УДК 517.55

©2014 р. В.М. Тимощук

Луцький національний технічний університет

ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ БІГАРМОНІЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ В КРУЗІ

Розглянуто клас функцій, бігармонічних у крузі. Для них отримано загальну обернену теорему наближення, знайдені оцінки модуля гладкості похідних порядку граничного значення. Дослідження ведеться в термінах L_p-модулів гладкості.

We consider a class of biharmonic functions in the unit disc. We obtain a general inverse theorem on the approximation for these functions and find estimates of modulus of smoothness for the order of the boundary value. The investigation is provided in L_p–terms of modulus of smoothness.

1. В статті [1] були отримані оберенені теореми наближення бігармонічними функціями в крузі і півплощині. В цих теоремах за заданою швидкістю відхилення бігармонічних функцій від своїх граничних значень встановлюється неперервність граничних значень (відносно відповідної метрики) і оцінюється модуль неперервності другого порядку (модуль гладкості) цього граничного значення. В даній роботі згадані обернені теореми доповнюються вказанням таких властивостей наближення, які забезпечують існування похідних певного порядку граничної функції, і оцінюється модуль гладкості похідної найвищого можливого порядку. Розглядаються класи функцій, бігармонічних у крузі.

Нехай задано бігармонічне рівняння

$$\Delta^2 u = 0. \tag{1}$$

Позначимо через $u_f(\varphi, r) = u(\varphi, r)$ розв'язок рівняння (1) в одиничному крузі, який задовольняє крайові умови

$$u(\varphi, r)\big|_{r=1} = f(\varphi), \quad \partial u(\varphi, r)/\partial r\big|_{r=1} = 0. \tag{2}$$

Розв'язок крайової задачі (1)–(2) можна записати у вигляді

$$u_f(\varphi, r) = \\ = \frac{(1-r^2)^2}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+t) \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} dt. \tag{3}$$

Клас всіх таких функцій позначимо через B_φ.

2. Позначимо через $L_p[-\pi, \pi]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ клас 2π–періодичних функцій $f(\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ зі скінченною нормою, що визначається співвідношеннями

$$\|f\| = \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi)|^p d\varphi\Big)^{\frac{1}{p}},$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi} |f(\varphi)|.$$

Будемо користуватись означенням і властивостями інтегрального модуля гладкості [2, с. 115].

Теорема. *Якщо $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$, $u_f(\varphi, r) \in B_\varphi$ і при деякому фіксованому цілому невід'ємному k виконується нерівність*

$$\|u_f(\cdot, r) - f(\cdot)\| \leqslant \\ \leqslant A(1-r)^k \omega(1-r),\ A = const > 0,\ \ 0 \leqslant r < 1, \tag{4}$$

де $\omega(t)$, $t > 0$, — функція типу модуля неперервності другого порядку, яка задовольняє при $k \geqslant 1$ умову Діні

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty, \tag{5}$$

то $f(\varphi)$ майже для всіх $\varphi \in [-\pi, \pi]$ збігається з функцією, яка має абсолютно неперервну похідну $f^{(k-1)}(\varphi)$ і похідну

$f^{(k)}(\varphi) \in L_p[-\pi, \pi]$ *(при* $p = \infty$ *неперервну), і для* $f^{(k)}(\varphi)$ *інтегральний модуль гладкості задовольняє співвідношення*

$$\omega_2(f^{(k)}; 1-r) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} A_1(1-r)^2 \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\omega(u)}{u^3} du, & k = 0, \\ A_2 \Big[\int\limits_{0}^{1-r} \frac{\omega(u)}{u} du + (1-r)^2 \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\omega(u)}{u^3} du \Big], & k \geqslant 1, \end{cases} \tag{6}$$

$1/2 \leqslant r < 1$, *де* A_1, A_2 *—додатні сталі, що не залежать від* r.

Зауваження. *У випадку* $k = 0$ *теорема отримана в [1].*

При доведенні теореми будуть використані деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо* $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$, *і* $u_f(\varphi, r) \in B_\varphi$, *то для фіксованих натуральних* k *виконується нерівність*

$$\Big\| \frac{\partial^k u_f(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \Big\| \leqslant M \frac{\|f\|}{(1-r)^k}, \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{7}$$

де $M > 0$ *— стала, що не залежить від* r.

