УДК 517.956.4

©2014 р. **Н.І. Турчина, С.Д. Івасишен**

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ГРІНА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

Розглядаються задачі Діріхле та Неймана в півпросторі для модельного рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу. Знайдено в явному вигляді та досліджено властивості вектор-функцій Гріна цих задач.

We consider Dirichlet and Neumann problems in a half-space for Fokker–Planck–Kolmogorov equation of a normal Markovian process. We obtain explicit forms for Green's vector functions for these problems and investigate their properties.

Вступ

У теорії випадкових процесів і статистичній радіотехніці [1–3] виникають параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі. Ці рівняння є рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова нормальних марковських процесів [3, с. 177–179]. Серед таких рівнянь, зокрема, є рівняння

$$(Lu)(t,x) := \partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{n} \left[a^2 \partial_{x_j}^2 u(t,x) + b\partial_{x_j}(x_j u(t,x))\right] = f(t,x),$$

$$t > 0, \quad x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в якому a і b – дійсні сталі, причому $a > 0$.

У статті [4] для деяких з указаних вище рівнянь (у тому числі для рівняння (1)) одержано явні формули для фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) Z, за допомогою яких досліджено його властивості.

ФРЗК для рівняння (1) визначається формулою

$$Z(t,x,\xi) := (4\pi a^2 q(t))^{-n/2} e^{nbt} E_{1/(4a^2)}(t,x,\xi),$$

$$t > 0, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де

$$q(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2b}(e^{2bt} - 1), & b \neq 0, \\ t, & b = 0; \end{cases}$$

$$E_c(t,x,\xi) := \exp\left\{-c(q(t))^{-1}\left|e^{bt}x - \xi\right|^2\right\}, \; c > 0, \tag{3}$$

і має такі властивості:

1) функція $Z(t-\tau, x-\xi)$, в якій τ, ξ – основні, а t, x – параметричні змінні, є ФРЗК для спряженого до (1) рівняння

$$(L^* v)(\tau,\xi) := \left[-\partial_\tau - \sum_{j=1}^{n}(a^2\partial_{\xi_j}^2 - b\xi_j\partial_{\xi_j})\right] \times v(\tau,\xi) = 0, \quad \tau < 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{4}$$

2) виконуються рівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x,\xi)d\xi = e^{nbt}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x,\xi)dx = 1, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{5}$$

3) для будь-яких мультиіндексів $\{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta Z(t,x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha\beta} \times (q(t))^{-(n+|\alpha|+|\beta|)/2} e^{(n+|\alpha|)bt} E_c(t,x,\xi),$$

$$t > 0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

в яких $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі, причому $c < 1/(4a^2)$;

4) є правильною формула згортки

$$Z(t,x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t-\gamma,x,y)Z(\gamma,y,\xi)dy,$$

$$0<\gamma<t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (7)$$

Ці результати для ФРЗК застосовуються до встановлення коректної розв'язності задачі Коші, інтегрального зображення та властивостей розв'язків рівняння (1).

Однією з центральних проблем теорії лінійних параболічних крайових задач є детальне описання оператора, оберненого до оператора крайової задачі, в тому числі всебічне дослідження ядра цього оператора – матриці Гріна. У працях [5, 6] наведено результати, що стосуються побудови, властивостей і застосувань матриць Гріна загальних параболічних крайових задач з обмеженими коефіцієнтами в обмежених і необмежених областях.

Для різноманітних застосувань важливо мати детальну інформацію про матриці Гріна крайових задач у необмежених областях зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. На теперішній час такої інформації в літературі є ще досить мало.

У нашій статті розглядаються дві крайові задачі для рівняння (1) зі зростаючими коефіцієнтами вигляду

$$(Lu)(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi^+, \qquad (8)$$

$$(B^{(l)}u)(t,x)\,|_{x_n=0} = g(t,x'), \ (t,x') \in \Pi', \ (9_1)$$

$$u(t,x)\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \qquad (10)$$

де $x := (x_1,...,x_n)$, $x' := (x_1,...,x_{n-1})$, $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, $\Pi^+ := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}\,| t \in (0,\infty),\ x \in \mathbb{R}^n_+\}$, $\Pi' := \{(t,x') \in \mathbb{R}^n\,| t \in (0,\infty),\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, $l \in \{1,2\}$, $B^{(1)} = 1$ (умова Діріхле) і $B^{(2)} = \partial_{x_n}$ (умова Неймана).

