

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ В ТРИШАРОВОМУ НАПІВОВМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Методом інтегрального перетворення Лапласа в поєднанні з методом функцій Коші побудовано розв'язок задачі дифузії, змодельованої на тришаровій півосі гібридним диференціальним оператором Лежандра-Фур'є-Бесселя в припущенні, що часова змінна бере участь в крайовій умові та в умовах спряження.

Using integral Laplace transforms and Cauchy functions, we construct a solution of a diffusion problem modeled on a three-layer axis by a hybrid differential Legendre-Fourier-Bessel operator under the assumption that the time variable is involved in the boundary conditions and conjugate conditions.

Процеси теплопровідності, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертали до себе увагу вчених на протяжці всієї історії розвитку людства. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є диференціальне рівняння теплопровідності параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r), \quad r \in (R_0, R)$$

з відповідною початковою умовою та крайовими умовами.

Потреби практики приводили до різного узагальнення рівняння теплопровідності: перехід до квазілінійності та нелінійності, перехід до кусково-однорідних коефіцієнтів, перехід до нових криволінійних систем координат (у випадку розмірності простору $n \geq 2$) та ін. В усіх випадках процеси теплопровідності вивчалися в припущенні, що межа середовища жорстка по відношенню до відбиття хвиль. Різко змінюється картина розповсюдження тепла, якщо межа середовища є м'якою по відношенню до відбиття хвиль. Математично це означає наявність в крайових операторах та диференціальних операторах спряження похідної стосовно часової змінної.

Особливу увагу заслуговує дуже поширений в другій половині ХХ-го століття для вивчення фізико-технічних характеристик композитних об'єктів метод кусково-сталих

коефіцієнтів. Це привело навіть у випадку жорсткості області середовища до диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних. Одержати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку таких задач навіть у найпростішому випадку неможливо. Ці труднощі можна обійти, якщо здійснити моделювання процесів поширення тепла методом гібридних диференціальних операторів.

Дана робота присвячена моделюванню нестационарних процесів теплопровідності методом гібридного диференціального оператора Лежандра-Фур'є-Бесселя в припущенні, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Це дало можливість одержати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку в алгоритмічній формі достатньо широкого класу задач теплопровідності неоднорідного середовища. Така форма розв'язку зручна і для теоретичного дослідження і для інженерних розрахунків.

Побудуємо обмежений в області $\bar{D}_2^+ = \{(t, r) : t \in (0, \infty); r \in \bar{I}_2^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1] = f_1(t, r), \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = f_2(t, r), r \in (R_1, R_2), \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2 \right) u_2^*(p, r) = -F_2^*(p, r), \quad r \in (R_1, R_2) \quad (1) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\nu, \alpha} [u_3] = f_3(t, r), r \in (R_2, \infty) \quad \left(B_{\nu, \alpha} - q_3^2 \right) u_3^*(p, r) = -F_3^*(p, r), \quad r \in (R_2, \infty) \quad (2) \quad (6)$$

за початковими умовами

$$u_j(t, r) \Big|_{t=0} = g_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j), \\ j = \overline{1, 3}, \quad R_3 = \infty \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left[\left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t} \right] u_1(t, r) \Big|_{r=R_0} = \\ = \omega_0(t), \quad \frac{\partial u_3}{\partial r} \Big|_{r=\infty} = 0 \quad (3)$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k [u_k(t, r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t, r)] \right) \Big|_{r=R_k} = \\ = \omega_{jk}(t), \quad j, k = 1, 2 \quad (4)$$

У рівностях (1)-(4) беруть участь: диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + chr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr} \right)$ [2], диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu, \alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha^2)r^{-2}$ та Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [3, 4], а також диференціальні оператори

$$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t};$$

$m, j, k = 1, 2$.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$, $\delta_{11}^0 \geq 0$, $\gamma_{11}^0 \geq 0$; $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $\delta_{jm}^k \geq 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$; $\delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k$, $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$.

Нехай задані та шукані функції є оригіналами Лапласа стосовно t [5]. У зображенні за Лапласом одержуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині \overline{I}_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є та Бесселя для модифікованих функцій

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2 \right) u_1^*(p, r) = -F_1^*(p, r), \quad r \in (R_0, R_1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0 \right) u_1^*(p, r) \Big|_{r=R_0} = \overline{\omega}_0^*(p), \\ \frac{du_3^*}{dr} \Big|_{r=\infty} = 0 \quad (6)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k \right) u_k^*(p, r) - \right. \\ \left. - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k \right) u_{k+1}^*(p, r) \right] \Big|_{r=R_k} = \\ = \overline{\omega}_{jk}^*(p), \quad j, k = 1, 2 \quad (7)$$

У рівностях (5)-(7) прийняті позначення: $q_j^2 = a_j^{-2} (p + \gamma_j^2)$,

$$F_j^*(p, r) = a_j^{-2} \left(f_j^*(p, r) + g_j(r) \right);$$

$$\overline{\alpha}_{11}^0 = \alpha_{11}^0 + p \delta_{11}^0, \quad \overline{\beta}_{11}^0 = \beta_{11}^0 + p \gamma_{11}^0; \\ \overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + p \delta_{jm}^k,$$

$$\overline{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + p \gamma_{jm}^k; \quad \overline{\omega}_0^*(p) = \omega_0^*(p) + \psi_{11}^0, \\ \psi_{11}^0 = \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0), \quad \overline{\omega}_{jk}^*(p) = \omega_{jk}^*(p) + \psi_{jk},$$

$$\psi_{jk} = \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \delta_{j1}^k g_k(R_k) - \\ - \left[\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \delta_{j2}^k g_{k+1}(R_k) \right].$$

