УДК 517.956.2

©2014 р. О.В. Флюд

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗАДАЧА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ У ГІПЕРБОЛІЧНІЙ СИСТЕМІ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто початково-крайову задачу для системи $n+m$ сингулярно збурених лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку на площині, причому малий параметр є множником при різних частинних похідних. Побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення довільного порядку розв'язку системи за степенями малого параметра.

We consider the initial-boundary value problem for a system of $n+m$ singularly perturbed first order linear partial differential equations in the plane such that the small parameter is a multiplier for various partial derivatives. We construct and justify the asymptotic expansion of an arbitrary order solution with the powers of a small parameter.

Вступ. Гіперболічні рівняння і системи, зазвичай, використовують для моделювання коливних процесів, що мають скінченну швидкість поширення збурень [1,2]. З математичних міркувань це відповідає тому, що характеристики гіперболічних рівнянь і систем не є ортогональними. Однак, в багатьох задачах природознавства, фізики твердого тіла, теорії оптимального керування тощо зустрічаються математичні моделі у вигляді рівнянь з частинними похідними, які за своїм типом є гіперболічними і для яких частина характеристик є перпендикулярними до системи координат [2].

Вивчення взаємозв'язку гіперболічних задач з ортогональними характеристиками та характеристиками близькими до ортогональних приводить до ефекту примежового шару [3].

У цій праці розглянуто сингулярну задачу для гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку з малим параметром при різних похідних. Виродження параметра приводить до задачі з ортогональними характеристиками. Подібними за результатами до цієї праці є дослідження в [4,5].

Формулювання задачі. В області $\Omega = \{(x,t):\ 0<x,t<\infty\}$ розглянемо мішану задачу для гіперболічної системи $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}+\dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j^\varepsilon + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)v_k^\varepsilon + \\ \qquad + f_i(x,t;\varepsilon), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon\dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)u_j^\varepsilon + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)v_k^\varepsilon + \\ \qquad + g_s(x,t;\varepsilon), \quad s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &u_i^\varepsilon(x,0)=u_i^\varepsilon(0,t)=0, \quad i=\overline{1,n}, \\ &v_s^\varepsilon(x,0)=0, \quad s=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\varepsilon<1$ – малий додатній параметр.

Особливістю цієї задачі є те, що параметр ε стоїть при різних похідних у перших n і в останніх m рівняннях. Це приводить до специфічних особливостей розв'язку і його асимптотики.

Ми розглядаємо класичний розв'язок задачі (1),(2), тобто розв'язок, неперервний в замиканні області $\overline{\Omega} = \{(x,t):\ 0\leqslant x,t<\infty\}$, який має неперервні похідні першого порядку, що задовольняють систему (1), а також крайові умови (2).

Для побудови та обгрунтування асимптотичного розвинення розв'язку задачі (1),(2) припускаємо, що виконуються такі умови:

(H_1) функції $a_{ij}, b_{ik}, \gamma_{sj}, \sigma_{sk} : \overline{\Omega} \to R$, f_i і $g_s : \overline{\Omega} \times R \to R$ – достатньо гладкі в області свого визначення (порядок гладкості залежить від порядку асимптотики);

(H_2) умови погодження першого порядку для всіх $\varepsilon \in (0,1)$

$$f_i(0,0;\varepsilon) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$
$$g_s(0,0;\varepsilon) = 0, \quad s = \overline{1,m}.$$

За умов (H_1), (H_2) при кожному фіксованому значенні параметра ε існує єдиний класичний розв'язок задачі (1),(2) [1]. Для побудови та обгрунтування асимптотики розв'язку жодних додаткових умов на знак a_{ij} $(j = i)$, σ_{sk} $(k = s)$ не потрібно.

Зазначимо, що розв'язок виродженої системи (в (1) формально $\varepsilon = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)v_k + \\ \qquad + f_i(x,t;0), \quad i = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)u_j + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)v_k + \\ \qquad + g_s(x,t;0), \quad s = \overline{1,m} \end{cases} \tag{3}$$

не задовольняє всіх умов (2), а саме, функції u_i $(i = \overline{1,n})$, загалом, не задовольняють початкові умови. Тому в околі межі $t = 0$ області Ω виникає примежовий шар, який підправляє розв'язок виродженої задачі (система (3) із крайовими умовами для функцій u та початковими для v, яка наведена нижче) до виконання втрачених умов. Особливість задачі полягає ще й в тому, що хоча примежова функція визначається як розв'язок рівняння з частинними похідними першого порядку, а межа на якій задається крайова умова, містить кутову точку (0,0), що впливає на гладкість розв'язку, тим не менше, вдається побудувати без будь-яких інших умов погодження, крім (H_2), асимптотику розв'язку довільного порядку, рівномірну в області $\overline{\Omega}$.