Вектор-функцією Гріна цієї задачі називається така вектор-функція $(G_0^{(l)}, G_1^{(l)}, G_2^{(l)})$, що для довільних нескінченно диференційовних і фінітних функцій f, g і φ розв'язок задачі (8), (9_1), (10) зображується у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0^{(l)}(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(l)}(t-\tau,x,\xi')g(\tau,\xi')d\xi' +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_2^{(l)}(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, (t,x) \in \Pi^+.$$

Функція $G_0^{(l)}$ називається однорідною функцією Гріна, функція $G_1^{(l)}$ – ядром Пуассона, а функція $G_2^{(l)}$ – функцією впливу початкового миттєвого точкового джерела задачі (8), (9_1), (10). При цьому ці функції є розв'язками в просторі узагальнених функцій таких крайових задач:

$$LG_0^{(l)} = \delta(t,x-\xi), B^{(l)}G_0^{(l)}\,|_{x_n=0} = 0,$$

$$G_0^{(l)} = 0 \text{ при } t<0;$$

$$LG_1^{(l)} = 0, B^{(l)}G_1^{(l)}\,|_{x_n=0} = \delta(t,x'),$$

$$G_1^{(l)} = 0 \text{ при } t<0;$$

$$LG_2^{(l)} = 0, B^{(l)}G_2^{(l)}\,|_{x_n=0} = 0,$$

$$G_2^{(l)}\,|_{t=0} = \delta(x-\xi),$$

де $\delta(t,x-\xi)$, $\delta(t,x')$ і $\delta(x-\xi)$ – дельта-функції, які зосереджені відповідно в точках $(0,\xi)$, $(0,0)$ і ξ.

Метою статті є знаходження явних формул для функцій $G_j^{(l)}$, $j \in \{0,1,2\}$, $l \in \{1,2\}$, та вивчення властивостей цих функцій. Оскільки в задачі (8), (9_1), (10) порядки крайових умов менші порядку рівняння, то легко переконатися (див. [5, с. 60-62]), що справджується рівність

$$G_2^{(l)}(t,x,\xi) = G_0^{(l)}(t,x,\xi),$$

$$t>0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n_+.$$

З огляду на це досить знайти й дослідити функції $G_0^{(l)}$ і $G_1^{(l)}$.

1. Ядра Пуассона

Для знаходження ядер Пуассона задач (8), (9_1), (10), $l \in \{1,2\}$, треба розглянути ці задачі у випадку, коли $f = 0$ і $\varphi = 0$, а g є довільною нескінченно диференційовною і фінітною функцією. Для розв'язування таких задач використовуватимемо потенціали подвійного і простого шарів.

Спочатку розглянемо задачу (8), (9_1), (10) у зазначеному вище випадку. Будемо шукати її розв'язок у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\xi_n} Z(t-\tau,x,\xi)\,|_{\xi_n=0} \times$$
$$\times \mu(\tau,\xi')d\xi', \quad (t,x) \in \Pi^+, \qquad (11)$$

де Z – ФРЗК для рівняння (8), а μ – невідома функція. Апріорі припускатимемо, що функція μ в області Π' обмежена та задовольняє умову Гельдера в такому сенсі:

$$\exists H > 0 \;\; \exists \alpha \in (0,1] \;\;\; \forall \{(t,x'),(\tau,\xi')\} \subset \Pi' :$$
$$|\mu(t,x') - \mu(\tau,\xi')| \leqslant$$
$$\leqslant H((q(t-\tau))^{\alpha/2} + \left|e^{b(t-\tau)}x' - \xi'\right|^{\alpha}). \quad (12)$$

