УДК 517.9

©2014 р. Т.В. Тищук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

УЗАГАЛЬНЕНІ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглядається крайова задача для гіперболічного рівняння першого порядку з нелінійною крайовою умовою, яка використовується в якості феноменологічної моделі генератора цифрових сигналів. Введено поняття узагальненого періодичного розв'язку крайової задачі у вигляді кусково-сталої періодичної хвилі і отримано явні формули для таких розв'язків. За допомогою теореми Шарковського досліджено питання про співіснування узагальнених періодичних розв'язків різних періодів.

We consider a boundary value problem for a first-order hyperbolic partial differential equation with a nonlinear boundary condition, which is used as a phenomenological model for digital signals generator. We introduce the concept of a generalized periodic solution of the boundary value problem as a piecewise constant periodic wave and obtain an explicit formula for such solutions. Using Sharkovsky's theorem, we study the problem of coexistence of generalized periodic solutions with different periods.

1. Вступ. При передачі будь-якої інформації використовуються сигнали двох типів: дискретні та аналогові. Особливої поширеності при обміні даними набув цифровий сигнал, який є спеціальним дискретним сигналом, що адаптований для широкого кола технічних пристроїв. Основна відмінність між аналоговим та цифровим сигналами полягає в структурі сигнального потоку [1]. Якщо аналоговий сигнал можна зобразити у вигляді неперервної хвилі зі змінними амплітудою та частотою, то графіком цифрового сигналу є кусково-стала функція.

У зв'язку з широким використанням цифрових сигналів набуває важливого значення задача побудови широкосмугових генераторів кусково-сталих (цифрових) сигналів, причому найпростіших як із інженерної точки зору, так і з точки зору можливості повного дослідження математичних моделей таких генераторів.

В якості математичної моделі подібних пристроїв можна розглядати крайову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу з нелінійною крайовою умовою, яка має спеціальний клас узагальнених розв'язків у вигляді кусково-сталих функцій.

Скориставшись тим, що існує широкий клас крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, що зводяться до різницевих рівнянь з неперервним часом, а кусково-сталі функції є природніми розв'язками останніх, початкова задача зводиться до дослідження різницевого рівняння.

Як відомо, різницеві рівняння першого порядку породжують одновимірні динамічні системи, теорія яких є одним з найбільш ефективних інструментів нелінійної динаміки у зв'язку з тим, що такі системи, з одного боку, допускають достатньо повний опис, а з іншого – відображають основні складні нелінійні ефекти [2]. В теорії одновимірних динамічних систем отримано цілу низку глибоких результатів, які знайшли своє застосування, зокрема, у теорії різницевих та диференціально-різницевих рівнянь і теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними [3].

Дослідженню крайових задач для лінійних

них рівнянь з частинними похідними та нелінійними крайовими умовами шляхом їх редукції до різницевих рівнянь з неперервним аргументом приділяється значна увага [2–5]. Одна з перших праць у цьому напрямку була виконана О. Віттом [6]. Особливих успіхів досягнуто при вивченні рівнянь гіперболічного типу, що пов'язано з використанням формули Д'Аламбера та методу характеристик для отримання загального розв'язку таких рівнянь.

Варто відмітити, що різницеві рівняння з неперервним аргументом, які отримані в результаті редукції крайових задач, демонструють подекуди дуже складну поведінку траєкторій, зокрема, автостохастичність [7]. Дослідниками було здійснено пошук тих класів крайових задач, для яких мають місце ті ж самі якісні і кількісні універсальні властивості біфуркацій розв'язків, що й для відповідних одновимірних динамічних систем [8], теорія для яких є детально розробленою. Необхідно також зазначити, що проведені дослідження мають неабияке практичне значення з огляду на те, що розглядувані крайові задачі є моделями конкретних фізичних процесів, зокрема, отримані теоретичні результати дають змогу ефективно дослідити електричні ланцюги з нелінійностями, наприклад, у випадку наявності у ланцюгу тунельного діоду [9, 10].

У даній статті досліджується феноменологічна модель генератора цифрових сигналів, у якості якої виступає крайова задача для гіперболічного рівняння першого порядку з нелінійною крайовою умовою.

Запропоновано поняття кусково-сталої функції періоду n та на його основі визначено узагальнений n-періодичний розв'язок розглядуваної крайової задачі. Такі розв'язки є узагальненими, оскільки задаються за допомогою кусково-сталої функції, яка не є диференційовною. Дослідження таких узагальнених n-періодичних розв'язків відбувається шляхом зведення розглядуваної крайової задачі до різницевого рівняння з неперервним часом. При цьому крайові умови та початкові дані забезпечують редукцію отриманого різницевого рівняння до деякого неперервного відображення інтервалу.

