УДК 517.928

©2014 р. М.Б. Віра

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Досліджується можливість побудови асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідних у випадку, коли гранична в'язка матриць має кратне нульове власне значення, якому відповідає елементарний дільник тієї ж кратності. Знаходяться умови існування єдиного розв'язку цієї крайової задачі і побудована його асимптотика у вигляді розвинень за дробовими степенями малого параметра. В ході дослідження використовуються результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями.

We study the possibility of the construction of an asymptotic solution of a two-point boundary-value problem for a linear singularly perturbed system of differential equations with identically degenerated matrix at the derivatives in the case where boundary bundle of matrixes has a multiple eigenvalue which is totally equal to zero. Moreover, this multiple eigenvalue corresponds to an elementary divisor of the same multiplicity. We obtain conditions of the existence and uniqueness of the solution of this boundary-value problem and its asymptotics is constructed in the form of a power series with fractional degrees of a small parameter. For this purpose, we use the results of the asymptotic analysis of a general solution for the degenerated singular perturbed linear systems of differential equations.

Розглянемо двоточкову крайову задачу

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(T,\varepsilon) = d(\varepsilon), \qquad (2)$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $t \in [0;T]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $A(t,\varepsilon), B(t)$ — квадратні матриці n-го порядку; M, N — $(n-1)\times n$-вимірні матриці зі сталими елементами; $f(t,\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — задані n- і $(n-1)$-вимірні вектори відповідно.

Нехай виконуються такі умови:

1° матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t);$$

2° коефіцієнти розвинень $A_k(t), f_k(t)$ і матриця $B(t)$ нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$;

3° гранична в'язка матриць

$$L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B(t)$$

регулярна при всіх $t \in [0;T]$ і зберігає на цьому відрізку сталу кронекерову структуру, тобто кратності всіх власних значень граничної в'язки і відповідних скінченних та нескінченних елементарних дільників є сталими на даному відрізку;

4° вектор $d(\varepsilon)$ зображається у вигляді асимптотичного розвинення $d(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k$, при $\varepsilon \to 0$;

5° $\det B(t) = 0, \forall t \in [0;T]$;

6° $\det A_0(t) = 0, \forall t \in [0;T]$.

Будемо припускати, що в'язка матриць $L(t,\lambda)$ має нульове власне значення кратності $n-1$, якому відповідає скінченний елементарний дільник тієї ж кратності. Крім того, будемо передбачати, що дана в'язка матриць має простий нескінченний елементарний дільник. Як показано в [1,2], з цієї умови випливає, що нульовому власному значенню граничної в'язки відповідає жорданів ланцюжок векторів матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$ завдовжки $n-1$, вектори якого визначаються формулами:

$$\varphi_i = [H(t)B(t)]^{i-1}\varphi(t), i = \overline{1, n-1},$$

$H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0(t)$, а $\varphi(t)$ — власний вектор в'язки. Нульовому ж власному значенню матриці $B(t)$ відповідає лише власний вектор, який позначимо $\widetilde{\varphi}(t)$, а приєднані вектори відносно $A_0(t)$ відсутні.

Позначимо $\psi(t)$ і $\widetilde{\psi}(t)$ — нулі матриць $A_0^*(t)$ та $B^*(t)$ відповідно і визначимо їх так, щоб виконувалися співвідношення

$$(B(HB)^{i-1}\varphi, \psi) = \delta_{i,n-1}, \, i = \overline{1, n-1},$$

$$(A_0\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = 1, \tag{3}$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера [1].

Крайова задача (1), (2) у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць розглядалась у роботах [2,3] за умови, коли гранична в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ має кратне власне значення відмінне від нуля. У статті [4] розглянуто крайову задачу (1), (2) у так званому критичному випадку, коли в'язка $L(t, \lambda)$ має простий спектр, але одне із власних значень нульове. Але, як виявилося, ті підходи, що використовувалися в зазначених роботах для побудови асимптотики розв'язку даної крайової задачі, не дають можливості побудувати розв'язок у випадку, коли гранична в'язка має кратне нульове власне значення, якому відповідає кратний елементарний дільник. У цій статті пропонується інший підхід для вирішення зазначеної проблеми.