Для такої функції μ з означення та властивостей ФРЗК Z випливає, що функція (11) є розв'язком задачі (8), (10) з $f = 0$ і $\varphi = 0$. Треба підібрати функцію μ так, щоб функція (11) задовольняла умову (9_1). Для цього, скориставшись рівністю (2), запишемо формулу (11) у вигляді

$$u(t,x) = S(t,x) + T(t,x)\mu(t,x'),$$
$$(t,x) \in \Pi^+, \qquad (13)$$

де

$$S(t,x) = 2(4a^2)^{-1-n/2}\pi^{-n/2}x_n \times$$
$$\times \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+1)b(t-\tau)}(q(t-\tau))^{-1-n/2} \times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x,(\xi',0)) \times$$
$$\times (\mu(\tau,\xi') - \mu(t,x'))d\xi',$$
$$T(t,x) = 2(4a^2)^{-1-n/2}\pi^{-n/2}x_n \times$$
$$\times \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+1)b(t-\tau)}(q(t-\tau))^{-1-n/2} \times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x,(\xi',0))d\xi'. \qquad (14)$$

Щоб знайти потрібну функцію μ, необхідно задовольнити функцією (13) крайову умову (9_1), а для цього треба знайти границі при $x_n \to 0$ виразів (14). Розглянемо спочатку вираз $T(t,x)$. Для функції

$$Z'_a(t,x',\xi') := (4\pi a^2 q(t))^{-(n-1)/2} e^{(n-1)bt} \times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t,x',\xi'),$$
$$t > 0, \quad \{x',\xi'\} \subset \mathbb{R}^{n-1}, \qquad (15)$$

яка згідно з (2) є ФРЗК для $(n-1)$-вимірного рівняння (1), скористаємося першою з рівностей (5), тобто

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z'_a(t,x',\xi')d\xi' = e^{(n-1)bt},$$
$$t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \qquad (16)$$

Тоді вираз для $T(t,x)$ набуває вигляду

$$T(t,x) = 2(4a^2)^{-3/2}\pi^{-1/2}x_n \int_0^t e^{(n+1)b(t-\tau)} \times$$
$$\times (q(t-\tau))^{-3/2}E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x_n,0)d\tau.$$

Після здійснення заміни змінної інтегрування τ за формулою

$$e^{b(t-\tau)}x_n\Big(2a\sqrt{q(t-\tau)}\Big)^{-1} = \gamma \qquad (17)$$

одержимо

$$T(t,x) = \frac{(2a)^n}{a^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\gamma^2}\gamma^n\big(4a^2\gamma^2 - 2bx_n^2\big)^{-n/2} \times$$
$$\times \chi_{[c(t,x_n),\infty)}(\gamma)d\gamma, \qquad (18)$$

де $c(t,x_n) := e^{bt}x_n\Big(2a\sqrt{q(t)}\Big)^{-1}$, а χ_A – характеристична функція множини A.

Оскільки для довільного $\gamma > 0$ підінтегральна функція у (18) при $x_n \to 0$ прямує до $(2a)^{-n}e^{-\gamma^2}$ і при $\gamma > c(t,x_n)$ і $x_n > 0$ вона мажорується інтегровною функцією

$(2a)^{-n}e^{nbt-\gamma^2}$, $\gamma > 0$, то на підставі теореми Лебега про мажорантну збіжність у (18) можна переходити до границі при $x_n \to 0$ під знаком інтеграла та одержати рівність

$$\lim_{x_n\to 0} T(t,x) = (2a^2)^{-1}, t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (19)$$

Тепер доведемо, що

$$\lim_{x_n\to 0} S(t,x) = 0, t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (20)$$

За допомогою умови (12) маємо

$$S(t,x) \leqslant 2(4a^2)^{-1-n/2}\pi^{-n/2}Hx_n\times$$
$$\times\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+1)b(t-\tau)}(q(t-\tau))^{-1-n/2}\times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x,(\xi',0))((q(t-\tau))^{\alpha/2}+$$
$$+\left|e^{b(t-\tau)}x'-\xi'\right|^{\alpha})d\xi'.$$