Зауваження. *У випадку* $k = 2$ *лема була встановлена в [1].*

Доведення леми 1. Використовуючи зображення (3) розв'язку $u_f(\varphi, r)$ крайової задачі (1), (2) і узагальнену нерівність Міньковського [2, с. 601], приходимо до нерівності

$$\Big\| \frac{\partial^k u_f(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \Big(\frac{(1-r^2)^2(1-r\cos t)}{(1-2r\cos t + r^2)^2} \Big) \Big| dt. \tag{8}$$

Оцінимо інтеграл в правій частині нерівності (8). Для цього бігармонічне ядро Пуассона подамо у вигляді

$$\frac{(1-r^2)^2(1-r\cos t)}{(1-2r\cos t + r^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\frac{(1-r^2)^2}{1-2r\cos t + r^2} + \frac{(1-r^2)^3}{(1-2r\cos t + r^2)^2} \Big] \tag{9}$$

і введемо позначення

$$P_1 := \frac{(1-r^2)^2}{1-2r\cos t + r^2},$$

$$P_2 := \frac{(1-r^2)^3}{(1-2r\cos t + r^2)^2}. \tag{10}$$

Тоді, враховуючи, що $P_1 = (1-r^2) \times \times [-1 + 1/(1-re^{it}) + 1/(1-re^{-it})]$, диференціюванням по t отримуємо формулу для похідної порядку k $(k = 1, 2, ...)$:

$$\frac{\partial^k P_1}{\partial t^k} = (1-r^2) \cdot r \cdot (i)^k \times$$

$$\times \Big[\frac{e^{it} Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}} + \frac{e^{-it} Q^{(2)}_{k-1}(r, e^{-it})}{(1-re^{-it})^{k+1}} \Big], \tag{11}$$

де $Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})$, $Q^{(2)}_{k-1}(r, e^{-it})$ — многочлени степеня $k-1$ по кожному із вказаних аргументів. Ці многочлени обмежені в замкнутому крузі $0 \leqslant r \leqslant 1$ константою, що залежить лише від степені многочлена. Обчислимо модулі двох доданків в рівності (11). Маємо

$$\Big| \frac{e^{it} Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}} \Big|^2 =$$

$$= \frac{Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}} \frac{\overline{Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})}}{(1-re^{-it})^{k+1}} =$$

$$= \frac{|Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})|^2}{(1-2r\cos t + r^2)^{k+1}},$$

звідки

$$\Big| \frac{e^{it} Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}} \Big| =$$

$$= \frac{|Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})|}{(1-2r\cos t + r^2)^{(k+1)/2}}. \tag{12}$$

Аналогічно встановлюється рівність

$$\Big| \frac{e^{-it} Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{-it})}{(1-re^{-it})^{k+1}} \Big| =$$

$$= \frac{|Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{-it})|}{(1-2r\cos t + r^2)^{(k+1)/2}}. \tag{13}$$

Із (11)–(13) отримуємо оцінку

$$\Big| \frac{\partial^k P_1}{\partial t^k} \Big| \leqslant \frac{(1-r^2) M_1}{(1-2r\cos t + r^2)^{(k+1)/2}},$$

де $M_1 > 0$ — стала, що залежить лише від k. Використовуючи цю оцінку, відому тотожність

$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2r\cos t+r^2)^{(k+1)/2}}=1$$

і справедливу для довільних $t\in[-\pi,\pi]$ нерівність

$$1-2r\cos t+r^2\geqslant(1-r)^2,$$

знаходимо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{\partial^k P_1}{\partial t^k}\Big|dt\leqslant M_1\frac{1-r^2}{2\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2r\cos t+r^2)(1-2r\cos t+r^2)^{(k-1)/2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_1}{(1-r)^{k-1}}. \qquad (14)$$

Оскільки

$$P_2:=\frac{(1-r^2)^3}{(1-re^{it})^2(1-re^{-it})^2}=$$

$$=(1-r^2)\Big[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\Big]^2=$$

$$=\frac{1-r^2}{(1-re^{it})^2}+\frac{1-r^2}{(1-re^{-it})^2}+$$

$$+(1-r^2)\Big[1-\frac{2}{1-re^{it}}-\frac{2}{1-re^{-it}}\Big]+$$

$$+2\Big[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\Big], \qquad (15)$$

то достатньо розглянути модулі похідних порядку $k\in\mathbb{N}$ кожного із доданків в правій частині (15). Введемо позначення

$$P_2^{(1)}:=\frac{1-r^2}{(1-re^{it})^2},\quad P_2^{(2)}:=\frac{1-r^2}{(1-re^{-it})^2},$$

$$P_2^{(3)}:=(1-r^2)\Big[1-\frac{2}{1-re^{it}}-\frac{2}{1-re^{-it}}\Big],$$

$$P_2^{(4)}:=2\Big[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\Big].$$

Аналогічно до оцінки (14) отримуємо наступні нерівності:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{\partial^k P_2^{(3)}}{\partial t^k}\Big|dt\leqslant\frac{M_2}{(1-r)^{k-1}}, \qquad (16)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{\partial^k P_2^{(4)}}{\partial t^k}\Big|dt\leqslant\frac{M_3}{(1-r)^{k}}, \qquad (17)$$

де M_2, M_3 — додатні сталі, що не залежать від r.