Асимптотика розв'язку лінійної однорідної системи

Згідно з теорією асимптотичного інтегрування вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь, розробленою в [1], у даному випадку однорідна система

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \tag{4}$$

має $n-1$ лінійно незалежних розв'язків, що відповідають скінченному елементарному дільнику, асимптотику яких можна побудувати у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda(\tau, \varepsilon)d\tau\right), \tag{5}$$

де $u(t, \varepsilon)$ — n-вимірна вектор-функція, $\lambda(t, \varepsilon)$ — скалярна вектор-функція, що зображаються розвиненнями за дробовими степенями малого параметра. При цьому, як показано в [1], функція $\lambda(t, \varepsilon)$ має задовольняти рівняння розгалуження

$$\lambda^{n-1} + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k] = 0, \tag{6}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^j(P_j^s(H\Gamma)\varphi, \psi), s = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

$$L_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}(-1)^j D^i[\lambda^k]\times$$

$$\times(P_{i+k,j}^{s-i}(HB, H\Gamma)\varphi, \psi), k, s = 1, 2, \ldots.$$

Відповідний вектор $u(t, \varepsilon)$ зображається у вигляді

$$u(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k]\varphi, \tag{8}$$

де

$$\widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^j P_j^s(H\Gamma), s = 1, 2, \ldots,$$

$$\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}(-1)^j D^i[\lambda^k]\times$$

$$\times P_{i+k,j}^{s-i}(HB, H\Gamma), k = 1, 2, \ldots, s = 0, 1, \ldots.$$

Символом $P_{s,k}^m(HB, H\Gamma)$ тут позначено суму всеможливих "добутків"s множників матриць HB і k операторів $H\Gamma_{j_1}, H\Gamma_{j_2}, \ldots, H\Gamma_{j_k}$ з натуральними індексами, сума яких $j_1 + j_2 + j_k = m$, де

$\Gamma_k = A_k(t) - \delta_{k,1}B(t)\frac{d}{dt}, k = 1, 2, \ldots$. При цьому перший множник H у всіх доданках цього виразу "відбирається". Символом $D^i[\lambda^k]$ позначається диференціальний вираз, що являє собою суму всеможливих добутків k "множників"λ та i "множників"$D = \frac{d}{dt}$. При цьому оператор D діє на весь вираз, який міститься праворуч від нього, наприклад,

$$D^2[\lambda^2] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2\lambda = 3(\lambda')^2 + 4\lambda\lambda''.$$

Доведено, що за відсутності точок повороту рівняння розгалуження (6) завжди має $n-1$ розв'язків $\lambda_i(t, \varepsilon)$, які можна знайти у вигляді формальних розвинень за дробовими степенями малого параметра, показники яких залежать від поведінки коефіцієнтів $L_{ks}[\lambda^k]$ і визначаються за допомогою діаграм Ньютона.

Як і в роботі [3] припустимо, що виконується умова

7°

$$L_{01} = -(\Gamma_1\varphi, \psi) = -(A_1\varphi, \psi) + (B\varphi', \psi) \neq 0, \quad \forall t \in [0; T].$$

Тоді відповідні розвинення для функцій $\lambda_i(t, \varepsilon)$ можна побудувати за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$:

$$\lambda_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(j)}(t), \ j = \overline{1, n-1}, \tag{9}$$

перший коефіцієнт якого задовольняє визначальне рівняння

$$(\lambda_1^{(j)}(t))^{n-1} + L_{01} = 0, \tag{10}$$

з якого дістанемо

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[n-1]{|(\Gamma_1\varphi, \psi)|} \times \times \exp\left(i\frac{arg(\Gamma_1\varphi, \psi) + 2\pi(j-1)}{n-1}\right), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Підставивши ряд (9) у рівняння розгалуження (6), дістанемо

$$\sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k P_{n-1}^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k L_{0,\frac{k}{n-1}} + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n-1}]} \sum_{j=1}^{k-s(n-1)} \mu^k L_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(i)})] = 0, \tag{11}$$

де $L_{0,\frac{k}{n-1}} = 0$, якщо число k не ділиться на $n-1$. Прирівнявши в (11) вирази при однакових степенях μ, отримаємо нескінченну систему рівнянь

$$P_{n-1}^k(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k}{n-1}} + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n-1}]} \sum_{j=1}^{k-s(n-1)} L_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(i)})] = 0, \quad k = n-1, n, \ldots. \tag{12}$$

