні чи квазіперіодичні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, №5. – С. 631–640.

2. *Самойленко А.М., Денисенко Н.Л.* Про розв'язки на півосі системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №4. – С. 501–513.

3. *Сергеєва Л.М., Бігун Я.Й.* Знаходження глобальних розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 108–112.

4. *Сергеєва Л.М., Бігун Я.Й.* Про глобальні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, №1. – С. 100–110.