Для $P_2^{(1)}$, $P_2^{(2)}$ аналогічно до доведення рівності (12) отримуємо рівності

$$\Big|\frac{\partial^k P_2^{(1)}}{\partial t^k}\Big|=\frac{(1-r^2)|R_2^{(1)}(r,e^{it})|}{(1-2r\cos t+r^2)^{\frac{k}{2}+1}}, \qquad (18)$$

$$\Big|\frac{\partial^k P_2^{(2)}}{\partial t^k}\Big|=\frac{(1-r^2)|R_2^{(2)}(r,e^{-it})|}{(1-2r\cos t+r^2)^{\frac{k}{2}+1}}, \qquad (19)$$

де $R_2^{(1)}(r,e^{it})$, $R_2^{(2)}(r,e^{-it})$ — многочлени вказаних аргументів, обмежені в замкненому крузі $0\leqslant r\leqslant 1$ константою, що залежить лише від k. Ці рівності дозволяють отримати оцінки

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{\partial^k P_2^{(1)}}{\partial t^k}\Big|dt\leqslant\frac{M_4}{(1-r)^{k}}, \qquad (20)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{\partial^k P_2^{(2)}}{\partial t^k}\Big|dt\leqslant\frac{M_5}{(1-r)^{k}}, \qquad (21)$$

де M_4, M_5 — додатні сталі, що не залежать від r.

Використовуючи тепер оцінку (8), рівності (9) і (15), а також оцінки (14), (16), (17), (20), (21) інтегралів від окремих доданків, отримуємо оцінку (7). Лему 1 доведено.

Для фіксованого r_1, $0<r_1<1$, позначимо через $u_{u_f(\cdot,r_1)}(\varphi,r)$ розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайові умови

$$u(\varphi,r)\big|_{r=1}=u_f(\varphi,r_1),$$

$$\partial u(\varphi,r)/\partial r\big|_{r=1}=0.$$

Аналогічно вводимо позначення $u_{u_f(\cdot,r_2)}(\varphi,r)$, $0<r_2<1$.

Лема 2. *Якщо* $f \in L_p[-\pi,\pi]$, $p \geqslant 1$, $u_f(\varphi, r) \in B_\varphi$, *то для довільних* r_1, r_2, $(0 < r_1, r_2 < 1)$ *справедлива рівність*

$$u_{u_f(\cdot,r_1)}(\varphi, r_2) = u_{u_f(\cdot,r_2)}(\varphi, r_1), \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi. \tag{22}$$

Доведення леми 2. Виходячи з (3) і використовуючи теорему Фубіні, знаходимо

$$u_{u_f(\cdot,r_1)}(\varphi, r_2) = \frac{(1-r_1^2)^2(1-r_2^2)^2}{4\pi^2} \times \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{[1-r_1\cos(\tau-t)]}{(1-2r_1\cos(\tau-t)+r_1^2)^2}\times$$

$$\times \frac{[1-r_2\cos(t-\varphi)]}{(1-2r_2\cos(t-\varphi)+r_2^2)^2}dtd\tau, \tag{23}$$

$$u_{u_f(\cdot,r_2)}(\varphi, r_1) = \frac{(1-r_1^2)^2(1-r_2^2)^2}{4\pi^2} \times \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{[1-r_2\cos(\tau-t)]}{(1-2r_2\cos(\tau-t)+r_2^2)^2}\times$$

$$\times \frac{[1-r_1\cos(t-\varphi)]}{(1-2r_1\cos(t-\varphi)+r_1^2)^2}dtd\tau. \tag{24}$$

Розглянемо різницю внутрішніх інтегралів (по t) в правих частинах рівностей (23) і (24). Враховуючи 2π–періодичність підінтегральної функції, після заміни $t = u + (\tau+\varphi)/2$ (τ і φ для цього інтеграла являються параметрами) і позначення $\upsilon = (\tau-\varphi)/2$, отримаємо для вказаної різниці

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(u,\varphi,\tau)du, \tag{25}$$

