УДК 517.988.6

©2014 р. **В.Ю. Слюсарчук**

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ДОСЛІДЖЕННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ДИСКРЕТНИМ АРГУМЕНТОМ, ЩО НЕ ВИКОРИСТОВУЄ $\mathcal{H}$-КЛАСИ ЦИХ РІВНЯНЬ

Отримано умови існування майже періодичних розв'язків лінійних і нелінійних майже періодичних різницевих рівнянь, що не використовують $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь.

We obtain conditions for the existence of almost periodic solutions of linear and nonlinear almost periodic difference equations which does not use the $\mathcal{H}$-classes of these equations.

1. Основні позначення та задача. Нехай $\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел, $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел і E – банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через $\mathfrak{M}$ банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $x_n\in E$, для кожної з яких

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_n\|_E<\infty,$$

з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_n\|_E$$

і нульовим елементом $\mathbf{0}$.

У просторі $\mathfrak{M}$ визначимо оператор зсуву S_m, $m\in\mathbb{Z}$, формулою

$$(S_m\mathbf{x})_n=x_{n+m},\ n\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Елемент $\mathbf{y}\in\mathfrak{M}$ називається *майже періодичним* (за Бохнером) (див. [1]), якщо замикання множини $\{S_m\mathbf{y}:m\in\mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактною підмножиною цього простору.

Множина $\mathfrak{B}$ майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є підпростором цього простору з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{B}}=\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}.$$

Нехай Ω – область простору E і $\mathcal{K}$ – множина всіх непорожніх компактних підмножин $K\subset\Omega$.

Визначимо відображення $\mathbf{F}:\Omega^{m+1}\to\mathfrak{M}$ формулою

$$\mathbf{F}(x_0,x_1,\ldots,x_m)=(F_n(x_0,x_1,\ldots,x_m))_{n\in\mathbb{Z}},$$

де $(x_0,x_1,\ldots,x_m)\in\Omega^{m+1}$ і $F_n:\Omega^{m+1}\to E$, $n\in\mathbb{Z}$, – неперервні відображення.

Будемо вважати, що $\mathbf{F}$ задовольняє умови:

1) $\mathbf{F}(x_0,x_1,\ldots,x_m)$ як векторна функція зі значеннями в $\mathfrak{M}$ неперервна по $(x_0,x_1,\ldots,x_m)$ на Ω^{m+1} і, отже, рівномірно неперервна по $(x_0,x_1,\ldots,x_m)$ на кожній множині K^{m+1}, де $K\in\mathcal{K}$ (див., наприклад, [2, с. 112]);

2) $\mathbf{F}(x_0,x_1,\ldots,x_m)$ – майже періодична рівномірно по $(x_0,x_1,\ldots,x_m)$ на кожній множині K^{m+1} ($K\in\mathcal{K}$) послідовність.

Неважко показати, що для кожної множини $K\in\mathcal{K}$

$$\sup_{(x_0,x_1,\ldots,x_m)\in K^{m+1}}\|\mathbf{F}(x_0,x_1,\ldots,x_m)\|_{\mathfrak{M}}<+\infty$$

(див. [2, с. 113]) і для довільної послідовності $(m_k)_{k\geqslant1}$ цілих чисел існує підпослідовність $(m_{k_l})_{l\geqslant1}$, для якої послідовність $\left(S_{m_{k_l}}\mathbf{F}(x_0,x_1,\ldots,x_m)\right)_{l\geqslant1}$ збігається рівномірно на множині K^{m+1}.

Вважатимемо, що послідовність $\left(S_{m_{k_l}}\mathbf{F}(x_0,x_1,\ldots,x_m)\right)_{l\geqslant1}$ збігається рівноміно на кожній множині K^{m+1} ($K\in\mathcal{K}$) і граничне відображення $\mathbf{G}:\Omega^{m+1}\to\mathfrak{M}$, що визначається співвідношеннями

$$\mathbf{G}(x_0,x_1,\ldots,x_m)=(G_n(x_0,x_1,\ldots,x_m))_{n\in\mathbb{Z}},$$

$$G_n(x_0,x_1,\ldots,x_m)=$$
$$=\lim_{l\to\infty}F_{n+m_{k_l}}(x_0,x_1,\ldots,x_m),\ n\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

або формулою

$$\mathbf{G}(x_0, x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= \lim_{l\to\infty} S_{m_{k_l}} \mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots, x_m), \qquad (3)$$