Використавши твердження

$$\forall r > 0 \ \ \exists C_0 > 0 \ \ \forall z > 0:$$
$$z^r e^{-cz^2} \leqslant C_0 e^{-c_0 z^2}, \quad (21)$$

де $0 < c_0 < c$, одержимо

$$\left|e^{b(t-\tau)}x'-\xi'\right|^{\alpha} E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x',\xi') \leqslant$$
$$\leqslant C_0(q(t-\tau))^{\alpha/2}E_{1/(8a^2)}(t-\tau,x',\xi')$$

і, отже,

$$|S(t,x)| \leqslant C_1 x_n\int_0^t e^{2b(t-\tau)}(q(t-\tau))^{(\alpha-3)/2}\times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x_n,0)d\tau\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z'_{\sqrt{2}a}(t-\tau,x',\xi')d\xi',$$

де функція $Z'_{\sqrt{2}a}$ означена рівністю (15), в якій a замінено на $\sqrt{2}a$. Для такої функції справджується рівність (16), тому маємо

$$|S(t,x)| \leqslant C_2 x_n\int_0^t e^{(n+1)b(t-\tau)}\times$$
$$\times(q(t-\tau))^{(\alpha-3)/2}E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x_n,0)d\tau.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну (17), у результаті прийдемо до нерівності

$$|S(t,x)| \leqslant C_2 x_n^{\alpha}\int_{c(t,x_n)}^{\infty} e^{-\gamma^2}\times$$
$$\times\gamma^n\left(4a^2\gamma^2-2bx_n^2\right)^{-(n+\alpha)/2}d\gamma. \quad (22)$$

Оцінивши підінтегральну функцію в (22) так само, як для інтеграла (18), одержимо оцінку

$$|S(t,x)| \leqslant C_3\int_0^{\infty} e^{-\gamma^2}\gamma^{-\alpha}d\gamma e^{(n+\alpha)bt}x_n^{\alpha},$$

з якої випливає рівність (20), бо останній інтеграл збігається.

На підставі (9_1), (13), (19) і (20) отримуємо, що

$$\lim_{x_n\to 0} u(t,x) = g(t,x') = (2a^2)^{-1}\mu(t,x'),$$
$$(t,x') \in \Pi',$$

звідки $\mu(t,x') = 2a^2 g(t,x'), (t,x') \in \Pi'$.

Якщо тепер знайдену функцію μ підставити в рівність (11) і скористатись виразом (2) для Z, то прийдемо до такої формули для розв'язку задачі (8), (9_1), (10) з $f = 0$ і $\varphi = 0$:

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(1)}(t-\tau,x-\xi')\times$$
$$\times g(\tau,\xi')d\xi', \quad (t,x) \in \Pi^+, \quad (23)$$

де

$$G_1^{(1)}(t,x,\xi') := (4\pi a^2)^{-n/2}(q(t))^{-1-n/2}\times$$
$$\times e^{(n+1)bt}x_n E_{1/(4a^2)}(t,x,(\xi',0)),$$
$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (24)$$

Для знаходження ядра Пуассона $G_1^{(2)}$ шукатимемо розв'язок задачі (8), (9_2), (10) з $f = 0$ і $\varphi = 0$ у вигляді потенціалу простого шару

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z(t-\tau,x,(\xi',0))\times$$

$$\times\mu(\tau,\xi')d\xi',\quad (t,x)\in\Pi^+, \tag{25}$$

де невідома функція μ припускається такою, як вище. Щоб знайти функцію μ розглянемо похідну $\partial_{x_n}u(t,x)$ і запишемо її у такому вигляді, аналогічному до (13):

$$\partial_{x_n}u(t,x) = -Q(t,x) + R(t,x)\mu(t,x'),$$
$$(t,x)\in\Pi^+,$$

де

$$Q(t,x) = 2(4a^2)^{-1-n/2}\pi^{-n/2}x_n\times$$
$$\times\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+2)b(t-\tau)}(q(t-\tau))^{-1-n/2}\times$$
$$E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x,(\xi',0))(\mu(\tau,\xi')-\mu(t,x'))d\xi',$$
$$R(t,x) = 2(4a^2)^{-1-n/2}\pi^{-n/2}x_n\times$$
$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{(n+2)b(t-\tau)}(q(t-\tau))^{-1-n/2}\times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x,(\xi',0))d\xi'.$$