де

$$\Phi(u,\varphi,\tau) := \frac{[1-r_1\cos(\upsilon-u)]}{(1-2r_1\cos(\upsilon-u)+r_1^2)^2}\times$$

$$\times \frac{[1-r_2\cos(\upsilon+u)]}{(1-2r_2\cos(\upsilon+u)+r_2^2)^2}-$$

$$-\frac{[1-r_2\cos(\upsilon-u)]}{(1-2r_2\cos(\upsilon-u)+r_2^2)^2}\times$$

$$\times \frac{[1-r_1\cos(\upsilon+u)]}{(1-2r_1\cos(\upsilon+u)+r_1^2)^2}.$$

Оскільки $\Phi(-u,\varphi,\tau) = -\Phi(u,\varphi,\tau)$, то інтеграл (25) рівний нулю. Лему 2 доведено.

Наслідок. *В умовах леми 1 справедлива тотожність*

$$u_{f-u_f(\cdot,r_1)}(\varphi, r_2) - u_{f-u_f(\cdot,r_2)}(\varphi, r_1) =$$

$$= u_f(\varphi, r_2) - u_f(\varphi, r_1). \tag{26}$$

Доведення теореми. Нехай $k \geqslant 1$. Доведемо, що майже для всіх $\varphi \in [-\pi,\pi]$ для функції $f(\varphi)$ має місце зображення

$$f(\varphi) = u_f(\varphi, 1/2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\Big[u_f\Big(\varphi, 1-\frac{1}{2^{j+1}}\Big)-u_f\Big(\varphi, 1-\frac{1}{2^j}\Big)\Big]. \tag{27}$$

Для цього розглянемо очевидну рівність

$$f(\varphi) = u_f(\varphi, 1/2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1}\Big[u_f\Big(\varphi, 1-\frac{1}{2^{j+1}}\Big)-u_f\Big(\varphi, 1-\frac{1}{2^j}\Big)\Big]+$$

$$+\Big[f(\varphi)-u_f\Big(\varphi, 1-\frac{1}{2^N}\Big)\Big] =$$

$$= S_N(f;\varphi) + \Big[f(\varphi)-u_f\Big(\varphi, 1-\frac{1}{2^N}\Big)\Big], \tag{28}$$

де $S_N(f;\varphi)$ — частинна сума ряду (27). Із (28) і умови (4) отримуємо

$$\|f(\cdot)-S_N(f;\cdot)\| = \|f(\cdot)-u_f\Big(\cdot, 1-\frac{1}{2^N}\Big)\| \leqslant$$

$$\leqslant A\Big(\frac{1}{2^N}\Big)^k\omega\Big(\frac{1}{2^N}\Big) \to 0 \ (N\to\infty).$$

Це означає, що послідовність $S_N(f;\varphi)$ збігається в середньому з показником $p \geqslant 1$ до функції $f(\varphi)$, $\varphi \in [-\pi,\pi]$. Тоді існує підпослідовність $S_{N_m}(f;\varphi)$, що збігається до $f(\varphi)$ майже скрізь на $[-\pi,\pi]$. Цим обгрунтовано рівність (27).

Розглянемо ряд

$$u_f^{(k)}(\varphi, 1/2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\Big[u_f^{(k)}\Big(\varphi, 1-\frac{1}{2^{j+1}}\Big)-u_f^{(k)}\Big(\varphi, 1-\frac{1}{2^j}\Big)\Big], \tag{29}$$

який складений із похідних порядку $k(k \geqslant 1)$ членів ряду (27), і дослідимо його збіжність на $[-\pi,\pi]$. Користуючись рівністю (26), лемою 1 і умовою (4), отримуємо

$$\left\|u_f^{(k)}\Big(\cdot,1-\frac{1}{2^{j+1}}\Big)-u_f^{(k)}\Big(\cdot,1-\frac{1}{2^{j}}\Big)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|u^{(k)}_{f-u_f(\cdot,1-1/2^j)}\Big(\cdot,1-\frac{1}{2^{j+1}}\Big)\right\|+$$

$$+\left\|u^{(k)}_{f-u_f(\cdot,1-1/2^{j+1})}\Big(\cdot,1-\frac{1}{2^{j}}\Big)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant M\Big(\frac{\|f-u_f(\cdot,1-1/2^j)\|}{(1/2^{j+1})^k}+$$

$$+\frac{\|f-u_f(\cdot,1-1/2^{j+1})\|}{(1/2^j)^k}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant MA\Big(\frac{(1/2^j)^k\omega(1/2^j)}{(1/2^{j+1})^k}+\frac{(1/2^{j+1})^k\omega(1/2^{j+1})}{(1/2^j)^k} \leqslant$$

$$\leqslant M(k)\omega(1/2^j), \tag{30}$$

де $M(k)>0$ — стала, що залежить від k і не залежить від j. Оскільки при всіх $j=1,2,...$ вірна оцінка

$$\int\limits_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}}\frac{\omega(u)}{u}du \geqslant \frac{1}{2}\omega\Big(\frac{1}{2^j}\Big),$$