Відмітимо також, що застосований метод дає змогу отримати точний розв'язок певних класів крайових задач у вигляді періодичної кусково-сталої хвилі. На відміну від асимптотичної стійкості за Ляпуновим, при якій спектр розв'язків є вузьким, адже всі розв'язки з певного околу мають однакові асимптотичні властивості, побудовані розв'язки мають різні асимптотичні властивості навіть у випадку близькості початкових умов, тобто володіють властивістю хаотичності.

2. Постановка задачі. Розглянемо нелінійну крайову задачу, що складається з гіперболічного рівняння першого порядку:

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x;t)}{\partial x}, \tag{1}$$

де $x\in[0;1], t\in[0;+\infty), u:[0;1]\times[0;+\infty)\to\mathbb{R}^1$, крайової умови:

$$u(1;t) = f(u(0;t)), \tag{2}$$

де $t \in [0;+\infty)$, $f:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, та початкової умови:

$$u(x;0) = \varphi(x), \tag{3}$$

де $\varphi:[0;1] \to \mathbb{R}^1$, $x \in [0;1]$.

Така крайова задача (1)-(3) може розглядатися у якості феноменологічної моделі генератора кусково-сталих сигналів.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (1), використовуючи метод характеристик. Прямі $x+t = const$ є характеристиками рівняння (1), а тому загальний розв'язок рівняння (1) можна записати за допомогою формули типу Д'Аламбера:

$$u(x;t) = v(x+t), \tag{4}$$

де $v \in C^1([0;+\infty);\mathbb{R})$ – довільна функція.

Використовуючи (4), крайову задачу (1)-(3) зведемо до різницевого рівняння з неперервним аргументом вигляду:

$$v(\tau+1) = f(v(\tau)), \tag{5}$$

де $\tau \in [0;+\infty)$, та початковою умовою:

$$v(\tau) = \varphi(\tau), \tag{6}$$

де $\tau \in [0;1)$.

Загальний розв'язок задачі (5),(6) можна записати за допомогою формули:

$$v(\tau) = f^n(\varphi(\{\tau\})), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ ..., \tag{7}$$

де $\tau \in [n; n+1)$, $\{\tau\}$ – дробова частина числа τ. Тоді, використовуючи формулу (4) для розв'язку рівняння (1), звідси отримуємо загальний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u(x;t) = f^{[x+t]}(\varphi(\{x+t\})), \tag{8}$$

де $x \in [0;1]$, $t \in [0;+\infty)$, $[x+t]$ позначає цілу частину величини $x+t$.

Оскільки крайова задача (1)-(3) описує деяку модель генератора дискретних сигналів, то розглянемо в якості початкової функції $\varphi(x)$ в (3) сталу, тобто вважатимемо, що $\varphi(x) = c$ для всіх $x \in [0;1]$, $c \in \mathbb{R}$, і побудуємо періодичні розв'язки цієї крайової задачі.

Враховуючи сталість початкової функції у (3), маємо, що різницеве рівняння (5) із початковою умовою (6), отримане в результаті редукції крайової задачі (1)-(3), зводиться до різницевого рівняння з дискретним аргументом, задача Коші для якого має вигляд:

$$v(n+1) = f(v(n)), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{9}$$

$$v(0) = c. \tag{10}$$

Оскільки різницеве рівняння (5), (6) у випадку сталості початкової функції в якості розв'язків має лише кусково-сталі функції і ці розв'язки є (в певному сенсі) розв'язками крайової задачі (1), (2), то вважатимемо такі функції узагальненими періодичними розв'язками крайової задачі (1)-(3).

Означення 1. *Розглянемо множини вигляду $U_k = (a_k; b_k]$, де $a_k < b_k$ $a_k,\ b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} U_k = \mathbb{R}$. Функція $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається періодичною кусково-сталою, якщо виконуються такі умови:*

1) $\psi(x)$ є сталою на будь-якій множині U_k, $k \in \mathbb{Z}$, тобто $\psi(x) = c_k$ для всіх $x \in U_k$, де c_k – деяке дійсне число, $k \in \mathbb{Z}$;

2) множина $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \{c_k\}$ є скінченною і її потужність $card\ C = n \geqslant 2$;

3) для будь-якого $k \in \mathbb{Z}$ виконується умова $\psi(x)\ |_{U_k} = \psi(x)\ |_{U_{k+n}}$.

Число n називається періодом періодичної кусково-сталої функції $\psi(x)$.