задовольняє умови 1 і 2. Наведена вимога виконується, якщо, наприклад, простір E скінченновимірний (див. аналогічні дослідження в [3, с. 429] у випадку диференціальних рівнянь). Зазначимо, що у статті ця вимога виконуватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Множина всіх визначених формулою (3) відображень $\mathbf{G}$ називається *$\mathcal{H}$-класом* відображення $\mathbf{F}$ і позначається через $\mathcal{H}(\mathbf{F})$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$F_n(x_n, x_{n+k_1}, \ldots, x_{n+k_m}) = 0,\ n \in \mathbb{Z}, \qquad (4)$$

де $k_1, \ldots, k_m$ – довільні цілі числа. *$\mathcal{H}$-класом* цього рівняння називається множина всіх різницевих рівнянь

$$G_n(x_n, x_{n+k_1}, \ldots, x_{n+k_m}) = 0,\ n \in \mathbb{Z},$$

де G_n визначається за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов існування майже періодичних розв'язків рівняння (4) без використання множини $\mathcal{H}(\mathbf{F})$. При дослідженні рівняння (4) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння (множини значень цих розв'язків – підмножини компактних множин $K \in \mathcal{K}$). Означення цього функціонала наведемо в наступному пункті.

2. Функціонал δ. Відокремлені та сильно відокремлені розв'язки рівняння (4). Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$, що містить в собі більше, ніж один елемент. Позначимо через $\mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ множину всіх розв'язків $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ рівняння (4), для кожного з яких замикання $\overline{R(\mathbf{x})}$ множини

$$R(\mathbf{x}) = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

є підмножиною множини K. Вважатимемо, що

$$\mathcal{N}(\mathbf{F}, K) \neq \varnothing.$$

Зафіксуємо довільний розв'язок $\mathbf{x}^*$ рівняння (4) зі значеннями в K. Покладемо

$$r(\mathbf{x}^*, K) =$$
$$= \sup\left\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)},\ y \in K\right\}. \qquad (5)$$

Завдяки вимогам до множини K

$$r(\mathbf{x}^*, K) > 0.$$

Зафіксуємо число $\varepsilon \in [0, r(\mathbf{x}^*, K)]$. Позначимо через $\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких

$$R(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) \subset K, \qquad (6)$$

і

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \geqslant \varepsilon. \qquad (7)$$

Аналогічним чином визначаємо множину $\Omega(\mathbf{z}, K, \varepsilon)$ для будь-якого іншого елемента $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$, для якого $R(\mathbf{z}) \subset K$.

Розглянемо функціонал

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{y\in\Omega(\mathbf{x}^*,K,\varepsilon)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_n(x_n^* +$$
$$+ y_n, x_{n+k_1}^* + y_{n+k_1}, \ldots, x_{n+k_m}^* + y_{n+k_m})\|_E. \qquad (8)$$

Означення 1. Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) називається *відокремленим* на множині $\mathbb{Z} \times K$, якщо або цей розв'язок єдиний на множині $\mathbb{Z} \times K$, або для кожного іншого розв'язку $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ зі значеннями в K виконується нерівність

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} \|z_n - u_n\|_E \geqslant \rho > 0,$$

де ρ – стала, залежна тільки від $\mathbf{z}$.

Означення 2. Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) називається *сильно відокремленим* на множині $\mathbb{Z} \times K$, якщо

$$\delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$.

Очевидно, що кожний сильно відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (4) є відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язком цього рівняння. Однак відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (4) може не бути сильно відокремленим на $\mathbb{Z}\times K$ розв'язком цього рівняння. Це підтверджується розглянутим у [4] прикладом лінійного різницевого рівняння

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

з майже періодичним коефіцієнтом

$$a_n = \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\left(\sin^2 \frac{n+1}{2(2k+1)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sin^2 \frac{n}{2(2k+1)}\right)\right\}.$$

У [4] показано, що нульовий розв'язок рівняння (9) є відокремленим на кожній множині $\mathbb{Z} \times [-\mu, \mu]$, $\mu > 0$, і не є сильно відокремленим на жодній із цих множин.

Застосування функціонала δ до дослідження майже періодичних різницевого рівняння (4) та аналогічного лінійного різницевого рівняння з дискретним аргументом наведемо в наступних пунктах.

