УДК 517.95

©2014 р. В.В. Городецький, Я.М. Дрінь

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинський державний фінансово-економічний університет

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТОРАХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлена коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з граничною умовою у просторі періодичних узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

We prove the well-posedness of a non-local multipoint with respect to time problem for evolution pseudo-differential equations with a boundary condition in spaces of periodic generalized functions of an ultra-distribution type.

Теорія нелокальних крайових задач як розділ загальної теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Дослідження таких задач зумовлене багатьма застосуваннями у механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничо-наукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів [1–4]. На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вперше вказав О.О. Дезін [5], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поруч з локальними і нелокальні умови. А.Х. Мамян встановив [6], що існують такі рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

Нелокальні крайові задачі у різних аспектах вивчали багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (О.О. Дезін, В.К. Романко, А.М. Нахушев, О.А. Самарський, Б.Й. Пташник, М.І. Юрійчук, В.І. Чесалін, М.І. Матійчук, О.Л. Скубачевський та ін.). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, досліджені питання залежності характеру розв'язності задач від повіденки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь. До таких задач відноситься і нелокальна багатоточкова за часом задача, яка є узагальненням задачі Коші, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші).

Основною метою роботи є побудова та дослідження властивостей фундаментального розв'язку m-точкової ($m \geq 1$) за часом задачі для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, які діють у просторах періодичних функцій, встановлення коректної розв'язності задачі у випадку, коли гранична функція є періодичним ультрарозподілом, який [7] ототожнюється з певним формальним тригонометричним рядом. Зазначимо, що така постановка задачі є природною, оскільки гранична функція може мати особливість в одній або декількох точках і допускає регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених періодичних функцій типу розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо. Досліджена також властивість локалізації розв'язку (властивість локального покращення збіжності), яка полягає в тому, що якщо гранична узагальнена функція збігається на деякій відкритій множині Q з неперервною функцією, то розв'язок $u(t,x)$ задачі задовольняє відповідну граничну умову рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$, де $\mathbb{K}$ – довільно фіксований компакт.

1. Нехай

$$T_m = \Big\{ P(x): \ P(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_{k,p} e^{ikx},$$

$$x \in \mathbb{R}, c_{k,p} \in \mathbb{C} \Big\}, m \in \mathbb{Z}_+, T = \lim_{m \to +\infty} \mathrm{ind} T_m,$$

T' – простір всіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи простору T' назвемо 2π-періодичними узагальнененими функціями.

Зіставлення

$$T \ni P \to f_p \in T': \ \langle f_p, Q\rangle = (P, Q)_{L_2[0,2\pi]}, \quad \forall Q \in T$$

задає вкладення $T \subset L_2[0,2\pi] \subset T'$ (тут $\langle f, Q\rangle$ позначає дію функціоналу f на поліном $Q \in T$), причому ці вкладення щільні й неперервні [7].

Символом s позначимо простір всіх числових послідовностей $\{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$ комплексних чисел з покоординатною збіжністю. Ізоморфізм

$$F: \ T' \in f \to \{c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle, \ k \in \mathbb{Z}\} \subset s$$

відображає T на множину фінітних послідовностей з s, а $L_2[0,2\pi]$ – на l_2.

Ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}$, де $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle$, називається рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f \in T'$, а числа $c_k(f)$ – її коефіцієнтами Фур'є. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції $f \in T'$ її ряд Фур'є збігається до f у просторі T' [7]. Навпаки, довільний ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f \in T'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [7]. Отже, T' можна розуміти як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$.

2. Розглянемо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка володіє властивостями [8]:

1) $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \le m_{k+1}$;

2) $\forall \alpha > 0 \ \exists c_\alpha > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \ge c_\alpha \alpha^k$;

3) $\exists M > 0 \ \exists h > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_{k+1} \le M h^k m_k$;

4) $\exists A > 0 \ \exists L > 0 \ \forall \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_k \cdot m_l \le A L^{k+l} m_{k+l}$;

5) $\exists B > 0 \ \exists s > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \le B s^k \min\limits_{0 \le l \le k} m_{k-l} m_l$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_k = (k!)^\beta$, $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$.

Символом $H\langle m_k\rangle$ позначимо сукупність всіх 2π-періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які володіють властивістю: існують сталі c, $B > 0$ (залежні лише від функції φ) такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \le C B^k m_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Множина функцій $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, для яких оцінки (1) виконуються з фіксованою сталою $B > 0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k\rangle$ відносно норми

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\substack{x\in[0,2\pi] \\ k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{|\varphi^{(k)}(x)|}{B^k m_k}.$$

При цьому $H_{B_1}\langle m_k\rangle \subset H_{B_2}\langle m_k\rangle$, якщо $B_1 < B_2$ і $H\langle m_k\rangle = \bigcup_{B>0} H_B\langle m_k\rangle$. В $H\langle m_k\rangle$ вводиться топологія індуктивної границі банахових просторів $H_B\langle m_k\rangle$ [8]. При цьому $H\langle m_k\rangle$ перетворюється в повний локально опуклий простір, інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k\rangle$ (див. властивості 3) – 5)). Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}\}$ збігається з однією із послідовностей Жевре, то $H\langle m_k\rangle = G_{\{\beta\}}$, де $G_{\{\beta\}}$ – простір ультрадиференційовних функцій класу Жевре порядку $\beta > 0$. Простір $H\langle k!\rangle = H\langle k^k\rangle = G_{\{1\}}$ складають аналітичні 2π-періодичні функції [8].