Зауважимо, що у випадку, коли $n = 1$, функція $\psi(x)$ є сталою.

Оскільки крайова задача (1)-(3) редукується до початкової задачі (5), (6), яка у випадку сталості початкової функції має лише періодичні кусково-сталі розв'язки, то поширимо дане поняття на розв'язки рівняння (1).

Означення 2. *Розглянемо множини вигляду $P_k = \{(x;t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ k{-}1{-}x \leqslant t < k{-}x\}$, де $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} P_k = [0;1] \times [0;+\infty)$. Функція $u : [0;1] \times [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ називається періодичною кусково-сталою, якщо виконуються такі умови:*

1) $u(x;t)$ є сталою на будь-якій множині P_k, $k \in \mathbb{N}$, тобто $u(x;t) = d_k$ для всіх $x \in P_k$, де d_k – деяке дійсне число, $k \in \mathbb{N}$;

2) множина $D = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{d_k\}$ є скінченною і її потужність $card\ D = n \geqslant 2$;

3) для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується умова $u(x;t)\ |_{P_k} = u(x;t)\ |_{P_{k+n}}$.

Число n називається періодом періодичної кусково-сталої функції $u(x;t)$.

Зауважимо, що у випадку, коли $n = 1$, функція $u(x;t)$ є сталою.

Означення 3. *Розв'язок задачі (1)-(3) з властивостями 1)-3) із означення 2 називається узагальненим n-періодичним розв'язком задачі (1)-(3) або кусково-сталою хвилею періоду n.*

З'ясуємо тепер питання про вигляд n-періодичного кусково-сталого розв'язку крайової задачі (1)-(3) у випадку, коли початкова функція $\varphi(x)$ в (3) є сталою. Враховуючи властивість 3) з означення 2, якщо такий розв'язок існує, то значення цього розв'язку достатньо описати на n множинах з покриття множини $[0;1] \times [0;+\infty)$, на яких розв'язок набуває попарно різні сталі значення. В якості таких множин оберемо

P_1, P_2, ..., P_n. Тоді маємо

$$u(x;t) = \begin{cases} c, & (x;t) \in P_1, \\ f(c), & (x;t) \in P_2, \\ \dots & \\ f^{n-1}(c), & (x;t) \in P_n, \end{cases} \tag{11}$$

або коротко так:

$$u(x;t)\,|_{P_k} = f^{k-1}(c), \tag{12}$$

де $k = \overline{1,n}$, $f^0(c) = c$.

3. Основний результат. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $I = [0;1]$, $f \in C^0(I;I)$, початкова функція в (3) є сталою, тобто $\varphi(x) = c$ для всіх $x \in [0;1]$, $c \in I$. Якщо крайова задача (1)-(3) має узагальнений n-періодичний розв'язок, то вона також має узагальнений m-періодичний розв'язок такий, що $m \lhd n$, де символ "$\lhd$" визначає відношення порядку Шарковсъкого на множині натуральних чисел.*

Доведення теореми 1 суттєво спирається на теорему Шарковського, тому наведемо її формулювання.

Теорема Шарковського [11]. *Якщо неперервне відображення відрізка в себе має цикл періоду n, то воно має також і цикл періоду n' такого, що $n' \lhd n$, де*

$$\begin{gathered} 1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \ \dots \ \lhd 2^2 \cdot 7 \ \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd \\ \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \ \dots \ \lhd 2 \cdot 7 \ \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \ \dots \\ \dots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3, \end{gathered} \tag{13}$$

Більше того, для будь-якого n існує неперервне відображення, що має цикл періоду n і не має циклу періоду $\overline{n}$, якщо $n \lhd \overline{n}$.

Доведення теореми 1. Згідно теореми Шарковського періоди циклів неперервного відображення відрізка в себе задовольняють порядок (13), який називається порядком Шарковського. Відповідно до порядку (13) з наявності у неперервного відображення відрізку циклу порядку n випливає наявність циклу періоду m, де $m \lhd n$.

Оскільки різницеве рівняння з неперервним аргументом (5) у випадку початкової умови $\varphi(x) = c$ еквівалентне різницевому рівнянню (9) з початковою умовою (10), то циклу динамічної системи, яка визначена в (9),(10), відповідає періодичний кусково-сталий розв'язок різницевого рівняння (5) зі сталою початковою умовою (6).