Можна вважати, що $\psi_{11}^0 = 0$ і $\psi_{jk} = 0$. Якщо не так, то переходимо до нових початкових даних:

$$\overline{g}_1 = g_1(r) - (a_1 r + b_1), \quad \overline{g}_2(r) = g_2(r) - (a_2 r + b_2), \\ \overline{g}_3(r) = g_3(r) - b_3.$$

Невідомі величини a_1 , a_2 та b_m ($m = \overline{1, 3}$) знаходимо із неоднорідної алгебраїчної системи з п'яти рівнянь:

$$(\delta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 R_0) a_1 + \gamma_{11}^0 b_1 = \psi_{11}^0 \\ q_{j1}^1 a_1 + \gamma_{j1}^1 b_1 - q_{j2}^1 a_2 - \gamma_{j2}^1 b_2 = \psi_{j1}, \quad (8) \\ q_{j1}^2 a_2 + \gamma_{j1}^2 b_2 - \gamma_{j2}^2 b_3 = \psi_{j2}, \quad j = 1, 2$$

Тут прийняті позначення:

$$q_{j1}^1 = \delta_{j1}^1 + \gamma_{j1}^1 R_1, \quad q_{j2}^1 = \delta_{j2}^1 + \gamma_{j2}^1 R_1, \\ q_{j1}^2 = \delta_{j1}^2 + \gamma_{j1}^2 R_2, \quad j = 1, 2.$$

При виконанні умов на коефіцієнти алгебраїчна система (8) сумісна й має єдиний розв'язок.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (5)-(7) методом функцій Коші [4,7]:

$$u_1^*(p, r) = A_1 P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + B_1 L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + \\ + \int_{R_0}^{R_1} E_1^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) sh\rho d\rho, \\ u_2^*(p, r) = A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r + \\ + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) d\rho, \quad (9) \\ u_3^*(p, r) = B_3 K_{\nu, \alpha}(q_3 r) + \\ + \int_{R_2}^{\infty} E_3^*(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) \rho^{2\alpha+1} d\rho.$$

Тут $E_j^*(p, r, \rho)$, $j = \overline{1, 3}$, – функції Коші [4,7]:

$$E_j^*(p, r, \rho) \Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p, r, \rho) \Big|_{r=\rho-0} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dE_j^*(p, r, \rho)}{dr} \Big|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j^*(p, r, \rho)}{dr} \Big|_{r=\rho-0} = \\ = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \quad j = \overline{1, 3},$$

$$(\varphi_1(\rho) = sh\rho, \quad \varphi_2(\rho) = 1, \quad \varphi_3(\rho) = \rho^{2\alpha+1}).$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1^*(p, r, \rho) = \\ = \begin{cases} \bar{E}_1^* \equiv C_1 P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + \\ + D_1 L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr), & R_0 < r < \rho < R_1 \\ \bar{E}_1^* \equiv C_2 P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) + \\ + D_2 L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr), & R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему:

$$(C_2 - C_1) P_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\rho) + (D_2 - D_1) L_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\rho) = 0, \\ (C_2 - C_1) P_{\nu_1}^{(\mu)'}(ch\rho) + (D_2 - D_1) L_{\nu_1}^{(\mu)'}(ch\rho) = \\ = -(sh^2\rho)^{-1}$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -B_{(\mu)}(q_1) L_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\rho), \\ D_2 - D_1 = B_{(\mu)}(q_1) P_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\rho) \quad (11)$$

Доповнимо рівності (11) алгебраїчними рівняннями:

$$\left(\bar{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^0 \right) \bar{E}_1^* \Big|_{r=R_0} = 0 :$$

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),01}(chR_0) C_1 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),02}(chR_0) D_1 = 0 \quad (12)$$

$$\left(\bar{\alpha}_{11}^1 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^1 \right) \bar{E}_1^* \Big|_{r=R_1} = 0 :$$

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(chR_1) C_2 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),12}(chR_1) D_2 = 0.$$

Внаслідок співвідношень (11) алгебраїчна система (12) набуває вигляду:

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),01}(chR_0) C_1 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),02}(chR_0) D_1 = 0 \quad (13)$$

$$Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}(chR_1) C_1 + Z_{\nu_1;11}^{(\mu),12}(chR_1) D_1 =$$

$$B_{(\mu)}(q_1) F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho)$$

Розв'язуємо алгебраїчну систему (13) за правилами Крамера [6]:

$$C_1 = -\frac{B_{(\mu)}(q_1) Z_{\nu_1;11}^{(\mu),02}(chR_0)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)} F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho),$$

$$D_1 = \frac{B_{(\mu)}(q_1) Z_{\nu_1;11}^{(\mu),01}(chR_0)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)} F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho).$$

Цим функція Коші $E_1^*(p, r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1^*(p, r, \rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)} \times$$

$$\times \begin{cases} F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr)F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho), \\ R_0 < r < \rho < R_1 \\ F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, ch\rho)F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, chr), \\ R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases} \quad (14)$$