Для простоти записів уведемо позначення

$$u^\varepsilon(x,t) = (u_1^\varepsilon(x,t), \ldots, u_n^\varepsilon(x,t)),$$
$$v^\varepsilon(x,t) = (v_1^\varepsilon(x,t), \ldots, v_m^\varepsilon(x,t)).$$

Побудова нульового наближення. Асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1),(2) на першому кроці будуємо у вигляді

$$\begin{aligned} &u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) \;\; (i = \overline{1,n}), \\ &v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) \;\; (s = \overline{1,m}), \\ &\qquad\qquad (x,t) \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для визначення функцій $\bar{u}_{i0}$ та $\bar{v}_{s0}$ нульового наближення регулярної частини асимптотики сформулюємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j0} + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k0} + \\ \qquad + f_{i0}(x,t), \quad i = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j0} + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k0} + \\ \qquad + g_{s0}(x,t), \quad s = \overline{1,m}, \\ \bar{u}_{i0}(0,t) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ \bar{v}_{s0}(x,0) = 0, \quad s = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{5}$$

де $f_{i0}(x,t)$, $g_{s0}(x,t)$ – перші члени розвинення функцій f_i та g_s у степеневий ряд за степенями параметра ε в околі $\varepsilon = 0$. Задача (5) для визначення $\bar{u}_{i0}$ $(i = \overline{1,n})$, $\bar{v}_{s0}$ $(s = \overline{1,m})$ за умови (H_2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду, для якої існує єдиний достатньо гладкий розв'язок. Отож, функції

$\bar{u}_{i0}$ $(i = \overline{1,n})$, $\bar{v}_{s0}$ $(s = \overline{1,m})$ однозначно визначені та мають потрібну гладкість. Із формулювання задачі для визначення $\bar{u}_{i0}, \bar{v}_{s0}$, очевидно, випливає, що не всі умови (2) виконуються. Тепер будемо підправляти побудований розв'язок задачі (5) функцією примежового шару так, щоб виконувалася втрачена при виродженні умова.

Підправимо (4) функцією примежового шару так, щоб виконувалась друга умова (2), тобто наближення розв'язку будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t). \end{cases} \tag{6}$$

де

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

регуляризуюча змінна в околі межі $t = 0$. Щоб записати задачу для визначення $P_{i0}u(x,\tau)$, розвинемо коефіцієнти системи (1) в ряд за степенями ε і підставимо (6) у систему (1) та крайові умови (2), прирівнявши коефіцієнти при нульовому степені ε, отримаємо задачу для визначення $P_{i0}u$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j0}u, \\ \qquad\qquad \tau > 0, \ \ 0 < x < \infty, \\ P_{i0}u(0,\tau) = 0, \quad \tau > 0, \\ P_{i0}u(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0), \\ \qquad\qquad 0 < x < \infty, \ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{7}$$

Отож, як випливає із (7), функції $P_{i0}u$ ліквідують нев'язку, яку приносять $\bar{u}_{i0}$ у крайову умову при $t = 0$ і для визначення функцій $P_{i0}u$ отримано крайову задачу для гіперболічної системи рівнянь першого порядку. Гладкість розв'язку задачі (7) залежить від виконання умов погодження в кутовій точці. Перевіримо виконання умов погодження нульового та першого порядків розв'язку $P_{i0}u$ у кутовій точці $(0,0)$. Для виконання умов погодження нульового порядку повинні виконуватись рівності

$$P_{i0}u(0,\tau)|_{\tau=0} = P_{i0}u(x,0)|_{x=0} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Очевидним є те, що ліва частина цієї рівності для всіх $i = 1,\ldots,n$ дорівнює нулю в кутовій точці, а з умов (7) та (5) справджується рівність

$$0 = -\bar{u}_{i0}(x,0)|_{x=0} = 0 \quad (i = \overline{1,n}).$$

Отже, умови погодження початкових та крайових умов нульового порядку задачі (7) виконуються.