Так само, як і для функцій S і T, доводяться твердження

$$\lim_{x_n\to 0} Q(t,x) = 0,$$
$$\lim_{x_n\to 0} R(t,x) = (2a^2)^{-1},$$

з яких на підставі умови (9_2) випливає, що

$$\lim_{x_n\to 0}\partial_{x_n}u(t,x) = g(t,x') = -(2a^2)^{-1}\mu(t,x').$$

Звідси маємо $\mu(t,x') = -2a^2 g(t,x'), (t,x')\in\Pi'$. Тому за допомогою (2) і (25) одержуємо для розв'язку задачі (8), (9_2), (10) з $f=0$ і $\varphi=0$ формулу, яка відрізняється від (23) заміною $G_1^{(1)}$ на $G_1^{(2)}$, де

$$G_1^{(2)}(t,x,\xi') := -2a^2(4\pi a^2 e^{2bt}q(t))^{-n/2}\times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t,x,(\xi',0)),$$
$$t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n_+,\quad \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{26}$$

Отже, ядра Пуассона задач (8), (9_1), (10), $l\in\{1,2\}$, визначаються формулами (24) і (26).

2. Однорідні функції Гріна

Згідно з результатами праць [5,6] однорідні функції Гріна $G_0^{(l)}, l\in\{1,2\}$, можна шукати у вигляді

$$G_0^{(l)}(t,x,\xi) = Z(t,x,\xi) - V^{(l)}(t,x,\xi),$$
$$t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+, \tag{27}$$

де Z – ФРЗК для рівняння (1), а

$$V^{(l)}(t,x,\xi) := \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(l)}(t-\tau,x,y')\times$$
$$\times B^{(l)}Z(\tau,(y',0),\xi)dy',$$
$$t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+. \tag{28}$$

Нехай спочатку $l=1$. Використовуючи формули (2), (15) і (24), маємо

$$V^{(1)}(t,x,\xi) = (4\pi a^2)^{-1}x_n\times$$
$$\times\int\limits_0^t (q(t-\tau))^{-3/2}(q(\tau))^{-1/2}e^{b(2t-\tau)}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} Z'_a(t-\tau,x',y')Z'_a(\tau,y',\xi')dy'\right)\times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x_n,0)E_{1/(4a^2)}(\tau,0,\xi_n)d\tau.$$

Згідно з формулою згортки (7) для ФРЗК Z'_a інтеграл по $\mathbb{R}^{n-1}$ дорівнює $Z'_a(t,x',\xi')$, тому за допомогою виразу (15) одержуємо

$$V^{(1)}(t,x,\xi) = (4\pi a^2 q(t))^{-(n-1)/2}e^{nbt}\times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(t,x',\xi')I^{(1)}(t,x_n,\xi_n), \tag{29}$$

де

$$I^{(1)}(t,x_n,\xi_n) := (4\pi a^2)^{-1}x_n\int\limits_0^t (q(t-\tau))^{-3/2}\times$$
$$\times(q(\tau))^{-1/2}e^{b(t-\tau)}E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x_n,0)\times$$
$$\times E_{1/(4a^2)}(\tau,0,\xi_n)d\tau.$$

В інтегралі зробимо заміну змінної інтегрування τ за формулою $q(\tau)=q(t)\beta$. У результаті маємо

$$I^{(1)}(t,x_n,\xi_n) := (4\pi a^2 q(t))^{-1}e^{bt}x_n\times$$

$$\times \int_0^1 (1-\beta)^{-3/2}\beta^{-1/2}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(e^{bt}x_n)^2}{4a^2q(t)(1-\beta)}-\frac{\xi_n^2}{4a^2q(t)\beta}\right\}d\beta.$$