Тут прийнято позначення:

$$B_{(\mu)}(q_1) = \frac{\pi 2^{\mu_1} \Gamma(1/2 + q_1 - \nu_{12}^+)}{2 2^{\mu_2} \Gamma(1/2 + q_1 + \nu_{12}^+)} \times \\ \times \frac{\Gamma(1/2 + q_1 - \nu_{12}^-)}{\Gamma(1/2 + q_1 + \nu_{12}^-)}, \quad \nu_{12}^\pm = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2),$$

$$Z_{\nu_1;jk}^{(\mu),m1}(chR_m) = \\ = \left(\bar{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{jk}^m \right) P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) \Big|_{r=R_1} \\ Z_{\nu_1;jk}^{(\mu),m2}(chR_m) = \\ = \left(\bar{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{jk}^m \right) L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) \Big|_{r=R_1};$$

$$F_{\nu_1;jk}^{(\mu),m}(chR_m, chr) = Z_{\nu_1;jk}^{(\mu),m1}(chR_m)L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr) - \\ - Z_{\nu_1;jk}^{(\mu),m2}(chR_m)P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr).$$

$$\Delta_{\nu_1;j1}^{(\mu)}(chR_0, chR_1) = \\ = Z_{\nu_1;11}^{(\mu);01}(chR_0)Z_{\nu_1;j1}^{(\mu);12}(chR_1) - \\ - Z_{\nu_1;11}^{(\mu);02}(chR_0)Z_{\nu_1;j1}^{(\mu);11}(chR_1);$$

$j = 1, 2.$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2^*(p, r, \rho) = \begin{cases} \bar{E}_2 \equiv C_1 chq_2 r + D_1 shq_2 r, \\ R_1 < r < \rho < R_2 \\ \bar{E}_2 \equiv C_2 chq_2 r + D_2 shq_2 r, \\ R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1)chq_2\rho + (D_2 - D_1)shq_2\rho = 0 \\ (C_2 - C_1)shq_2\rho + (D_2 - D_1)chq_2\rho = -q_2^{-1}$$

Звідси одержуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = q_2^{-1}shq_2\rho, \quad D_2 - D_1 = -q_2^{-1}chq_2\rho \quad (15)$$

Доповнимо рівності (15) алгебраїчними рівняннями:

$$\left(\alpha_{12}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{12}^1 \right) \bar{E}_2^* \Big|_{r=R_1} = 0 :$$

$$V_{12}^{11}(q_2 R_1)C_1 + V_{12}^{12}(q_2 R_1)D_1 = 0 \quad (16)$$

$$\left(\alpha_{11}^2 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^2 \right) \bar{E}_2^+ \Big|_{r=R_2} = 0 :$$

$$V_{11}^{21}(q_2 R_2)C_2 + V_{11}^{22}(q_2 R_2)D_2 = 0$$

Внаслідок співвідношень (15) алгебраїчна система (16) набуває вигляду:

$$V_{12}^{11}(q_2 R_1)C_1 + V_{12}^{12}(q_2 R_1)D_1 = 0 \quad (17)$$

$$V_{11}^{21}(q_2 R_2)C_1 + V_{11}^{22}(q_2 R_2)D_1 = q_2^{-1}\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho)$$

Розв'язок алгебраїчної системи (17) знаходимо за правилами Крамера [6]

$$C_1 = \frac{-V_{12}^{12}(q_2 R_1)}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho),$$

$$D_1 = \frac{V_{12}^{11}(q_2 R_1)}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho).$$

Цим функція Коші $E_2^*(p, r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_2^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} \times$$

$$\times \begin{cases} \Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 r) \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho), \\ R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 \rho) \Phi_{11}^2(q_2 R_1, q_2 r), \\ R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases} \quad (18)$$

Тут

$$V_{jk}^{m1}(q_2 R_m) = \bar{\alpha}_{jk}^m q_2 shq_2 R_m + \bar{\beta}_{jk}^m chq_2 R_m \equiv$$

$$\equiv \left(\bar{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{jk}^m \right) ch q_2 r \Big|_{r=R_m},$$

$$V_{jk}^{m2}(q_2 R_m) = \bar{\alpha}_{jk}^m q_2 ch q_2 R_m + \bar{\beta}_{jk}^m shq_2 R_m \equiv$$

$$\equiv \left(\bar{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{jk}^m \right) sh q_2 r \Big|_{r=R_m},$$

$$\Phi_{jk}^m(q_2 R_m, q_2 r) = V_{jk}^{m2}(q_2 R_m) ch q_2 r -$$

$$-V_{jk}^{m1}(q_2 R_m) sh q_2 r,$$

$$\Delta_{jk}(q_2 R_1, q_2 R_2) = V_{j2}^{11}(q_2 R_1) V_{k1}^{22}(q_2 R_2) -$$

$$-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2); j, k = 1, 2$$

Нехай функція Коші

$$E_3^*(p, r, \rho) = \begin{cases} \bar{E}_3^* \equiv C_1 I_{\nu, \alpha}(q_3 r) + \\ + D_1 K_{\nu, \alpha}(q_3 r), R_2 < r < \rho < \infty \\ \bar{E}_3^* \equiv D_2 K_{\nu, \alpha}(q_3 r), R_2 < \rho < r < \infty \end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} -C_1 I_{\nu, \alpha}(q_3 \rho) + (D_2 - D_1) K_{\nu, \alpha}(q_3 \rho) &= 0 \\ -C_1 I'_{\nu, \alpha}(q_3 \rho) + (D_2 - D_1) K'_{\nu, \alpha}(q_3 \rho) &= \\ &= -\left(q_3 \rho^{2\alpha+1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_1 = q_3^{2\alpha} K_{\nu, \alpha}(q_3 \rho), \quad D_2 - D_1 = q_3^{2\alpha} I_{\nu, \alpha}(q_3 \rho) \quad (19)$$

Доповнимо рівності (19) алгебраїчним рівнянням:

$$\left(\bar{\alpha}_{12}^2 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{12}^2\right) \bar{E}_3^* \Big|_{r=R_2} = 0 :$$

$$U_{\nu, \alpha; 12}^{21}(q_3 R_2) C_1 + U_{\nu, \alpha; 12}^{22}(q_3 R_2) D_1 = 0 \quad (20)$$