Перейдемо до перевірки умови погодження першого порядку, а саме, перевіримо, чи задовольняють систему (7) умови задачі в кутовій точці. Для цього повинні виконуватись співвідношення

$$\left.\frac{\partial P_{i0}u}{\partial t}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial P_{i0}u}{\partial \xi}\right|_{(0,0)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j0}u\Big|_{(0,0)} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Використавши умови із (7), потрібно показати, що $\left.\dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$. З умов (H_1), (5) одержимо

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(0,0)\bar{u}_{j0}\Big|_{(0,0)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(0,0)\bar{v}_{k0}\Big|_{(0,0)} + f_{i0}(0,0) = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Виконання умов погодження нульового та першого порядків крайових та початкових умов дають підставу стверджувати, що розв'язок $P_{i0}u$ задачі (7) є достатньо гладким.

Покажемо тепер що функції $P_{i0}u$ $(i = \overline{1,n})$ мають примежовий характер. Дійсно, з однорідності крайової умови (7), функції $P_{i0}u$ $(i = \overline{1,n})$ приймають нульові значення над характеристикою $\tau = x$ рівняння (7).

При $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до горизонтального положення, тобто функції $P_{i0}u$ відмінні від нуля в околі межі $t = 0$ області Ω.

Побудова наближення першого порядку.

Асимптотичне розвинення першого порядку розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1),(2) будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau) \\ \quad +\varepsilon\bar{u}_{i1}(x,t) + \varepsilon P_{i1}u(x,\tau), \ \ i = \overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) \\ \quad +\varepsilon\bar{v}_{s1}(x,t) + \varepsilon P_{s1}v(x,\tau), \ \ s = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{8}$$

Підставляємо (8) в систему (1),(2). Стандартною процедурою теорії сингулярних збурень [3] отримаємо задачу для визначення функцій $P_{s1}v$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{s1}v}{\partial \tau} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,0)P_{j0}u, \\ P_{s1}v(x,\infty) = 0, \ \ s = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Проінтегрувавши рівняння для $P_{s1}v$, використавши те, що $P_{s0}u(x,\tau) = 0$, $\tau \geqslant x$ $(s = \overline{1,m})$, запишемо $P_{s1}v$ $(s = \overline{1,m})$ у явному вигляді

$$P_{s1}v(x,\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,0)\int\limits_{x}^{\tau} P_{j0}u(x,\eta)d\eta, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant \tau \leqslant x, \\ 0, \qquad\qquad \tau \geqslant x. \end{cases} \tag{9}$$

Зазначимо, що функції $P_{s1}v$ мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Система рівнянь для визначення першого наближення $(\bar{u}_{i1}, \bar{v}_{s1})$ регулярної частини асимптотики матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j1} + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k1} + \\ \qquad + \bar{f}_{i1}(x,t), \quad i = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j1} + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k1} + \\ \qquad + \bar{g}_{s1}(x,t), \quad s = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{10}$$

де $\bar{f}_{i1}(x,t) = f_{i1}(x,t) - \dfrac{\partial \bar{u}_{i0}(x,t)}{\partial t}$, $\bar{g}_{s1}(x,t) = g_{s1}(x,t) + \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}(x,t)}{\partial x}$, $f_{i1}(x,t)$, $g_{s1}(x,t)$ – коефіцієнти при першому степені ε розвинення функцій f_i та g_s у ряд за степенями ε, відповідно. Крім того, $\bar{v}_{s1}$ ліквідують нев'язки, які вносять примежові шари $P_{s1}v$ у початкові умови. Тому функції $\bar{u}_{i1}$, $\bar{v}_{s1}$, як розв'язки системи (10) повинні задовольняти умови

$$\begin{cases} \bar{u}_{i1}(0,t) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ \bar{v}_{s1}(x,0) = -P_{s1}v(x,0), \quad s = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{11}$$

Задача (10), аналогічно як і (5), еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, тобто є однозначно розв'язною.

Для $P_{i1}u$ $(i = \overline{1,n})$ отримаємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j1}u + \\ \qquad + p_{i1}(x,\tau), \ 0 < x < \infty, \ \tau > 0, \\ P_{i1}u(0,\tau) = 0, \tau \geqslant 0, \\ P_{i1}u(x,0) = -\bar{u}_{i1}(x,0), \\ \qquad\qquad 0 \leqslant x < \infty \ \ (i = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{12}$$

де $p_{i1}(x,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,0)P_{k1}v +$

$$+\tau \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x,0)}{\partial t} P_{j0}u.$$