Останній інтеграл обчислюється, якщо в ньому послідовно зробити такі дві заміни змінних інтегрування:

$$\beta=\delta^2(1+\delta^2)^{-1},\quad \delta=2ae^{-bt}x_n^{-1}(q(t))^{1/2}z.$$

Після реалізації цих замін одержимо

$$I^{(1)}(t,x_n,\xi_n)=(\pi a)^{-1}(q(t))^{-1/2}\times$$

$$\times E_{1/(4a^2)}(t,x_n,-\xi_n)\int_0^\infty \exp\left\{-(z-\frac{p}{z})^2\right\}dz,$$

де $p:=(4a^2q(t))^{-1}e^{bt}x_n\xi_n$. Звідси, врахувавши те, що останній інтеграл не залежить від $p\in\mathbb{R}$ і дорівнює $\sqrt{\pi}/2$, маємо рівність

$$I^{(1)}(t,x_n,\xi_n)=(4\pi a^2q(t))^{-1/2}\times$$

$$\times E_{1/(4a^2)}(t,x_n,-\xi_n),$$

тому внаслідок (29) отримуємо формулу

$$V^{(1)}(t,x,\xi)=(4\pi a^2q(t))^{-n/2}e^{nbt}\times$$

$$\times E_{1/(4a^2)}(t,x,(\xi',-\xi_n)),$$

$$t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+. \tag{30}$$

З рівностей (2), (27) і (30) випливає така остаточна формула:

$$G_0^{(1)}(t,x,\xi):=(4\pi a^2q(t))^{-n/2}e^{nbt}\times$$

$$\times(E_{1/(4a^2)}(t,x,\xi)-E_{1/(4a^2)}(t,x,(\xi',-\xi_n))),$$

$$t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+. \tag{31}$$

У випадку $l=2$

$$V^{(2)}(t,x,\xi):=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(2)}(t-\tau,x,y')\partial_{y_n}\times$$

$$\times Z(\tau,y,\xi)\,|_{y_n=0}\,dy'.$$

Оскільки

$$\partial_{y_n}Z(\tau,y,\xi)\,|_{y_n=0}=2(4a^2q(\tau))^{-1-n/2}\pi^{-n/2}\times$$

$$\times e^{(n+1)b\tau}\xi_nE_{1/(4a^2)}(\tau,(y',0),\xi),$$

то з урахуванням (7), (15) і (26) маємо

$$V^{(2)}(t,x,\xi)=-(4\pi a^2)^{-1}\xi_n\int_0^t (q(t-\tau))^{-1/2}\times$$

$$\times(q(\tau))^{-3/2}e^{b(t+\tau)}\times$$

$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z'_a(t-\tau,x',y')Z'_a(\tau,y',\xi')dy'\right)\times$$

$$\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x_n,0)E_{1/(4a^2)}(\tau,0,\xi_n)d\tau=$$