Із алгебраїчної системи (19), (20) знаходимо, що

$$D_2 = -\left(U_{\nu, \alpha; 12}^{22}(q_3 R_2)\right)^{-1} q_3^{2\alpha} \Psi_{\nu, \alpha; 12}^{2*}(q_3 R_2, q_3 \rho).$$

Цим функція Коші $E_3^*(p, r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_3^*(p, r, \rho) = -\frac{q_3^{2\alpha}}{U_{\nu, \alpha; 12}^{22}(q_3 R_2)} \times \begin{cases} \Psi_{\nu, \alpha; 12}^{2*}(q_3 R_2, q_3 r) K_{\nu, \alpha}(q_3 \rho), \\ R_2 < r < \rho < \infty, \\ \Psi_{\nu, \alpha; 12}^{2*}(q_3 R_2, q_3 \rho) K_{\nu, \alpha}(q_3 r), \\ R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases} \quad (21)$$

Тут

$$\begin{aligned} U_{\nu, \alpha; jk}^{m1}(q_2 R_m) &= \left(\bar{\alpha}_{jk}^m \frac{\nu - \alpha}{R_m} + \right. \\ &+ \bar{\beta}_{jk}^m) I_{\nu, \alpha}(q_2 R_m) + \bar{\alpha}_{jk}^m q_2^2 R_m I_{\nu+1, \alpha+1}(q_2 R_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\nu, \alpha; jk}^{m2}(q_2 R_m) &= \left(\bar{\alpha}_{jk}^m \frac{\nu - \alpha}{R_m} + \bar{\beta}_{jk}^m\right) K_{\nu, \alpha}(q_2 R_m) - \\ &- \bar{\alpha}_{jk}^m q_2^2 R_m K_{\nu+1, \alpha+1}(q_2 R_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu, \alpha; jk}^{m*}(q_2 R_m, q_2 r) &= U_{\nu, \alpha; jk}^{m1}(q_2 R_m) K_{\nu, \alpha}(q_2 r) - \\ &- U_{\nu, \alpha; jk}^{m2}(q_2 R_m) I_{\nu, \alpha}(q_2 r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu, \alpha; jk}(q_2 R_1, q_2 R_2) &= U_{\nu, \alpha; j2}^{11}(q_2 R_1) U_{\nu, \alpha; k1}^{22}(q_2 R_2) - \\ &- U_{\nu, \alpha; j2}^{12}(q_2 R_1) U_{\nu, \alpha; k1}^{21}(q_2 R_2). \end{aligned}$$

Крайова умова в точці $r = R_0$ й умови спряження (7) для визначення величин A_j ($j = 1, 2$) та B_k ($k = \overline{1, 3}$) дають неоднорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$Z_{\nu_1; 11}^{(\mu); 01}(ch R_0) A_1 + Z_{\nu_1; 11}^{(\mu); 02}(ch R_0) B_1 = \bar{\omega}_0^*(p)$$

$$Z_{\nu_1; j1}^{(\mu); 11}(ch R_1) A_1 + Z_{\nu_1; j1}^{(\mu); 12}(ch R_1) B_1 -$$

$$-V_{j2}^{11}(q_2 R_1) A_2 - V_{j2}^{12}(q_2 R_1) B_2 = \bar{\omega}_{j1}^* + \delta_{j2} G_{12}^*,$$

$$\begin{aligned} V_{j1}^{21}(q_2 R_2) A_2 + V_{j1}^{22}(q_2 R_2) B_2 - U_{\nu, \alpha; j2}^{22}(q_3 R_2) B_3 &= \\ = \bar{\omega}_{j2}^* + \delta_{j2} G_{23}^*, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (22)$$

В алгебраїчній системі (22) беруть участь функції

$$G_{12}^* = \frac{c_{11}^*}{sh R_1} \int_{R_0}^{R_1} \frac{F_{\nu_1; 11}^{(\mu); 0}(ch R_0, ch \rho)}{\Delta_{\nu_1; 11}^{(\mu)}(ch R_0, ch R_1)} F_1^*(p, \rho) \times$$

$$\times sh \rho d\rho + c_{21}^* \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2 \rho)}{\Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} F_2^*(p, \rho) d\rho,$$

$$G_{23}^* = -c_{12}^* \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{12}^1(q_2 R_1, q_2 \rho)}{\Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)} F_2^*(p, \rho) d\rho +$$

$$+ \frac{c_{22}^*}{R_2^{2\alpha+1}} \int_{R_2}^{\infty} \frac{K_{\nu, \alpha}(q_3 \rho)}{U_{\nu, \alpha; 12}^{22}(q_3 R_2)} F_3^*(p, \rho) \rho^{2\alpha+1} d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} .