Аналогічні функціонали використовувалися автором у статтях [5]–[8] та [4] для дослідження нелінійних майже періодичних рівнянь

$$f(t, x(t)) = 0, \ t \in \mathbb{R},$$
$$x(t+1) = f(t, x(t)), \ t \in \mathbb{R},$$
$$F(t, x(t), x(t-\Delta_1), \ldots, x(t-\Delta_m)) = 0, \ t \in \mathbb{R},$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \ t \in \mathbb{R},$$

і

$$x_{n+1} = f_n(x_n), \ n \in \mathbb{Z},$$

де $f : \mathbb{R} \times \Omega \to E$, $F : \mathbb{R} \times \Omega^{m+1} \to E$ і $f_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, – неперервні відображення (тут Ω – довільна область простору E) і $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ – довільні дійсні числа.

3. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (4), що на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [3], [9]) не використовують $\mathcal{H}$-клас рівняння (4) та відокремленість обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Нехай Λ – обмежена підмножина простору E. Визначимо діаметр $\operatorname{diam}\Lambda$ множини Λ рівністю

$$\operatorname{diam}\Lambda = \sup\{\|x-y\|_E : x, y \in \Lambda\}.$$

Теорема 1. *Нехай* $K \in \mathcal{K}$. *Якщо для розв'язку* $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ *рівняння* (4) $\operatorname{diam} R(\mathbf{z}) \neq 0$ *і виконується співвідношення*

$$\delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) > 0 \tag{10}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$, *то цей розв'язок є майже періодичним.*

Зауваження 1. Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4), для якого $\operatorname{diam} R(\mathbf{z}) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

Доведення теореми 1. Припустимо, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) не є елементом простору $\mathfrak{B}$. Тоді існує така послідовність $\left(S_{m_p}\mathbf{z}\right)_{p\geqslant 1}$, що кожна підпослідовність $\left(S_{k_p}\mathbf{z}\right)_{p\geqslant 1}$ буде розбіжною. Отже,

$$\left\|S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{q_r}}\mathbf{z}\right\|_{\mathfrak{M}} \geqslant \gamma, \quad r \geqslant 1, \tag{11}$$

для деяких числа $\gamma \in (0, \operatorname{diam} R(\mathbf{z}))$ і послідоностей $(p_r)_{r\geqslant 1}$, $(q_r)_{r\geqslant 1}$ натуральних чисел.

Зазначимо, що

$$\operatorname{diam} R(\mathbf{z}) \leqslant r(\mathbf{z}, K).$$

Не обмежуючи загальності можна вважати, що послідовність $\left(S_{k_p}\mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots, x_m)\right)_{p\geqslant 1}$ збігається рівномірно на K^{m+1}. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{x_0, x_1, \ldots, x_m \in K} \left\|S_{k_p}\mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots, x_m) - \right.$$
$$\left. - S_{k_q}\mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots, x_m)\right\|_{\mathfrak{M}} = 0. \tag{12}$$

Розглянемо елементи

$$\mathbf{y}_r = S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{q_r}}\mathbf{z}, \quad r \geqslant 1,$$

простору $\mathfrak{M}$. Очевидно, що

$$\mathbf{y_r} \in \Omega(S_{k_{q_r}}\mathbf{z}, K, \gamma), \quad r \geqslant 1. \tag{13}$$

Покажемо, що

$$\delta(z, K, \gamma) = 0. \tag{14}$$

Завдяки (8), (13) та того, що

$$F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \ldots, z_{n+k_{p_r}+k_m}) \equiv 0$$

для кожного $r \geqslant 1$, виконуються співвідношення

$$\delta(\mathbf{z}, K, \gamma) =$$
$$= \inf_{\mathbf{y}\in\Omega(\mathbf{z},K,\gamma)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_n(z_n + y_n,$$
$$z_{n+k_1} + y_{n+k_1}, \ldots, z_{n+k_m} + y_{n+k_m})\|_E =$$
$$= \inf_{\mathbf{y}\in\Omega(S_{k_{q_r}}\mathbf{z},K,\gamma)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{q_r}} + y_n,$$
$$z_{n+k_{q_r}+k_1} + y_{n+k_1}, \ldots, z_{n+k_{q_r}+k_m} + y_{n+k_m})\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{q_r}} + (z_{n+k_{p_r}} - z_{n+k_{q_r}}),$$
$$z_{n+k_{q_r}+k_1} + (z_{n+k_{p_r}+k_1} - z_{n+k_{q_r}+k_1}), \ldots,$$
$$z_{n+k_{q_r}+k_m} + (z_{n+k_{p_r}+k_m} - z_{n+k_{q_r}+k_m}))\|_E =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \ldots,$$
$$z_{n+k_{p_r}+k_m})\|_E \leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}},$$
$$z_{n+k_{p_r}+k_1}, \ldots, z_{n+k_{p_r}+k_m})\|_E +$$
$$+ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \ldots,$$
$$z_{n+k_{p_r}+k_m}) - F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \ldots,$$
$$z_{n+k_{p_r}+k_m})\|_E =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \ldots,$$
$$z_{n+k_{p_r}+k_m}) - F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \ldots,$$
$$z_{n+k_{p_r}+k_m})\|_E,$$