то з (30) знаходимо

$$\left\|u_f^{(k)}\Big(\cdot,1-\frac{1}{2^{j+1}}\Big)-u_f^{(k)}\Big(\cdot,1-\frac{1}{2^{j}}\Big)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2M(k)\int\limits_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}}\frac{\omega(u)}{u}du. \tag{31}$$

Крім того, згідно з умовою (5) маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}}\frac{\omega(u)}{u}du=\int\limits_0^1\frac{\omega(u)}{u}du<\infty. \tag{32}$$

Із (31) і (32) випливає, що ряд (29) збігається на $[-\pi,\pi]$ в середньому з показником $p \geqslant 1$. Проводячи далі міркування, які майже повністю збігаються з доведенням теореми 6.1.3 А.П. Тімана [2, с. 347], робимо висновок, що функція $f(\varphi)$ майже скрізь дорівнює функції, яка має абсолютно неперервну похідну $f^{(k-1)}(\varphi)$ на $[-\pi,\pi]$ і похідну $f^{(k)}\in L_p[-\pi,\pi]$, яка є майже для всіх $\varphi\in[-\pi,\pi]$ сумою ряда (29):

$$f^{(k)}(\varphi)=u_f^{(k)}(\varphi,1/2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\Big[u_f^{(k)}\Big(\varphi,1-\frac{1}{2^{j+1}}\Big)-u_f^{(k)}\Big(\varphi,1-\frac{1}{2^{j}}\Big)\Big]. \tag{33}$$

Оцінимо інтегральний модуль гладкості функції $f^{(k)}(\varphi)$. Для цього використаємо вірну майже для всіх $\varphi\in[-\pi,\pi]$ рівність

$$f^{(k)}(\varphi)=u_f^{(k)}(\varphi,1/2^j)+$$

$$+\sum_{m=j+1}^{\infty}\Big[u_f^{(k)}\Big(\varphi,1-\frac{1}{2^{m}}\Big)-u_f^{(k)}\Big(\varphi,1-\frac{1}{2^{m-1}}\Big)\Big],$$

доведення якої проводиться аналогічно доведенню рівності (33). Використовуючи оцінку (31), отримуємо

$$\|f^{(k)}(\cdot)-u_f^{(k)}(\cdot,1-1/2^j)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=j+1}^{\infty}\left\|u_f^{(k)}\Big(\varphi,1-\frac{1}{2^{m}}\Big)-u_f^{(k)}\Big(\varphi,1-\frac{1}{2^{m-1}}\Big)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2M(k)\sum_{m=j+1}^{\infty}\int\limits_{2^{-(m-1)}}^{2^{-(m-2)}}\frac{\omega(u)}{u}du=$$

$$=2M(k)\int\limits_0^{2^{-(j-1)}}\frac{\omega(u)}{u}du \leqslant$$

$$\leqslant 8M(k)\int\limits_0^{2^{-j}}\frac{\omega(u)}{u}du. \tag{34}$$

В [3, с. 236] було показано, що функція $\Omega(t):=\int\limits_0^t\frac{\omega(u)}{u}du$ має характеристичні властивості модуля непервності другого порядку. В такому випадку нерівність (34) дозволяє вважати, що задано відхилення $f^{(k)}(\varphi)$ від оператора $u_f^{(k)}(\cdot,1/2^j)$ в L_p–метриці $(p\geqslant 1)$, а тому на основі випадку

$k = 0$ (див. теорему 2 роботи [1]) робимо висновок про справедливість нерівності

$$\omega_2(f^{(k)}; 1-r) \leqslant C(1-r)^2 \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\Omega(u)}{u^3} du,$$

де $C > 0$ — деяка стала, що не залежить від $(1-r)$. Перетворення правої частини останньої нерівності (див. [3]) приводить до оцінки (6) для випадку $k \geqslant 1$. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Горбайчук В.И.* Обратные теоремы приближения бигармоническими функциями// Математическая физика. — 1976. — Вып. 19. — С. 73–78.
2. *Тиман А.Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.
3. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 508 с.