Введемо до розгляду функції:

$$A_{(\mu); j}(p) = \Delta_{\nu_1; 11}^{(\mu)}(ch R_0, ch R_1) \Delta_{2j}(q_2 R_1, q_2 R_2) -$$

$$- \Delta_{\nu_1; 21}^{(\mu)}(ch R_0, ch R_1) \Delta_{1j}(q_2 R_1, q_2 R_2),$$

$$B_{\nu, \alpha; j}(p) = U_{\nu, \alpha; 22}^{22}(q_3 R_2) \Delta_{j1}(q_2 R_1, q_2 R_2) -$$

$$- U_{\nu, \alpha; 12}^{22}(q_3 R_2) \Delta_{j2}(q_2 R_1, q_2 R_2), j = 1, 2$$

$$\begin{aligned} \Theta_{(\mu);1}(p, r) &= \Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)\Phi_{22}^1(q_2R_1, q_2r) - \\ &\quad - \Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)\Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2r), \\ \Theta_{\nu,\alpha;2}(p, r) &= U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)\Phi_{21}^2(q_3R_2, q_3r) - \\ &\quad - U_{\nu,\alpha;22}^{22}(q_3R_2)\Phi_{11}^2(q_3R_2, q_3r). \end{aligned}$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (5)-(7): для $p = \sigma + is$ із $Re p = \sigma > \sigma_0$, де σ_0 - абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $Im p = s \in (-\infty, +\infty)$ визначник алгебраїчної системи (22) відмінний від нуля

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p) &= A_{(\mu);1}(p)U_{\nu,\alpha;22}^{22}(q_3R_2) - \\ &\quad - A_{(\mu);2}(p)U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2) = \\ &= \Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)B_{\nu,\alpha;2}(p) - \\ &\quad - \Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)B_{\nu,\alpha;1}(p) \neq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (5)-(7):

1) породжені неоднорідністю крайової умови в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$\begin{aligned} W_{\nu,\alpha;11}^{(\mu)*}(p, r) &= \frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \left[B_{\nu,\alpha;1}(p) \times \right. \\ &\quad \left. \times F_{\nu_1;21}^{(\mu),1}(chR_1, chr) - B_{\nu,\alpha;2}(p)F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, chr) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} W_{\nu,\alpha;12}^{(\mu)*}(p, r) &= -\frac{c_{11}^*}{B_{(\mu)}(q_1)shR_1} \frac{\Theta_{\nu,\alpha;2}(p, r)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}, \\ W_{\nu,\alpha;13}^{(\mu)*}(p, r) &= -\frac{c_{11}^*c_{12}^*q_2}{B_{(\mu)}(q_1)shR_1} \frac{K_{\nu,\alpha}(q_3r)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}; \end{aligned}$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\begin{aligned} R_{\nu,\alpha;11}^{(\mu);1*}(p, r) &= \frac{B_{\nu,\alpha;2}}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr), \\ R_{\nu,\alpha;21}^{(\mu);1*}(p, r) &= -\frac{B_{\nu,\alpha;1}}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr), \\ R_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);1*}(p, r) &= -\frac{c_{21}^*q_2}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} U_{\nu,\alpha;22}^{22}(q_3R_2) \times \\ &\quad \times F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr), \quad (25) \\ R_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);1*}(p, r) &= \frac{c_{21}^*q_2}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2) \times \end{aligned}$$

$$\times F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr),$$

$$R_{\nu,\alpha;11}^{(\mu);2*}(p, r) = -\frac{\Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)}}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \Theta_{\nu,\alpha;2}(p, r),$$

$$R_{\nu,\alpha;21}^{(\mu);2*}(p, r) = \frac{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \Theta_{\nu,\alpha;2}(p, r),$$

$$R_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);2*}(p, r) = -\frac{U_{\nu,\alpha;22}^{22}(q_3R_2)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu);1}(p, r),$$

$$R_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);2*}(p, r) = \frac{U_{\nu,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu);1}(p, r),$$

$$R_{\nu,\alpha;11}^{(\mu);3*}(p, r) = -\frac{c_{12}^*q_2}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \Delta_{\nu_1;21}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)K_{\nu,\alpha}(q_3r),$$

$$R_{\nu,\alpha;21}^{(\mu);3*}(p, r) = \frac{c_{12}^*q_2}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(chR_0, chR_1)K_{\nu,\alpha}(q_3r),$$

$$R_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);3*}(p, r) = \frac{A_{(\mu);2}(p)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} K_{\nu,\alpha}(q_3r),$$

$$R_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);3*}(p, r) = -\frac{A_{(\mu);1}(p)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} K_{\nu,\alpha}(q_3r);$$

3) породжені неоднорідністю системи (5) функції впливу:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;11}^{(\mu)*}(p, r, \rho) &= -B_{(\mu)}(q_1) \times \\ &\times \begin{cases} F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr)W_{\nu,\alpha;11}^{(\mu)*}(p, \rho), \\ R_0 < r < \rho < R_1 \\ F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, ch\rho)W_{\nu,\alpha;11}^{(\mu)*}(p, r), \\ R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;12}^{(\mu)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{21}^*}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr) \times \\ &\quad \times \Theta_{\nu,\alpha;2}(p, \rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;13}^{(\mu)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{21}^*q_2c_{22}^*}{R_2^{2\alpha+1}\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \times \\ &\quad \times F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, chr)K_{\nu,\alpha}(q_3\rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;21}^{(\mu)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{11}^*}{shR_1} \frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \times \\ &\quad \times F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, ch\rho)\Theta_{\nu,\alpha;2}(p, r), \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{\nu,\alpha;22}^{(\mu)*}(p, r, \rho) = \frac{1}{q_2\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \times$$