Перше рівняння цієї системи (при $k = n-1$) збігається із визначальним рівнянням (10). Поклавши в ньому $n + k - 1$ замість k і взявши до уваги, що

$$P_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)}) = (n-1)(\lambda_1^{(i)})^n \lambda_{k+1}^{(i)} + \widetilde{P}_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)}),$$

де $\widetilde{P}_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)})$ — та частина виразу $P_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)})$, яка містить тільки ті $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких $j < k+1$, а третій доданок у (12) не містить $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких перевищують k, матимемо таку рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів розвинення (9):

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{(n-1)(\lambda_1^{(i)})^n}(\widetilde{P}_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{n+k-1}{n-1}} + \sum_{s=1}^{[\frac{n+k-2}{n-1}]} \sum_{j=1}^{n+k-s(n-1)-1} L_{js}[P_j^{n+k-s(n-1)-1}(\lambda^{(i)})]). \tag{13}$$

Щоб одержати відповідні розвинення для векторів $u_i(t, \varepsilon)$, підставимо (9) у (6). Перегрупувавши доданки, дістанемо розвинення

$$u_i(t, \varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k^{(i)}(t), \ i = \overline{1, n-1},$$

коефіцієнти яких визначаються формулами

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{[\frac{k-1}{n-1}]} \sum_{j=1}^{k-s(n-1)} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(i)})]\varphi +$$

$$+H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{n-1}}\varphi, k=1,2,\ldots, i=\overline{1,n-1}. \quad (14)$$

Побудова частинного розв'язку неоднорідної системи

Частинний розв'язок неоднорідної системи (1) побудуємо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=v(t,\varepsilon), \quad (15)$$

де $v(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, який зображається формальним розвиненням

$$v(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t). \quad (16)$$

Для визначення коефіцієнтів $v_k(t)$ підставимо (16) у систему (1) і прирівняємо вирази при однакових степенях малого параметра. Дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{i=0}^{k}B_i v'_{k-1-i}=\sum_{i=0}^{k}A_i v_{k-i}+f_{k-1}, k=0,1,\ldots. \quad (17)$$

При $k=0$ маємо

$$A_0(t)v_0(t)=0,$$

звідки

$$v_0(t)=\beta_0(t)\varphi(t), \quad (18)$$

де $\beta_0(t)$ — деяка достатньо гладка функція, яка підлягає визначенню.

На наступному кроці рівняння (17) запишеться у вигляді

$$A_0(t)v_1(t)=\Gamma_1 v_0(t)-f_0(t). \quad (19)$$

Для його сумісності необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$(\Gamma_1 v_0(t)-f_0(t),\psi(t))=0,$$

яку, враховуючи (18), запишемо у вигляді

$$(\Gamma_1\varphi(t),\psi(t))\beta_0(t)-(f_0(t),\psi(t))=0. \quad (20)$$

Розв'язавши одержане рівняння, дістанемо функцію $\beta_0(t)$.

У свою чергу з рівняння (19) знайдемо:

$$v_1(t)=H\Gamma_1(\beta_0(t)\varphi(t))-Hf_0(t)+\beta_1(t)\varphi(t),$$

де $\beta_1(t)$ — поки що невідома функція, яка визначається на наступному кроці.

Використавши умову сумісності рівняння (17) на k-у кроці, дістанемо рівняння для визначення $\beta_{k-1}(t)$:

$$(\Gamma_1\varphi,\psi)\beta_{k-1}(t)+ \\ +\left(\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-j}\widetilde{P}_l^{k-j}(H\Gamma)(\beta_j\varphi)- \right. \\ \left. -\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-1-j}\widetilde{P}_l^{k-1-j}(H\Gamma)Hf_j-f_{k-1},\psi\right)=0. \quad (21)$$

У свою чергу вектор $v_k(t)$ визначимо за формулою

$$v_k(t)=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-j}P_l^{k-j}(H\Gamma)(\beta_j\varphi)- \\ -\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-1-j}P_l^{k-1-j}(H\Gamma)Hf_j- \\ -Hf_{k-1}+\beta_k(t)\varphi(t). \quad (22)$$