Символом $H'\langle m_k\rangle$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k\rangle$ зі слабкою збіжністю. Відомо [8], що $H'\langle m_k\rangle$ збігається з проективною границею банахових просторів $H'_B\langle m_k\rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k\rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$. Елементи простору $H'\langle k!\rangle$ називаються гіперфункціями або аналітичними періодичними функціоналами.

У праці [8] дається характеристика просторів $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів.

Покладемо $\rho(\lambda) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}(\lambda^k/m_k)$, $\lambda \in [1,+\infty)$. Із властивостей послідовності $\{m_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція ρ неперервна, монотонно зростає на $[1,+\infty)$ (швидше, ніж λ^k, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\rho(\lambda)\geq 1$, $\forall\lambda\in[1,+\infty)$). Нехай

$$H_{\{\alpha\}} := \Big\{ f\in T' \,\Big|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big) < \infty,$$

$$c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle \Big\}, \alpha>0.$$

$H_{\{\alpha\}}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f,g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)}\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big),$$

$$\{f,g\}\subset H_{\{\alpha\}}.$$

Якщо $\alpha_1>\alpha_2$, то $H_{\{\alpha_1\}}\supset H_{\{\alpha_2\}}$ і це вкладення є неперервним внаслідок монотонності функції ρ. Покладемо $H_{\{m_k\}} = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$. В $H\{m_k\}$ вводиться топологія індуктивної границі [8]: $H\{m_k\} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\mathrm{ind} H_{\{\alpha\}}$. Простори $H\langle m_k\rangle$ та $H\{m_k\}$ збігаються не лише як множини, але і топологічно [8].

З точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів простори $H\langle m_n\rangle$ та $H'\langle m_n\rangle$ описуються так [8]:

$$(f\in H\langle m_n\rangle) \Leftrightarrow (\exists\mu>0\ \exists c>0\ \forall k\in\mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)|\leq c\rho^{-1}(\mu|k|)); \tag{A}$$

$$(f\in H'\langle m_n\rangle) \Leftrightarrow (\forall\mu>0\ \exists c=c(\mu)>0$$

$$\forall k\in\mathbb{Z}:\ |c_k(f)|\leq c\rho(\mu|k|)). \tag{B}$$

Якщо $m_k = k^{k\beta}$, $\beta>0$, то $\rho(\lambda)\sim\exp(\lambda^{1/\beta})$, тобто в цьому випадку для $f\in T'$ правильними є такі співвідношення еквівалентності:

$$(f\in G_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\exists\mu>0\,\exists c>0\,\forall k\in\mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)|\leq c\exp\{-\mu|k|^{1/\beta}\});$$

$$(f\in G'_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\forall\mu>0\,\exists c=c(\mu)>0\,\forall k\in\mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)|\leq c\exp\{\mu|k|^{1/\beta}\}).$$

Припустимо, що послідовність $\{m_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$ задовольняє ще одну умову: 6) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{m_k}/k = 0$, тобто (див. [9])

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\forall\lambda:$$

$$\lambda\geq\max\{1,\delta\}\Rightarrow\rho(\lambda)\geq e^{\varepsilon\lambda}. \tag{2}$$

Звідси випливає (див. [10]), що функція $\ln\rho$ – опукла на $[1,+\infty)$, тобто

$$\forall\{x_1,x_2\}\subset[1,+\infty):$$

$$\ln\rho(x_1)+\ln\rho(x_2)\leq\ln\rho(x_1+x_2) \tag{3}$$

((3) відповідає означенню опуклої функції f з [11]:

$$f(x_1)+f(x_2)\leq f(x_1+x_2),\quad x_1\geq 0, x_2\geq 0).$$

Покладемо $\rho_k := \inf\limits_{\lambda\geq 1}\rho(\lambda)/\lambda^k$, $k\in\mathbb{N}$. Із результатів, отриманих в [10] випливає, що послідовність $\{\rho_k\}$ є монотонно спадною і такою, що $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\rho_k}=0$. Розглянемо тепер послідовність спеціального вигляду, а саме, $m_k = k!\rho_k$, $k\in\mathbb{Z}_+$ (ця послідовність задовольняє умови 1) – 6)). Виявляється, що елементами відповідного класу $H\langle k!\rho_k\rangle$ є аналітичні (цілі) періодичні функції, які як функції комплексної змінної задовольняють певну умову.