Оскільки система (12) є неоднорідною, то для існування класичного розв'язку задачі необхідно, щоб виконувались не лише умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці (0,0), але й існували неперервні похідні першого порядку для функцій p_{i1}. Частинні похідні існують, оскільки функції $P_{k0}u, P_{k1}v$ – гладкі. Доведемо виконання умов погодження нульового порядку, тобто $P_{i1}u(0,\tau)\big|_{\tau=0} = P_{i1}u(x,0)\big|_{x=0}$. Рівність нулю лівої частини випливає з умови (12), а для правої частини використаємо умови (11)

$$0 = -\bar{u}_{i1}(x,0)\big|_{x=0} = 0, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Тому крайові умови системи (12) погоджені до неперервності в кутовій точці (0,0), що означає, що розв'язок задачі (12) у області $\tau \geqslant 0$, $0 \leqslant x < \infty$ є неперервний. Щоб переконатися, що $P_{i1}v$ у вказаній області гладкі, покажемо, що для всіх $i = \overline{1,n}$ виконуються рівності

$$\frac{\partial P_{i1}u}{\partial \tau}\bigg|_{(0,0)} + \frac{\partial P_{i1}u}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j1}u\bigg|_{(0,0)} + p_{i1}\big|_{(0,0)}.$$

З умов (7),(9),(12) перейдемо до рівності

$$0 - \frac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot 0 + 0.$$

Тепер залишилось показати, що похідна $\bar{u}_{i1}$ за x рівна нулю. Для цього використаємо умову (10), з якої маємо

$$\frac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(0,0)\bar{u}_{j1}\bigg|_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(0,0)\bar{v}_{k1}\bigg|_{(0,0)} + \bar{f}_{i1}\bigg|_{(0,0)}, \ i = \overline{1,n},$$

де

$$\begin{cases} \bar{f}_{i1}(0,0) = f_{i1}(0,0) - \dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial t} = 0, \\ \bar{v}_{s1}\big|_{(0,0)} = -P_{s1}v(0,0) = 0, \\ \bar{u}_{i1}\big|_{(0,0)} = 0. \end{cases}$$

Оскільки, $\dfrac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = 0$, то всі умови для існування класичного (тобто гладкого) розв'язку для задачі (12) виконуються.

Отже, як випливає із побудованого вище нульового та першого наближень, рекурентний процес послідовного визначення функцій асимптотичного розвинення розв'язку розщеплений, а тому опишемо алгоритм визначення функцій наближення довільного порядку.

Побудова асимптотики довільного порядку. Повне асимптотичне розвинення розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1),(2) будуємо у вигляді:

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau)\big], \\ \qquad\qquad i = \overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau)\big], \\ \qquad\qquad s = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{13}$$

Опишемо послідовність, з якої визначаємо функції правих частин (13), а також випишемо задачі, розв'язками яких є ці функції. Задачі отримуємо стандартним способом теорії сингулярних збурень [3], подібно до наведеного вище, тому пропустимо опис способу їх отримання.

Задачі для функцій $P_{sh}v$ примежового шару матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{sh}v}{\partial \tau} = p_{sh}^v(x,\tau), \tau > 0, \ 0 < x < \infty, \\ P_{sh}v(x,\infty) = 0, 0 \leqslant x < \infty \ (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{14}$$

де p_{sh}^v – права частина рівняння для $P_{sh}v$ і має вид

$$p_{sh}^v(x,\tau) = \sum_{r=0}^{h-1} \frac{\tau^r}{r!} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r \gamma_{sj}}{\partial t^r}(x,0) P_{j,h-1-r}u + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r \sigma_{sk}}{\partial t^r}(x,0) P_{k,h-1-r}v \right] + \frac{\partial P_{s,h-2}v}{\partial x}, \ s = \overline{1,m}, \ h \geqslant 1.$$

Тут p_{sh}^v $(s=\overline{1,m},\ h \geqslant 0)$ – відомі неперервні в Ω функції, рівні нулеві над характеристикою $\tau = x$, що випливає з їхньої структури, а ξ – регуляризуюче перетворення, як вище. Тому розв'язок $P_{sh}v$ задачі (14) для кожного $h \geqslant 1$ та $s=\overline{1,m}$ запишемо в явному вигляді

$$P_{sh}v(x,\tau)=\begin{cases}\int\limits_x^\tau p_{sh}^v(x,\vartheta)d\vartheta,\ 0\leqslant\tau\leqslant x,\\ 0,\ \tau\geqslant x.\end{cases} \tag{15}$$

Зазначимо, що гладкість функцій $P_{sh}v$ ($s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1$), зокрема, і на характеристиці $x=\tau$, випливає безпосередньо із їхньої структури.