Побудова формального розв'язку крайової задачі

Перейдемо тепер до побудови розв'язку крайової задачі (1), (2). Припустимо, що виконується умова

8°

$$Re\lambda_1^{(i)}(t)<0, i=\overline{1,l},$$

$$Re\lambda_1^{(j)}>0, j=\overline{l+1,n-1}.$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) будуємо у вигляді суми лінійної комбінації розв'язків однорідної системи і частинного розв'язку неоднорідної системи:

$$x(t,\varepsilon)=\mu^{-(2n-3)}\sum_{i=1}^{l}u_i(t,\mu)c_i(\varepsilon)\times$$

$$\times \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_i(\tau,\mu)d\tau\right)+$$

$$+\mu^{-(2n-3)}\sum_{i=l+1}^{n-1} u_i(t,\mu)c_i(\varepsilon)\times$$

$$\times \exp\left(-\varepsilon^{-1}\int_t^T \lambda_i(\tau,\mu)d\tau\right)+v(t,\varepsilon), \quad (23)$$

де $c_i(\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ — скалярні множники, які розкладаються в формальні степеневі ряди

$$c_i(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k c_k^{(i)},\ i=\overline{1,n-1},$$

коефіцієнти яких $c_k^{(i)}$, $k=0,1,\ldots$, підлягають визначенню із крайової умови (2). Підставивши вектор (23) у крайову умову (2) і знехтувавши, на підставі умови (8°), експоненціально малими доданками, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{l} Mu_i(0,\mu)c_i(\varepsilon)+\sum_{i=l+1}^{n-1} Nu_i(T,\mu)c_i(\varepsilon)=$$

$$=\mu^{2n-3}(d(\varepsilon)-Mv(0,\varepsilon)-Nv(T,\varepsilon)).$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях μ, дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k} Mu_j^{(i)}(0)c_{k-j}^{(i)}+\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} Nu_j^{(i)}(T)c_{k-j}^{(i)}=$$

$$=d_{\frac{k-2n+3}{n-1}}-Nv_{\frac{k-n+2}{n-1}}(T)-Mv_{\frac{k-n+2}{n-1}}(0),$$

$$k=0,1,\ldots, \quad (24)$$

де $l_k=d_{\frac{k-2n+3}{n-1}}-Mv_{\frac{k-n+2}{n-1}}(0)-Nv_{\frac{k-n+2}{n-1}}(T)$, причому $d_{\frac{k}{p}}=0$, $v_{\frac{k}{p}}=0$, якщо k не ділиться на p або $\frac{k}{p}<0$.

Введемо до розгляду матрицю

$$U_0=[M\varphi(0), MH(0)B(0)\varphi(0),\ldots,$$

$$M[H(0)B(0)]^{l-1}\varphi(0), N\varphi(T),$$

$$NH(T)B(T)\varphi(T),\ldots,M[H(T)B(T)]^{n-l-2}\varphi(T)]$$

і припустимо виконання умови

9°

$$\det U_0\neq 0.$$

При $k<n-2$ рівняння (24) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k} Mu_j^{(i)}(0)c_{k-j}^{(i)}+\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} Nu_j^{(i)}(T)c_{k-j}^{(i)}=0.$$

Враховуючи, що при $j<n-2$

$$u_j^{(i)}(t)=\sum_{s=1}^{j} H\widetilde{L}_{s0}[P_s^j(\lambda^{(i)})]\varphi=$$

$$=\sum_{s=1}^{j} P_s^j(\lambda^{(i)})(HB)^s\varphi,$$

дістанемо

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(0))c_j^{(i)}M(H(0)B(0))^s\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(T))c_j^{(i)}N(H(T)B(T))^s\times$$

$$\times\varphi(T)=0,\ k=\overline{0,n-3}.$$

Взявши до уваги лінійну незалежність векторів $M(H(0)B(0))^i\varphi(0)$, $i=\overline{0,l-1}$,