Повертаючись до оригіналу, маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1)-(4):

$$\begin{aligned} & \times \begin{cases} \Theta_{(\mu);1}(p, r)\Theta_{\nu,\alpha;2}(p, \rho), & R_1 < r < \rho < R_2 \\ \Theta_{(\mu);1}(p, \rho)\Theta_{\nu,\alpha;2}(p, r), & R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases} \\ \mathcal{H}_{\nu,\alpha;23}^{(\mu)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{22}^*}{R_2^{2\alpha+1}} \frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu);1}(p, r) \times \\ & \times K_{\nu,\alpha}(q_3\rho), \quad (26) \\ \mathcal{H}_{\nu,\alpha;31}^{(\mu)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{11}^*c_{12}^*q_2}{shR_1\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \times \\ & \times F_{\nu_1;11}^{(\mu),0}(chR_0, ch\rho)K_{\nu,\alpha}(q_3r), \\ \mathcal{H}_{\nu,\alpha;32}^{(\mu)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{12}^*}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu);1}(p, \rho)K_{\nu,\alpha}(q_3r), \\ \mathcal{H}_{\nu,\alpha;33}^{(\mu)*}(p, r, \rho) &= \frac{q_3^{2\alpha}}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)} \times \\ & \times \begin{cases} K_{\nu,\alpha}(q_3\rho) \left[A_{(\mu);2}(p)\Psi_{\nu,\alpha;12}^{2*}(q_3R_2, q_3r) - \right. \\ K_{\nu,\alpha}(q_3r) \left[A_{(\mu);2}(p)\Psi_{\nu,\alpha;12}^{2*}(q_3R_2, q_3\rho) - \right. \\ \left. - A_{(\mu);1}(p)\Psi_{\nu,\alpha;22}^{2*}(q_3R_2, q_3r) \right], \\ R_2 < r < \rho < \infty \\ \left. - A_{(\mu);1}(p)\Psi_{\nu,\alpha;22}^{2*}(q_3R_2, q_3\rho) \right], \\ R_2 < \rho < r < \infty \end{cases} \\ & \times \left[f_1(\tau, \rho) + \delta_+(\tau)g_1(\rho) \right] sh\rho d\rho d\tau a_1^{-2} + \\ & + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;j2}^{(\mu)}(t - \tau, r, \rho) \left[f_2(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) \times \right. \\ & \times g_2(\rho) \left. \right] a_2^{-2} d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;j3}^{(\mu)}(t - \tau, r, \rho) \times \\ & \times \left[f_3(\tau, \rho) + \delta_+(\tau)g_3(\rho) \right] a_3^{-2} \rho^{2\alpha+1} d\rho d\tau, \quad (28) \\ & j = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (22) й підстановки одержаних значень A_j та B_k у формули (9) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (5)-(7):

$$\begin{aligned} u_j^*(p, r) &= W_{\nu,\alpha;1j}^{(\mu)*}(p, r)\bar{\omega}_0^*(p) + \\ & + \sum_{m,k=1}^2 R_{\nu,\alpha;mk}^{(\mu);j*}(p, r)\bar{\omega}_{mk}^*(p) + \\ & + \int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;j1}^{(\mu)*}(p, r, \rho)F_1^*(p, \rho)sh\rho d\rho + \\ & + \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;j2}^{(\mu)*}(p, r, \rho)F_2^*(\rho)d\rho + \\ & + \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;j3}^{(\mu)*}(p, r, \rho)F_3^*(p, \rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho, \quad j = \overline{1, 3} \quad (27) \\ & \text{У рівностях (28) за означенням [5]} \\ W_{\nu,\alpha;1j}^{(\mu)}(t, r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} W_{\nu,\alpha;1j}^{(\mu)*}(p, r)e^{pt}dp; \\ & j = \overline{1, 3} \quad (29) \\ R_{\nu,\alpha;mk}^{(\mu);j}(t, r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} R_{\nu,\alpha;mk}^{(\mu);j*}(p, r)e^{pt}dp; \\ & m, k = 1, 2; j = \overline{1, 3} \quad (30) \\ \mathcal{H}_{\nu,\alpha;jk}^{(\mu)}(t, r, \rho) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;jk}^{(\mu)*}(p, r, \rho)e^{pt}dp; \\ & j, k = \overline{1, 3} \quad (31) \end{aligned}$$

Теорема. Якщо $f_j(t, r)$, $j = \overline{1, 3}$, $\omega_{ik}(t)$, $i, k = 1, 2$, $g_0(t)$, $w_0(t)$ є оригіналами за Лапласом, $f_j(t, r)$, $g_j(r)$, $j = \overline{1, 3}$, – двічі неперервно диференційовні за змінною r та задовольняють однорідні умови спряження, то задача (1) – (4) має розв’язок $u_j(t, r)$, що визначається формулою (28), а при виконанні умови однозначної розв’язності алгебраїчної системи (19) він єдиний.

Особливими точками функцій $W_{\nu, \alpha; 1j}^{(\mu)*}(p, r)$, $R_{\nu, \alpha; mk}^{(\mu); j*}(p, r)$ та $\mathcal{H}_{\nu, \alpha; jk}^{(\mu)*}(p, r, \rho)$ є точки галуження $p = -\gamma_j^2$ ($j = \overline{1, 3}$) й точка $p = \infty$. Якщо знову покласти $q_j = ib_j \equiv ia_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, при $\gamma^2 = \max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\}$ знаходимо, що $p = -(\beta^2 + \gamma^2) \equiv (\beta^2 + \gamma^2) \exp(\pi i)$, $dp = -2\beta d\beta$.

Використовуючи метод контурного інтеграла, лему Жордана й теорему Коші, приходимо до розрахункових формул:

$$W_{\nu, \alpha; 1j}^{(\mu)}(t, r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left\{ W_{\nu, \alpha; 1j}^{(\mu)*}(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2), r) \right\} \times e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \beta d\beta, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (32)$$

$$R_{\nu, \alpha; mk}^{(\mu); j}(t, r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left\{ R_{\nu, \alpha; mk}^{(\mu); j*}(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2), r) \right\} \times e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \beta d\beta; \quad m, k = 1, 2; \quad j = \overline{1, 3}, \quad (33)$$

$$\mathcal{H}_{\nu, \alpha; jk}^{(\mu)}(t, r, \rho) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left\{ \mathcal{H}_{\nu, \alpha; jk}^{(\mu)*}(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2), r, \rho) \right\} \times e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \beta d\beta; \quad j, k = \overline{1, 3}. \quad (34)$$

Тут $\text{Im}(\dots)$ означає уявну частину виразу (\dots) .