Функції регулярної частини асимптотики $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ порядку $h \geqslant 1$ є розв'язками такої задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \bar{u}_{ih}}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}(x,t)\bar{u}_{jh}+\\ \qquad +\sum\limits_{k=1}^m b_{ik}(x,t)\bar{v}_{kh}+\bar{f}_{ih}(x,t),\\ \qquad\qquad (x,t)\in\Omega\ \ (i=\overline{1,n}),\\ \dfrac{\partial \bar{v}_{sh}}{\partial t}=\sum\limits_{j=1}^n \gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{jh}+\\ \qquad +\sum\limits_{k=1}^m \sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{kh}+\bar{g}_{sh}(x,t),\\ \qquad\qquad (x,t)\in\Omega\ \ (s=\overline{1,m}),\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases}\bar{u}_{ih}(0,t)=0,\ 0\leqslant t<\infty\ \ (i=\overline{1,n}),\\ \bar{v}_{sh}(x,0)=-P_{sh}v(x,0),\\ \qquad\qquad 0\leqslant x<\infty\ \ (s=\overline{1,m}),\end{cases} \tag{17}$$

де $\bar{f}_{ih}(x,t) = f_{ih}(x,t) - \dfrac{\partial \bar{u}_{i,h-1}}{\partial t}$, $\bar{g}_{sh}(x,t) = g_{sh}(x,t) + \dfrac{\partial \bar{v}_{s,h-1}}{\partial x}$, а $f_{ih}(x,t)$, $g_{sh}(x,t)$ – коефіцієнти розвинення функцій f_i та g_s, відповідно, в ряд за степенями ε. Задача (16),(17) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, для якої існує єдиний розв'язок.

Для визначення наближень функції примежового шару $P_{ih}u$ в околі границі $t=0$ області Ω одержимо крайову задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial\tau}+\dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}P_{j\,h}u(x,\tau)+\\ \qquad\qquad +p_{ih}^u,0<x<\infty,\ \tau>0,\\ P_{ih}u(0,\tau)=0,\tau\geqslant 0,\\ P_{ih}u(x,0)=-\bar{u}_{ih}(x,0),\\ \qquad 0\leqslant x<\infty,\quad i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1,\end{cases} \tag{18}$$

де

$$p_{ih}^u(x,\tau)=\sum_{r=1}^h\frac{\tau^r}{r!}\sum_{j=1}^n\frac{\partial^r a_{ij}}{\partial t^r}(x,0)P_{j,\,h-r}u(x,\tau)$$

$$+\sum_{r=0}^h\frac{\tau^r}{r!}\sum_{k=1}^m\frac{\partial^r b_{ik}}{\partial t^r}(x,0)P_{k,\,h-r}v(x,\tau),$$

$$i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1.$$

Аналогічно як у задачі (12), для доведення існування класичного розв'язку задачі (18) необхідно, щоб функція $p_{ih}^v(x,\tau)$ була гладкою й виконувались умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці (0,0). Частинні похідні функцій $p_{ih}^v(x,\tau)$ існують, оскільки функція є сумою гладких функцій. Перейдемо до перевірки виконання умов погодження, які випливають із (17) та (18) :

$$0=P_{ih}u(0,\tau)\Big|_{\tau=0}=P_{ih}u(x,0)\Big|_{x=0}=$$

$$=-\bar{u}_{ih}(x,0)\Big|_{x=0},$$

$$0=-u_{ih}(0,0)=0\quad (i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1).$$

Отже, крайові умови погоджені до неперервності в кутовій точці. Перевіримо чи початкові умови задовольняють систему (18) в точці (0,0), тобто

$$\frac{\partial P_{ih}u}{\partial\tau}\Big|_{(0,0)}+\frac{\partial P_{ih}u}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=$$

$$=\sum_{j=1}^n a_{ij}(0,0)P_{j\,h}u\Big|_{(0,0)}+p_{ih}^u\Big|_{(0,0)}$$

$$(i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1),$$

або, використавши початкову та крайові умови задачі (18), останнє можна записати у виді

$$-\frac{\partial \bar{u}_{ih}(x,0)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot 0+p_{ih}^{v}(0,0)$$
$$(i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1).$$