$N(H(T)B(T))^j\varphi(T)$, $j=\overline{0,n-l-2}$, приходимо до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(0))c_j^{(i)}=0,$$

$$s=\overline{0,k},\ k=\overline{0,n-3}. \quad (25)$$

$$\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(T))c_j^{(i)}=0,$$

$$s=\overline{0,k},\ k=\overline{0,n-3}. \quad (26)$$

Поклавши в (24) $k=n-2$ і підставивши відповідні вирази для коефіцієнтів $u_k^{(i)}(t)$, $v_k(t)$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{j} P_s^j(\lambda^{(i)}(0))c_{n-2-j}^{(i)}M(H(0)B(0))^s\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{j}P_s^j(\lambda^{(i)}(T))c_{n-2-j}^{(i)}N(H(T)B(T))^s\times$$

$$\times\varphi(T)=-Nv_0(T)-Mv_0(0). \qquad (27)$$

Вектор l_{n-2} у правій частині останнього рівняння розкладемо за базисом $M(H(0)B(0))^i\varphi(0)$, $i=\overline{0,l-1}$, $N(H(T)B(T))^j\varphi(T), j=\overline{0,n-l-2}$:

$$l_{n-2}=\sum_{i=0}^{l-1}\alpha_i^{(n-2)}[M(H(0)B(0))^i]\varphi(0)+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-l-2}\beta_j^{(n-2)}[N(H(T)B(T))^j]\varphi(T).$$

Враховуючи цей розклад, рівняння (27) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{j}P_s^j(\lambda^{(i)}(0))c_{n-2-j}^{(i)}M(H(0)B(0))^s\times$$

$$\times\varphi(0)+\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{j}P_s^j(\lambda^{(i)}(T))c_{n-2-j}^{(i)}\times$$

$$\times N(H(T)B(T))^s\varphi(T)=$$

$$=\sum_{i=0}^{l-1}\alpha_i^{(n-2)}[M(H(0)B(0))^i]\varphi(0)+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-l-2}\beta_j^{(n-2)}[N(H(T)B(T))^j]\varphi(T),$$

звідки, враховуючи лінійну незалежність векторів, що утворюють матрицю U_0, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{n-s-2}P_s^{n-j-2}(\lambda^{(i)}(0))c_j^{(i)}=\alpha_s^{(n-2)},$$

$$s=\overline{0,l-1}, \qquad (28)$$

$$\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-s-2}P_s^{n-j-2}(\lambda^{(i)}(T))c_j^{(i)}=\beta_s^{(n-2)},$$

$$s=\overline{0,n-l-2}. \qquad (29)$$

Взявши $l-1$ рівнянь із системи (25) при $s=k,\ k=\overline{0,l-2}$ і останнє рівняння із системи (28) при $s=l-1$, приходимо до лінійної алгебраїчної системи

$$\sum_{i=1}^{l}c_0^{(i)}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_1^{(i)}(0)c_0^{(i)}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{l}[\lambda_1^{(i)}(0)]^{l-2}c_0^{(i)}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{l}[\lambda_1^{(i)}(0)]^{l-1}c_0^{(i)}=\alpha_{l-1}^{(n-2)},$$

яку можна записати у векторно-матричній формі

$$W_1c_0=m_0,$$

де

$$W_1=\begin{pmatrix}1&\dots&1\\ \lambda_1^{(1)}(0)&\dots&\lambda_1^{(l)}(0)\\ \dots&\dots&\dots\\ (\lambda_1^{(1)}(0))^{l-1}&\dots&(\lambda_1^{(l)}(0))^{l-1}\end{pmatrix},$$

$c_0=col(c_0^{(1)},c_0^{(2)},\dots,c_0^{(l)})$,
$m_0=col(0,\dots,0,\alpha_{l-1}^{(n-2)})$.

Визначник матриці W_1 є визначником Вандермонда, і, отже, не дорівнює нулю, оскільки $\lambda_1^{(i)}(0)\neq\lambda_1^{(j)}(0)$ при $i\neq j$. Тоді із останнього рівняння дістанемо

$$c_0=W^{-1}m_0.$$

Взявши $n-l-2$ рівнянь із (26) при $s=k,\ k=\overline{0,n-l-3}$ і останнє рівняння із (29) (при $s=n-l-2$), дістанемо аналогічну систему рівнянь відносно сталих $c_0^{(i)}, i=\overline{l+1,n-1}$:

$$\sum_{i=l+1}^{n-1} c_0^{(i)} = 0,$$

$$\sum_{i=l+1}^{n-1} \lambda_1^{(i)}(T) c_0^{(i)} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=l+1}^{n-l} [\lambda_1^{(i)}(T)]^{n-l-3} c_0^{(i)} = 0,$$

$$\sum_{i=l+1}^{n-l} [\lambda_1^{(i)}(T)]^{n-l-2} c_0^{(i)} = \beta_{n-l-2}^{(n-2)},$$