$$=(4\pi a^2q(t))^{-(n-1)/2}e^{nbt}E_{1/(4a^2)}(t,x',\xi')\times$$

$$\times I^{(2)}(t,x_n,\xi_n),$$

де

$$I^{(2)}(t,x_n,\xi_n):=-(4\pi a^2)^{-1}\xi_n\times$$

$$\times\int_0^t (q(t-\tau))^{-1/2}(q(\tau))^{-3/2}e^{b\tau}\times$$

$$\times E_{1/(4a^2)}(t-\tau,x_n,0)E_{1/(4a^2)}(\tau,0,\xi_n)d\tau.$$

Цей інтеграл обчислюється подібно до інтеграла $I^{(1)}$ і дорівнює

$$-(4\pi a^2q(t))^{-1/2}E_{1/(4a^2)}(t,x_n,-\xi_n).$$

Тому

$$V^{(2)}(t,x,\xi)=-(4\pi a^2q(t))^{-n/2}e^{nbt}\times$$

$$\times E_{1/(4a^2)}(t,x,(\xi',-\xi_n)),$$

$$t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+. \tag{32}$$

На підставі рівностей (2), (27) і (32) отримуємо формулу

$$G_0^{(2)}(t,x,\xi):=(4\pi a^2q(t))^{-n/2}e^{nbt}\times$$

$$\times\left(E_{1/(4a^2)}(t,x,\xi)+E_{1/(4a^2)}(t,x,(\xi',-\xi_n))\right),$$

$$t>0,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n_+. \tag{33}$$

3. Властивості ядер Пуассона та однорідних функцій Гріна

З явних виразів (24), (26), (31) і (33) для функцій $G_1^{(l)}$ і $G_0^{(l)}, l \in \{1,2\}$, випливають різноманітні властивості цих функцій. Вони не тільки добре узгоджуються з відповідними властивостями матриць Гріна загальних нормальних параболічних крайових задач з обмеженими коефіцієнтами (див. [5,6]), але й їх доповнюють. Наведемо деякі з них.

1) оцінки $G_1^{(l)}$. Для будь-яких мультиіндексів $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G_1^{(l)}(t,x,\xi')\right| \leqslant C_{\alpha\beta}\times$$

$$\times (q(t))^{-(n+2-l+|\alpha|+|\beta|)/2} e^{(n+|\alpha|)bt} E_c(t,x,(\xi',0)),$$

$$t>0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad (34)$$

де $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні числа, $l \in \{1,2\}$.

2)оцінки $G_0^{(l)}$. Для довільних мультиіндексів $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G_0^{(l)}(t,x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}\times$$

$$\times (q(t))^{-(n+|\alpha|+|\beta|)/2} e^{(n+|\alpha|)bt} E_c(t,x,\xi),$$

$$t>0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n, \qquad (35)$$

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta V^{(l)}(t,x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}(q(t))^{-(n+|\alpha|+|\beta|)/2}\times$$

$$\times e^{(n+|\alpha|)bt} \exp\left\{-c(q(t))^{-1}\left(\left|e^{bt}x-\xi\right|+\xi_n\right)^2\right\},$$

$$t>0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n, \qquad (36)$$

де $V^{(l)}$, $l \in \{1,2\}$, – функції, означені в (30) і (32), $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі.

Доведення оцінок (34)–(36) легко провести, якщо використовувати явні вирази для функцій $G_1^{(l)}$, $G_0^{(l)}$,$V^{(l)}$ і твердження (21).

Наступні властивості однорідних функцій Гріна характерні для нормальних параболічних крайових задач, якими є задачі (8), (9_1), (10). Вони є аналогами властивостей 1) і 4) зі вступу ФРЗК Z для рівняння (1) і доводяться аналогічно.

3) нормальність $G_0^{(l)}$. Функція $G_0^{(l)}(t-\tau,x,\xi)$, в якій τ,ξ – основні, а t,x – параметричні змінні, є однорідними функціями Гріна відповідних спряжених до (8), (9_1), (10) крайових задач.

4) формула згортки для $G_0^{(l)}$. Правильна формула

$$G_0^{(l)}(t,x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0^{(l)}(t-\gamma,x,y) G_0^{(l)}(\gamma,y,\xi)dy,$$

$$0<\gamma<t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n.$$

Висновки

Одержані в статті відомості про елементи вектор-функцій Гріна крайових задач для найпростішого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами певним чином показують, як впливають на властивості вектор-функцій Гріна наявність зростаючих коефіцієнтів. Ці відомості можуть використовуватися для встановлення коректної розв'язності задач (8), (9_1), (10), інтегрального зображення та властивостей її розв'язків. Методика виведення явних формул для елементів вектор-функцій Гріна може застосовуватись у випадку складніших крайових задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения / А.Т. Баруча-Рид. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 511 с.

2. *Тихонов В.И.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В.И Тихонов, Н.К. Кульман. – М.: Сов. радио, 1975. – 704 с.

3. *Тихонов В.И.* Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

4. *Заболотько Т.О.* Про фундаментальний розв'язок задачі Ко-ші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування / Т.О. Заболотько, С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т , 2012. – Т. 2, №2–3. – С. 81 – 89.

5. *Ивасишен С.Д.* Линейные параболические граничне задачи / С.Д. Ивасишен. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 72 с. – (Современные достижения математики и ее приложений).

6. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничних задач / С.Д. Ивасишен. – К.: Вища шк., 1990. – 200 с.