Права частина цього співвідношення рівна нулеві, оскільки $p_{ih}^{u}(x,\tau)=0$ $(i=\overline{1,n}, h\geqslant 1)$ при $\tau\geqslant x\geqslant 0$, що випливає із їхніх властивостей. Використавши перше рівняння (16) та умови (17), маємо

$$\frac{\partial \bar{u}_{ih}(0,0)}{\partial x}=-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(0,0)\cdot 0-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(0,0)P_{kh}v(x,0)\bigg|_{x=0}+\bar{f}_{ih}(0,0),$$
$$i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1.$$

Відповідно до (17) та (15), перші два доданки справа рівні нулеві. Залишилось показати, що $\bar{f}_{ih}(x,t)$ в кутовій точці рівна нулеві. Отож, із вигляду для $\bar{f}_{ih}$, умов (H_2), (17) можемо записати $(i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1)$

$$\bar{f}_{ih}(0,0)=f_{ih}(0,0)-\frac{\partial \bar{u}_{i,h-1}(0,0)}{\partial t}=0.$$

Справедливість останньої рівності випливає з того, що $\bar{u}_{ih}(0,t)=0$ для $0\leqslant t<\infty$ $(i=\overline{1,n})$, тому $\dfrac{\partial u_{ih}}{\partial t}(0,0)=0$ $(i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1)$. Виконання умови погодження першого порядку в кутовій точці (0,0) забезпечує гладкість розв'язку задачі (18) в області $\tau\geqslant 0$, $0<x<\infty$. Зазначимо, крім того, що функції $P_{ih}v$ $(i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1)$ мають примежовий характер: відмінні від нуля в околі границі $t=0$ області Ω (крайова умова (18)) і при $\varepsilon\to 0$ характеристика $x=\tau$ рівняння (18) прямує до горизонтального положення.

Отже, формальне асимптотичне наближення довільного порядку розв'язку $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ задачі (1),(2) побудовано. Перейдемо до обгрунтування отриманої асимптотики.

Оцінка залишкового члена. Нехай $N>0$ – довільне натуральне число. Виділимо в асимптотиці (13) розв'язку $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ задачі (1),(2) частинну суму N порядку. Позначивши через $R_{iN}^{\varepsilon}u=R_{iN}^{\varepsilon}u(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$, та $R_{sN}^{\varepsilon}v=R_{sN}^{\varepsilon}v(x,t)$ $(s=\overline{1,m})$ залишки асимптотичних розвинень відповідних компонент розв'язку задачі, (13) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t)=\sum\limits_{h=0}^{N}\varepsilon^h\left[\bar{u}_{ih}(x,t)+P_{ih}u(x,\tau)\right]\\ \qquad\qquad +R_{iN}^{\varepsilon}u(x,t),\, i=\overline{1,n},\\ v_s^\varepsilon(x,t)=\sum\limits_{h=0}^{N}\varepsilon^h\left[\bar{v}_{sh}(x,t)+P_{sh}v(x,\tau)\right]\\ \qquad\qquad +R_{sN}^{\varepsilon}v(x,t),\, s=\overline{1,m}.\end{cases}\tag{19}$$

Для того щоб отримати задачі для залишку асимптотики $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$, підставимо (19) у систему (1), умови (2) та використаємо задачі для наближень асимптотичного розвинення. Тому залишковий член асимптотики в області Ω є розв'язком системи

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial R_{iN}^{\varepsilon}u}{\partial t}+\dfrac{\partial R_{iN}^{\varepsilon}u}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)R_{jN}^{\varepsilon}u\\ \qquad +\sum\limits_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)R_{kN}^{\varepsilon}v+\pi_i^u(x,t;\varepsilon),\\ \qquad\qquad i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial R_{sN}^{\varepsilon}v}{\partial t}-\varepsilon\dfrac{\partial R_{sN}^{\varepsilon}v}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)R_{jN}^{\varepsilon}u\\ \qquad +\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(x,t)R_{kN}^{\varepsilon}v+\pi_s^v(x,t;\varepsilon),\\ \qquad\qquad s=\overline{1,m}\end{cases}\tag{20}$$

та задовольняє початково-крайові умови

$$\begin{aligned} &R_{iN}^{\varepsilon}u(x,0)=R_{iN}^{\varepsilon}u(0,t)=0,\ i=\overline{1,n},\\ &R_{sN}^{\varepsilon}v(x,0)=0,\quad s=\overline{1,m},\end{aligned}\tag{21}$$

де π_i^u $(i=\overline{1,n})$ та π_s^v $(s=\overline{1,m})$ – відомі функції, такі що для всіх $(x,t)\in\Omega$ справедливо

$$\pi_i^u(x,t;\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\qquad \pi_s^v(x,t;\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