або у векторно-матричній формі

$$W_2 \widetilde{c}_0 = \widetilde{m}_0,$$

де

$$W_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(l+1)}(T) & \dots & \lambda_1^{(n-1)}(T) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(l+1)}(T))^{n-l-2} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)}(T))^{n-l-2} \end{pmatrix},$$

$\widetilde{c}_0 = \mathrm{col}(c_0^{(l+1)}, c_0^{(l+2)}, \dots, c_0^{(n-1)})$, $\widetilde{m}_0 = \mathrm{col}(0, \dots, 0, \beta_{n-l-2}^{(n-2)})$. Оскільки $\det W_2 \neq 0$, то

$$\widetilde{c}_0 = W_2^{-1} \widetilde{m}_0.$$

Розглянемо рівняння (24) у загальному вигляді. Взявши до уваги формули для коефіцієнтів $u_k^{(i)}(t)$, маємо:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k} \sum_{s=0}^{j} MH\widetilde{L}_{s0}[P_s^j(\lambda^{(i)}(0))]\varphi(0) c_{k-j}^{(i)} +$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{s=0}^{j} NH\widetilde{L}_{s0}[P_s^j \lambda^{(i)}(T)]\varphi(T) c_{k-j}^{(i)} =$$

$$= d_{\frac{k-2n+3}{n-1}} - Nv_{\frac{k-n+2}{n-1}}(T) - Mv_{\frac{k-n+2}{n-1}}(0) -$$

$$- \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k} MH\widetilde{L}_{0\frac{j}{n-1}} \varphi(0) c_{k-j}^{(i)} -$$

$$- \sum_{i=l+1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} NH\widetilde{L}_{0\frac{j}{n-1}} \varphi(T) c_{k-j}^{(i)} -$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k} \sum_{s=1}^{[\frac{j-1}{n-1}]} \sum_{r=1}^{j-(n-1)s} MH \times$$

$$\times \widetilde{L}_{rs}[P_r^{j-(n-1)s}(\lambda^{(i)}(0))] c_{k-j}^{(i)} \varphi(0) -$$

$$- \sum_{i=l+1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{s=1}^{[\frac{j-1}{n-1}]} \sum_{r=1}^{j-(n-1)s} NH \times$$

$$\times \widetilde{L}_{rs}[P_r^{j-(n-1)s}(\lambda^{(i)}(T))] c_{k-j}^{(i)} \varphi(T),$$

$$k = 0, 1, \dots. \tag{30}$$

Позначивши через l_k вектор у правій частині цього рівняння, розкладемо його за базисом

$$l_k = \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i^{(k)} [M(H(0)B(0))^i]\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-l-2} \beta_j^{(k)} [N(H(T)B(T))^j]\varphi(T).$$

Враховуючи цей розклад та формули (7), рівняння (30) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{s=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)} M(H(0)B(0))^s \varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{n-1} \sum_{s=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(T)) c_j^{(i)} N(H(T)B(T))^s \times$$

$$\times \varphi(T) = \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i^{(k)} [M(H(0)B(0))^i]\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-l-2} \beta_j^{(k)} [N(H(T)B(T))^j]\varphi(T), \; k = 0, 1, \dots,$$

звідки, взявши до уваги лінійну незалежність векторів-стовпців матриці U_0, приходимо до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)} = \alpha_s^{(k)}, \tag{31}$$

$$\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(T))c_j^{(i)}=\beta_s^{(k)},$$

$$s=\overline{0,k},\ k=0,1,... \tag{32}$$

Визначивши отримані на попередніх кроках рівняння систем (31), (32), що містять сталі $c_0^{(i)},...,c_{k-1}^{(i)}$, $i=\overline{1,n-1}$, дістанемо такі системи рівнянь для визначення $c_k^{(i)}$, $i=\overline{1,n-1}$:

$$\sum_{i=1}^{l} c_k^{(i)}=\alpha_0^{(k)},$$

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_1^{(i)}(0)c_k^{(i)}=\alpha_1^{(k+1)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k-1}P_1^{k+1-j}(\lambda^{(i)}(0))c_j^{(i)},$$