Враховуючи, що різницеве рівняння з неперервним аргументом (5) та сталою початковою умовою (6) є результатом редукції крайової задачі (1), (2) з початковою умовою $\varphi(x) = c$, тобто періодичні кусково-сталі розв'язки різницевого рівняння (5) з початковою умовою (6) є в деякому сенсі розв'язками розглядуваної крайової задачі (1)-(3), отримаємо, що з існування циклу періоду m, де $m \lhd n$, для динамічної системи заданої (9),(10) слідує існування узагальненого m-періодичного розв'язку крайової задачі (1)-(3), де $m \lhd n$.

Теорему 1 доведено.

4. Приклад. Проілюструємо отриманий результат у випадку, коли функція $f(x)$ у рівності (2) має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{14}$$

Динамічна система, яку породжує відображення (14) $x \to f(x)$, $x \in [0;1]$, у випадку, коли $n = p$, де p – просте число, має $(2^p - 2)/p$ різних циклів періоду p.

Як відомо, відображення (14) має цикли всіх періодів. Отже, потужність множини циклів відображення $x \to f(x)$ є достатньою для того, аби обрати функцію (14) у якості функції з крайової умови (2).

Надалі розглядається задача (1)-(3), де у крайовій умові (2) функція f має вигляд (14), а початкова умова (3) задана рівністю $\varphi(x) = c$, де значення $c = 10/33$.

Провівши редукцію задачі (1)-(3), отримаємо різницеве рівняння вигляду (9) з дискретним аргументом та початковою умовою $v(0) = 10/33$. Число $10/33$ є точкою циклу періоду 5 відображення (14), що складається з точок $10/33$, $20/33$, $26/33$, $14/33$, $28/33$.

За допомогою формули (11) розв'язок розглядуваної крайової задачі (1)-(3) можна записати у вигляді:

$$u(x;t) = \begin{cases} 10/33, & (x;t) \in P_1, \\ 20/33, & (x;t) \in P_2, \\ 26/33, & (x;t) \in P_3, \\ 14/33, & (x;t) \in P_4, \\ 28/33, & (x;t) \in P_5. \end{cases} \qquad (15)$$

З теореми 1 випливає, що крайова задача (1)-(3) має також узагальнені періодичні розв'язки періодів, більших ніж 5 згідно порядку (13).

Враховуючи, що відображення (14) має цикли всіх періодів, отримаємо, що крайова задача (1)-(3) має узагальнені періодичні розв'язки будь-якого періоду.

5. Висновки. Досліджено феноменологічну модель широкосмугового генератора цифрових сигналів, що описується крайовою задачею для лінійного гіперболічного рівняння першого порядку з нелінійною крайовою умовою.

Введено поняття узагальненого періодичного розв'язку крайової задачі. Для випадку, коли початкова функція в (3) є сталою, отримано формулу для знаходження розв'язку крайової задачі у аналітичному вигляді. Досліджено питання про існування узагальнених періодичних розв'язків різних періодів.

Побудована таким чином феноменологічна модель має широкий спектр розв'язків, що відповідає інженерній задачі генерації великої кількості різних цифрових сигналів, та допускає детальне дослідження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Premier R.* Introductory Signal Processing. – World Scientific, 1991. – 734 p.

2. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. – К.: Наукова думка, 1989. – 216 с.

3. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наукова думка, 1986. – 278 с.

4. *Шарковський О.М.* Динамічні системи, породжувані крайовими задачами. Ідеальна турбулентність. Комп'ютерна турбулентність // Праці Українського математичного конгресу-2001, Київ, 21-23 серпня 2001. – К.: Інститут математики НАН України, 2001.

5. *Романенко О.Ю.* Основи якісної теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом: автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / О.Ю. Романенко: НАН України. Ін-т математики. – К., 2007. – 34 с.

6. *Витт А.А. К теории скрипичной струны* // Журн. тех. физики. – 1936. – 6, №9. – С. 1459 – 1479.

7. *Романенко О.Ю.* Явище автостохастичності в динамічних системах, породжуваних різницевими рівняннями з неперервним аргументом // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, №7. – С. 1079 – 1105.

8. *Sharkovsky A.N., Sivak A.G.* Universal phenomena in solution bifurcations of some boundary value problems // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – V. 1, №2. – P. 147–157.

9. *Нагумо Д., Шимура М.* Автоколебания в длинной линии с туннельным диодом // Труды ин-та инженеров по электронике и радиоэлектр. – 1961. – 49, №8. – С. 1494 – 1504.

10. *Sharkovsky A.N., Deregel Ph., Chua L.O.* Dry Turbulence and Period-Adding Phenomena from a 1-D Map with Time Delay // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – V. 5, №5. – P. 1283 – 1302.

11. *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1964. – 16, №8. – С. 61 – 71.