Наша мета – отримати рівномірну оцінку залишку асимптотики в $\overline{\Omega}$. Для цього введемо заміну в задачі (20),(21):

$$\rho_i^\varepsilon u(x,t) = R_{iN}^\varepsilon u(x,t)e^{-\eta(x+t)} \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\rho_s^\varepsilon v(x,t) = R_{sN}^\varepsilon v(x,t)e^{-\eta(x+t)} \quad (s=\overline{1,m}),$$

де η – деяка додатня стала. Тоді, відповідно для $\rho_i^\varepsilon u$ і $\rho_s^\varepsilon v$, отримаємо задачу

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial\rho_i^\varepsilon u}{\partial t} + \dfrac{\partial\rho_i^\varepsilon u}{\partial x} = \tilde{a}_{ii}(x,t)\rho_i^\varepsilon u + \\ +\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(x,t)\rho_j^\varepsilon u + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\rho_k^\varepsilon v + \\ \qquad +\Pi_i^u(x,t;\varepsilon), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial\rho_s^\varepsilon v}{\partial t} - \varepsilon\dfrac{\partial\rho_s^\varepsilon v}{\partial x} = \tilde{\sigma}_{ss}(x,t)\rho_s^\varepsilon v + \\ +\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\rho_j^\varepsilon u + \sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\rho_k^\varepsilon v + \\ \qquad +\Pi_s^v(x,t;\varepsilon), \quad s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \rho_i^\varepsilon u(x,0) = \rho_i^\varepsilon u(0,t) = 0, & i=\overline{1,n}, \\ \rho_s^\varepsilon v(x,0) = 0, & s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{23}$$

де

$$\Pi_i^u(x,t;\varepsilon) = \pi_i^u(x,t;\varepsilon)e^{-\eta(x+t)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),$$
$$\tilde{a}_{ii}(x,t) = a_{ii}(x,t) - \eta(1+\varepsilon) \ (i=\overline{1,n}),$$
$$\Pi_s^v(x,t;\varepsilon) = \pi_s^v(x,t;\varepsilon)e^{-\eta(x+t)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),$$
$$\tilde{\sigma}_{ss}(x,t) = \sigma_{ss}(x,t) - \eta(1-\varepsilon) \ (s=\overline{1,m}).$$

Вибираємо тепер η достатньо великим, щоб виконувались нерівності

$$\tilde{a}_{ii}(x,t) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}(x,t)| + \sum_{k=1}^{m} |b_{ik}(x,t)| \leqslant -1 \quad (i=\overline{1,n}), \tag{24}$$

$$\tilde{\sigma}_{ss}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} |\gamma_{sj}(x,t)| + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m} |\sigma_{sk}(x,t)| \leqslant -1 \quad (s=\overline{1,m}). \tag{25}$$

Припустимо, що кожна з функцій $|\rho_i^\varepsilon u|$ $(i=\overline{1,n})$ досягає свого максимуму в точці $T_i(x_i,t_i)\in\overline{\Omega}$, а функції $|\rho_s^\varepsilon v|$ $(s=\overline{1,m})$ – в точках $T_{n+s}(x_{n+s},t_{n+s})\in\overline{\Omega}$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що

$$|\rho_1^\varepsilon u(T_1)| \geqslant |\rho_2^\varepsilon u(T_2)| \geqslant \ldots \geqslant |\rho_n^\varepsilon u(T_n)| \geqslant \geqslant |\rho_1^\varepsilon v(T_{n+1})| \geqslant |\rho_2^\varepsilon v(T_{n+2})| \geqslant \geqslant \ldots \geqslant |\rho_m^\varepsilon v(T_{n+m})|. \tag{26}$$

Розглянемо перше рівняння системи (22) в точці T_1 і перепишемо його у вигляді

$$\varepsilon\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1} + \frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1} - \tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1) - \sum_{k=1}^{m} b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1) = \Pi_1(T_1;\varepsilon). \tag{27}$$