....

$$\sum_{i=1}^{l}[\lambda_1^{(i)}(0)]^{l-1}c_k^{(i)}=\alpha_{l-1}^{(k-l-1)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k-1}P_{l-1}^{k+l-1-j}(\lambda^{(i)}(0))c_j^{(i)},$$

$$\sum_{i=l+1}^{n-1} c_k^{(i)}=\beta_0^{(k)},$$

$$\sum_{i=l+1}^{n-1}\lambda_1^{(i)}(T)c_k^{(i)}=\beta_1^{(k+1)}-$$

$$-\sum_{i=l+1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}P_1^{k+1-j}(\lambda^{(i)}(T))c_j^{(i)},$$

....

$$\sum_{i=l+1}^{n-l}[\lambda_1^{(i)}(T)]^{n-l-2}c_k^{(i)}=\beta_{n-l-2}^{(k+n-l-2)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k-1}P_{n-l-2}^{k+n-l-2-j}.$$

Записавши їх у векторно-матричній формі, маємо

$$W_1c_k=m_k, \tag{33}$$

$$W_2\widetilde{c}_k=\widetilde{m}_k, \tag{34}$$

де $c_k=\mathrm{col}(c_k^{(1)},c_k^{(2)},\dots,c_k^{(l)})$, $\widetilde{c}_k=\mathrm{col}(c_k^{(l+1)},c_k^{(l+2)},\dots,c_k^{(n-1)})$, а m_k та $\widetilde{m}_k$ — вже відомі вектори. Звідси однозначно знаходяться вектори c_k та $\widetilde{c}_k$:

$$c_k=W_1^{-1}m_k,$$

$$\widetilde{c}_k=W_2^{-1}\widetilde{m}_k,\ k=0,1,....$$

Одержані рекурентні формули дозволяють визначити будь-які сталі $c_k^{(i)}, i=\overline{1,n-1}$, $k=0,1,...$, що завершує побудову формального розв'язку крайової задачі (1), (2).

Методами робіт [1,2] можна показати, що побудований розв'язок має асимптотичний характер.

Підсумком проведених міркувань є наступна теорема.

Теорема

Якщо гранична в'язка матриць $A_0(t)-\lambda B(t)$ має на відрізку $[0;T]$ кратний скінченний елементарний дільник λ^{n-1} та простий нескінченний, і виконуються умови $1^\circ-9^\circ$, то при досить малих ε існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), що виражається асимптотичною формулою

$$x(t,\varepsilon)=x_m(t,\varepsilon)+O(\mu^{m-5n+8}),$$

де вектор $x_m(t,\varepsilon)$ зображається у вигляді розвинення

$$x_m(t,\varepsilon)=\mu^{-(2n-3)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=1}^{l}\mu^k\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{k}c_j^{(i)}u_{k-j}^{(i)}(t)\right)\times$$

$$\times\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{m}\mu^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+$$

$$+\mu^{-(2n-3)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=l+1}^{n-1}\mu^k\left(\sum_{j=0}^{k}c_j^{(i)}u_{k-j}^{(i)}(t)\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\varepsilon^{-1}\int_t^T\left(\sum_{k=1}^{m}\mu^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+$$

$$+\mu^{-(n-1)}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{n-1}]}\mu^{k(n-1)}v_k(t),$$

а вектор-функції $u_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n-1}, v(t)$, *скалярні функції* $\lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n-1}$, *скалярні множники* $c_k^{(i)}, i = \overline{1, n-1}$ *визначаються за описаним вище алгоритмом.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.

2. *Віра М. Б.* Двоточкова крайова задача для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра головного оператора // Труды ИПММ НАН Украины. — 2009. — **Т. 18**, — С. 19-28.

3. *Віра М. Б.* Про побудову асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи // Динамические системы: межведомственный научный сборник. — 2011. — **Т. 1(29)**, №1. — С. 15-30.

4. *Віра М. Б.* Про побудову асимптотичного розв'язку крайової задачі для лінійної вироджуваної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку // Труды ИПММ НАН Украины. — 2013. — **Т. 26**. — С. 31-39.