Визначимо величини та функції:

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1} c_{11,2} R_2^{2\alpha+1}}{c_{21,1} c_{21,2} sh R_1}, \quad a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2} R_2^{2\alpha+1}}{c_{21,2}},$$

$$a_3^2 \sigma_3 = 1; \quad d_1 = a_1^2 \sigma_1 sh R_1 : c_{11,1},$$

$$d_2 = a_2^2 \sigma_2 : c_{11,2}, \quad \delta_{\nu_1^*; j1}^{(\mu)}(ch R_0, ch R_1) = Y_{\nu_1^*; 11}^{(\mu), 01}(ch R_0) Y_{\nu_1^*; j1}^{(\mu), 12}(ch R_1) - Y_{\nu_1^*; 11}^{(\mu), 02}(ch R_0) \times Y_{\nu_1^*; j1}^{(\mu), 11}(ch R_1); \quad Y_{\nu_1^*; jk}^{(\mu), m1}(ch R_m) = \left(\tilde{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{jk}^m \right) A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr) \Big|_{r=R_m},$$

$$Y_{\nu_1^*; jk}^{(\mu), m2}(ch R_m) = \left(\tilde{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{jk}^m \right) B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr) \Big|_{r=R_m};$$

$$\nu_1^* = -1/2 + ib_1;$$

$$\tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - \delta_{jk}^m (\beta^2 + \gamma^2), \quad \tilde{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m - \gamma_{jk}^m (\beta^2 + \gamma^2);$$

$$f_{\nu_1^*; 11}^{(\mu), 0}(ch R_0, chr) = Y_{\nu_1^*; 11}^{(\mu), 01}(ch R_0) B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr) - Y_{\nu_1^*; 11}^{(\mu), 02}(ch R_0) A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr);$$

$$V_{\nu, \alpha; 1}(r, \beta) = \frac{2c_{21,2}}{\pi b_3^{2\alpha} R_2^{2\alpha+1}} c_{21,1} b_2 f_{\nu_1^*; 11}^{(\mu), 0}(ch R_0, chr),$$

$$\Omega_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\beta) = \frac{\beta b_3^{2\alpha}}{\left[\omega_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(\beta) \right]^2 + \left[\omega_{\nu, \alpha; 2}^{(\mu)}(\beta) \right]^2};$$

$$V_{\nu, \alpha; 2}(r, \beta) = \frac{2c_{21,2}}{\pi b_3^{2\alpha} R_2^{2\alpha+1}} \left[\delta_{\nu_1^*; 11}^{(\mu)}(ch R_0, ch R_1) \times \varphi_{22}^1(b_2 R_1, b_2 r) - \delta_{\nu_1^*; 21}^{(\mu)}(ch R_0, ch R_1) \times \varphi_{12}^1(b_2 R_1, b_2 r) \right], \quad \varphi_{j2}^1(b_2 R_1, b_2 r) = v_{j2}^{12}(b_2 R_1) \cos b_2 r - v_{j2}^{11}(b_2 R_1) \sin b_2 r;$$

$$V_{\nu, \alpha; 3}(r, \beta) = \omega_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(\beta) N_{\nu, \alpha}(b_3 r) - \omega_{\nu, \alpha; 2}^{(\mu)}(\beta) J_{\nu, \alpha}(b_3 r);$$

$$a_{(\mu); j}(\beta) = \delta_{\nu_1^*; 11}^{(\mu)}(ch R_0, ch R_1) \delta_{2j}(b_2 R_1, b_2 R_2) - \delta_{\nu_1^*; 21}^{(\mu)}(ch R_0, ch R_1) \delta_{1j}(b_2 R_1, b_2 R_2),$$

$$\omega_{\nu, \alpha; j}^{(\mu)}(\beta) = a_{(\mu); 1}(\beta) u_{\nu, \alpha; 22}^{2j}(b_3 R_2) - a_{(\mu); 2}(\beta) u_{\nu, \alpha; 12}^{2j}(b_3 R_2); \quad j = 1, 2;$$

$$Z_{\nu, \alpha; j2}^{(\mu), k}(\beta) = \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k \right) V_{\nu, \alpha; k+1}^{(\mu)}(r, \beta) \Big|_{r=R_k};$$

$j, k = 1, 2$. Всі інші функції відомі [2, 8].

У результаті виконання зазначених в рівностях (32)-(34) операцій одержуємо функції:

$$W_{\nu, \alpha; 1j}^{(\mu)}(t, r) = \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \left[(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} \times \right.$$

$$\times (a_1^2 \sigma_1 sh R_0) V_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(R_0, \beta) \Big] \times \\ \times V_{\nu, \alpha; j}^{(\mu)}(r, \beta) \Omega_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\beta) d\beta, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (35)$$

$$R_{\nu, \alpha; mk}^{(\mu); j}(t, r) = \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} Z_{\nu, \alpha; m2}^{(\mu); k}(\beta) \times \\ \times V_{\nu, \alpha; j}^{(\mu)}(r, \beta) \Omega_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\beta) d\beta \cdot d_k; \quad (36)$$