Нехай в точці T_1 функція $\rho_1^\varepsilon u$ набуває від'ємного мінімуму. Тоді в цій точці $\dfrac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1} \leqslant 0$, $\dfrac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1} \leqslant 0$ (строга нерівність можлива лише у випадку, якщо точка T_1 знаходиться на межі області $\overline{\Omega}$). Звідси, використовуючи (24) та (26), для правої частини (27) справедлива оцінка

$$\varepsilon\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1} + \frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1} - \tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1) - \sum_{k=1}^{m} b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1) \leqslant$$
$$\leqslant -\tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) + \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}(T_1)||\rho_j^\varepsilon u(T_1)| + \sum_{k=1}^{m} |b_{1k}(T_1)||\rho_k^\varepsilon v(T_1)| \leqslant$$
$$\leqslant -(\tilde{a}_{11}(T_1) + \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}(T_1)| + \sum_{k=1}^{m} |b_{1k}(T_1)|)\rho_1^\varepsilon u(T_1) \leqslant \rho_1^\varepsilon u(T_1).$$

Отож, права частина (27) є величиною порядку ε^{N+1}, а ліва в точці T_1 не перевищує $\rho_1^\varepsilon u(T_1)$. Оскільки $|\rho_1^\varepsilon u(T_1)| = \max\limits_{\overline{\Omega}} |\rho_1^\varepsilon u(x,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$, то із (26) одержимо

$$|\rho_2^\varepsilon u(T_2)| = \max_{\overline{\Omega}} |\rho_2^\varepsilon u(x,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}), \ldots,$$

$$|\rho_m^\varepsilon v(T_m)| = \max_{\overline{\Omega}} |\rho_m^\varepsilon v(x,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

Звідки й випливає, що для всіх $(x,t) \in \overline{\Omega}$

$$\rho_i^\varepsilon u(x,t) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \ \ (i = \overline{1,n}),$$
$$\rho_s^\varepsilon v(x,t) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \ \ (s = \overline{1,m}).$$

Отже, взявши до уваги введену заміну, отримуємо бажану оцінку залишкового члена $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ асимптотичного розвинення (19) розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1),(2):

$$R_{iN}^\varepsilon u(x,t) = \rho_i^\varepsilon u(x,t) e^{\eta(x+t)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \quad (i = \overline{1,n}),$$
$$R_{sN}^\varepsilon v(x,t) = \rho_s^\varepsilon v(x,t) e^{\eta(x+t)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \quad (s = \overline{1,m}), \ \ (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

Аналогічні міркування справедливі у випадку додатного максимума для функції $\rho_i^\varepsilon u$.

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай N – довільне натуральне число. Припустимо, що виконуються умови:*

(H_1) $a_{ij},\ b_{ik},\ \gamma_{sj},\ \sigma_{sk} \in C^{(N+2)}(\overline{\Omega}),\ f_i,\ g_s \in C^{(N+2)}(\overline{\Omega} \times R_+)\ (i,j = \overline{1,n},\ s,k = \overline{1,m});$

(H_2) $f_i(0,0;\varepsilon) = 0\ (i = \overline{1,n}),$ $g_s(0,0;\varepsilon) = 0\ (s = \overline{1,m}).$

Тоді розв'язок $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1),(2) допускає асимптотичне розвинення виду

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \left[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau)\right] \\ \qquad\qquad + R_{iN}^\varepsilon u(x,t), i = \overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \left[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau)\right] \\ \qquad\qquad + R_{sN}^\varepsilon v(x,t), s = \overline{1,m}, \end{cases}$$

де функції $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ регулярної частини асимптотики є розв'язками задач (16),(17), а функції примежових шарів $(P_h u, P_h v)$ в околі $t = 0$ визначаються як розв'язки задач (18), (14), відповідно, а для залишкового члена $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ асимптотичного розвинення справедливі оцінки

$$|R_{iN}^\varepsilon u(x,t)| \leqslant C_{1i}\varepsilon^{N+1}, |R_{sN}^\varepsilon v(x,t)| \leqslant C_{2s}\varepsilon^{N+1},$$

для всіх $(x,t) \in \overline{\Omega}$, з незалежними від ε сталими C_{1i}, C_{2s} $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Аболиня В.Э., Мышкис А.Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Матем. сб. — 1960.— Т. 50.—№ 4.— С. 423-442.

2. *Кирилич В.М., Филимонов А.М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений //Матем. студії.— 2008.— Т. 30.— № 1.— С. 42-60.

3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений/— М: Высшая школа, 1990. —208с.

4. *Мауленов О., Мышкис А.Д.* О смешанной задаче для полулинейной гиперборлической системы на отрезке с малым параметром при производных по времени (часть III)// Изв. АН КазССР. Сер.физ.-мат. — 1985. — № 1. — С. 65-68.

5. *Бутузов В.Ф., Каращук А.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка// Матем. заметки.— 1995.—Т. 57— Вып. 3.—С. 338-349.