з яких на підставі (12) випливає співвідношення (14), що суперечить (10).

Таким чином, припущення, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що виконання в теоремі 1 співвідношення (10) означає, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) є сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z}\times K$. Тому формулювання цієї теореми можна подати в наступному вигляді.

Теорема 2. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) сильно відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$, то цей розв'язок є майже періодичним.*

Зауваження 2. Якщо розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (4) не є сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z}\times K$, то цей розв'язок може бути майже періодичним, так і не бути майже періодичним (див. відповідні приклади в [4]).

4. Випадок лінійного рівняння (4). Розглянемо майже періодичні послідовності $(A_{k,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $k = \overline{0,m}$, лінійних неперервних операторів, що діють у просторі E, майже періодичний елемент $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, довільні цілі числа $k_1, \ldots, k_m$ та відповідне лінійне різницеве рівняння

$$A_{0,n}x_n + \sum_{l=1}^{m} A_{k,n}x_{n+k_l} = h_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (15)$$

Оскільки це рівняння – окремий випадок рівняння (4), то на підставі теореми 2 справджується наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Сильно відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язок $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ рівняння (15), для якого $\overline{R(\mathbf{z})} \neq K$, є майже періодичним.*

Зазначимо, що в рівнянні (15) оператори $A_{k,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{0,m}$, можуть не мати обернених неперервних операторів. Прикладом такого рівняння є наступне різницеве рівняння

$$\sum_{l=1}^{m} P_l A_l x_{n+k_l} = h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad (16)$$

де A_k, $k = \overline{1,m}$ – лінійні неперервні оператори, що мають неперервні обернені оператори, і P_k, $k = \overline{1,m}$ – лінійні неперервні оператори, для яких

$$P_kP_l = P_lP_k = \delta_{kl}P_k, \quad k = \overline{1,m}, \ l = \overline{1,m},$$

(δ_{kl} – символ Кронекера),

$$\sum_{k=1}^{m} P_k = I$$

і

$$P_kA_l = A_lP_k, \quad k = \overline{1,m}, \ l = \overline{1,m}.$$

Легко перевірити, що розв'язок рівняння (16) подається у вигляді

$$x_n = \sum_{l=1}^{m} A_l^{-1} P_l h_{n-k_l}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На завершення зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків рівнянь (4) і (15) є новими, оскільки на відміну від відомих теорем Амеріо [9] і Фавара [10] про майже періодичні розв'язки диференціальних рівнянь в теоремах 1, 2 і 3 не використовуються $\mathcal{H}$-класи рівнянь (4) і (15) та умова відокремлення обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класів цих рівнянь і банаховий простір E може бути нескінченновимірним.

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь (вимога існування таких розв'язків у теоремах 1 і 2 є суттєвою) отримано в [11]–[15].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 3. – С. 416–425.
5. *Слюсарчук В.Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь// Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, № 1–2. – С. 136–138.
6. *Слюсарчук В.Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 1. – С. 118–124.
7. *Слюсарчук В.Ю.* Дослідження майже періодичних різницевих рівнянь з неперервним аргументом, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь// Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, № 3–4. – С. 139–145.
8. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Український математичний журнал. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307–312.
9. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.
10. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31–81.
11. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Науковий вісник Чернівецького університету, Математика. – 2009. – Випуск 454. – С. 88–94.
12. *Слюсарчук В.Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 368–378.
13. *Слюсарчук В.Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 536–555.
14. *Слюсарчук В.Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 122–126.
15. *Слюсарчук В.Ю.* Нелінійні різницеві рівняння у просторах обмежених двосторонніх послідовностей // Нелінійні коливання – 2012. – **15**, № 4. – С. 528–538.