$m, k = 1, 2; j = \overline{1, 3};$

$$\mathcal{H}_{\nu, \alpha; jk}^{(\mu)}(t, r, \rho) = \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} V_{\nu, \alpha; j}^{(\mu)}(r, \beta) \times \\ \times V_{\nu, \alpha; k}^{(\mu)}(\rho, \beta) \Omega_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\beta) d\beta \sigma_k a_k^2; \quad j, k = \overline{1, 3}. \quad (37)$$

Якщо прийняти до уваги, що

$$(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} (a_1^2 \sigma_1 sh R_0) V_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(R_0, \beta) = \\ = \frac{2b_2 c_{11,1} c_{11,2}}{\pi b_3^{2\alpha} S_{(\mu)}(b_1) sh R_1} \equiv \eta_\alpha^{(\mu)}(\beta),$$

то формула (35) набуде вигляду:

$$W_{\nu, \alpha; 1j}^{(\mu)}(t, r) = \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} V_{\nu, \alpha; j}^{(\mu)}(r, \beta) \times \\ \times \Omega_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\beta) \eta_\alpha^{(\mu)}(\beta) d\beta, \quad j = \overline{1, 3} \quad (38)$$

Введемо до розгляду функції:

$$D_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(\tau, \beta) = \int_{R_0}^{R_1} f_1(\tau, \rho) V_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(\rho, \beta) \sigma_1 sh \rho d\rho + \\ + \int_{R_1}^{R_2} f_2(\tau, \rho) V_{\nu, \alpha; 2}^{(\mu)}(\rho, \beta) \sigma_2 d\rho + \\ + \int_{R_2}^\infty f_3(\tau, \rho) V_{\nu, \alpha; 3}^{(\mu)}(\rho, \beta) \sigma_3 \rho^{2\alpha+1} d\rho;$$

$$D_{\nu, \alpha; 2}^{(\mu)}(\beta) = \int_{R_0}^{R_1} g_1(\rho) V_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(\rho, \beta) \sigma_1 sh \rho d\rho + \\ + \int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho) V_{\nu, \alpha; 2}^{(\mu)}(\rho, \beta) \sigma_2 d\rho +$$

$$+ \int_{R_2}^\infty g_3(\rho) V_{\nu, \alpha; 3}^{(\mu)}(\rho, \beta) \sigma_3 \rho^{2\alpha+1} d\rho.$$

Інтегральне зображення (28) аналітичного розв'язку параболічної задачі (1)-(4) буде мати структуру:

$$u_j(t, r) = \int_0^t W_{\nu, \alpha; 1j}^{(\mu)}(t - \tau, r) \left[\omega_0(\tau) + \right. \\ \left. + \delta_+(\tau) \psi_{11}^0 \right] d\tau + \sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[R_{\nu, \alpha; 1k}^{(\mu); j}(t - \tau, r) \left(\omega_{2k}(\tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_+(\tau) \psi_{2k} \right) - R_{\nu, \alpha; 2k}^{(\mu); j}(t - \tau, r) \left(\omega_{1k}(\tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_+(\tau) \psi_{1k} \right) \right] d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)(t - \tau)} D_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(\tau, \beta) V_{\nu, \alpha; j}^{(\mu)}(r, \beta) \times \\ \times \Omega_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\beta) d\beta d\tau + \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} D_{\nu, \alpha; 2}^{(\mu)}(\beta) \times \\ \times V_{\nu, \alpha; j}^{(\mu)}(r, \beta) \Omega_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\beta) d\beta; \quad j = \overline{1, 3} \quad (39)$$

Тут $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau = 0+$ [7].

Якщо початкові умови нульові (практично це завжди так), то розв'язком параболічної задачі (1)-(4) є функції

$$u_j(t, r) = \int_0^t W_{\nu, \alpha; 1j}^{(\mu)}(t - \tau, r) \omega_0(\tau) d\tau + \\ + \sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[R_{\nu, \alpha; 1k}^{(\mu); j}(t - \tau, r) \omega_{2k}(\tau) - \right. \\ \left. - R_{\nu, \alpha; 2k}^{(\mu); j}(t - \tau, r) \omega_{1k}(\tau) \right] d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)(t - \tau)} D_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(\tau, \beta) V_{\nu, \alpha; j}^{(\mu)}(r, \beta) \times \\ \times \Omega_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\beta) d\beta, \quad j = \overline{1, 3} \quad (40)$$

Якщо початкові умови підібрані так, що $\psi_{11}^0 = 0, \psi_{mk} = 0$, то в функції $u_j(t, r)$ мають

структуру (39) при $\psi_{11}^0 = 0$, $\psi_{2k} = 0$ та $\psi_{1k} = 0$.

Набір функцій $\omega_0(t)$, $f_j(t, r)$, $g_j(r)$ та $\omega_{jk}(t)$ дозволяє варіювати процесом теплопровідності в даному середовищі.

Розв'язок даної задачі $u(t, r) = \{u_1(t, r); u_2(t, r); u_3(t, r)\}$ поліпараметричний та має замкнутий алгоритмічний характер. Це дає змогу використовувати його як в числових розрахунках, так і в теоретичних дослідженнях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 735с.
2. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. - Чернівці: Прут, 2002. - 248с.
3. *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 62с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз. 1959. - 468с.
5. *Лаверентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1987. - 688с.
6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1971. - 432с.
7. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.
8. *Ленюк М.П.* Обчислення поліпараметричних невластних інтегралів за власними елементами гібридних диференціальних операторів другого порядку. - Том VI. - Чернівці: Прут, 2010. - 404с.
9. *Ленюк М.П., Мороз В.В.* Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження // Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314-315. Математика. - Чернівці: Рута, 2006. - С. 105-113.