Теорема 1. *Нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належить до класу $H\langle k!\rho_k\rangle$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z\in\mathbb{C}$, і це продовження задовольняє умову: існують сталі c, $b>0$ (залежні, можливо лише від φ) такі, що*

$$|\varphi(x+iy)|\leq c\tilde{\rho}(by),\quad\forall\{x,y\}\subset\mathbb{R}, \tag{4}$$

$$\tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho(y), & |y| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho(y) = \sup_{|y| \geq 1} |y|^k/(k!\rho_k).$$

Доведення. Нехай φ допускає аналітичне продовження в комплексну площину до цілої функції і виконується умова (4). Згідно з інтегральною формулою Коші

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{k+1}} dz, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де γ_R – коло радіуса R з центром у точці x. Тоді

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{2\pi} \max_{z \in \gamma_R} \frac{|\varphi(z)|}{|z-x|^{k+1}} \oint\limits_{\gamma_r} ds \leq$$

$$\leq ck!b^k \inf_R \frac{\tilde{\rho}(bR)}{(bR)^k} = cb^k k! \rho_k, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Звідси випливає, що $\varphi \in H\langle k!\rho_k \rangle$.

Навпаки, нехай нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належить до класу $H\langle k!\rho_k\rangle$, тобто існують сталі $c' > 0$, $B > 0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq c' B^k k! \rho_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Тоді її можна аналітично продовжити у всю комплексну площину. Справді, залишковий член у формулі Тейлора

$$\varphi(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!} h^n,$$

$x \in \mathbb{R}$, де $|\xi - x| < |h|$, допускає оцінку

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!} |h|^n \leq c' B^n \rho_n |h|^n = c'(B|h| \sqrt[n]{\rho_n})^n. \tag{5}$$

Оскільки $\sqrt[n]{\rho_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \; \forall n \geq n_0 : \rho_n < \varepsilon^n.$$

Покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2}(B|h|)^{-1}$. Тоді

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!} \leq \frac{c'}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

звідки й випливає, що ряд Тейлора функції $\varphi(x)$ збігається до $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, тобто

$$\varphi(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} h^k.$$

Із оцінки (5) випливає також, що ряд Тейлора функції φ залишається збіжним і для комплексних значень h. Отже, φ продовжується до цілої функції $\varphi(z)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$; при цьому

$$\varphi(x+iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} (iy)^k$$

і

$$|\varphi(x+iy)| \leq c' \sum_{k=0}^{\infty} B^k |y|^k \rho_k.$$

Оскільки знайдеться стала $d_0 > 0$ така, що $\tilde{\rho}(y) \leq d_0 \tilde{\rho}(2By)$, то

$$B^k |y|^k \rho_k = |y|^k B^k \inf_{y \neq 0} \frac{\tilde{\rho}(y)}{|y|^k} \leq$$

$$\leq d_0 |y|^k B^k \inf_{y \neq 0} \frac{\tilde{\rho}(2By)}{|2By|^k} \leq d_0 |y|^k B^k \frac{\tilde{\rho}(2By)}{2^k B^k |y|^k} =$$

$$= \frac{d_0}{2^k} \tilde{\rho}(by), b = 2B, y \neq 0.$$

Тоді

$$|\varphi(x+iy)| \leq c' \tilde{\rho}(by) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = c\tilde{\rho}(by), \quad y \neq 0,$$

де $c = 2c'$. Зазначимо, що для $y = 0$ ця нерівність є очевидною. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Якщо $m_k = k^{k(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(y) \sim \exp(|y|^{1/(1-\beta)})$ і в цьому випадку $\rho_k \sim k^{-k(1-\beta)}$. Тоді $k!\rho_k \sim k^{k\beta}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, з теореми 1 випливає, що клас Жевре $H\langle k^{k\beta}\rangle = G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, характеризується так.: для того, щоб нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належала до класу $G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, необхідно й достатньо, щоб вона аналітично продовжувалася в комплексну площину до цілої функції і це продовження задовольняло умову:*

$$\exists c > 0 \, \exists b > 0 \, \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(x+iy)| \leq c \exp\{b|y|^{1/(1-\beta)}\}.$$

3. У просторі $H'\langle m_k\rangle$ згортка $f_1 * f_2$ визначена для довільних $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k\rangle$, причому $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k\rangle$. Справді, оскільки $H'\langle m_k\rangle \subseteq T'$, то коефіцієнти Фур'є узагальненої функції $f_1 * f_2 \in T'$ пов'язані з коефіцієнтами Фур'є узагальнених функцій $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k\rangle \subseteq T'$ так [12]:

$$c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1) \cdot c_k(f_2), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Доведемо, що коефіцієнти Фур'є $c_k(f_1 * f_2)$ задовольняють умову (B), звідки й випливатиме, що $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k\rangle$.

Отже, якщо $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k\rangle$, то з умови (B) випливає, що

$$\forall \mu_1 > 0 \ \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z} :$$
$$|c_k(f_1)| \le c_1 \rho(\mu_1 |k|),$$
$$\forall \mu_2 > 0 \ \exists c_2 = c_2(\mu_2) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z} :$$
$$|c_k(f_2)| \le c_2 \rho(\mu_2 |k|).$$

Тоді, урахувавши властивість опуклості функції $\ln \rho$ (див. (3)) знайдемо, що

$$|c_k(f_1 * f_2)| = |c_k(f_1)| \cdot |c_k(f_2)| \le$$
$$\le c_1 c_2 \rho(\mu_1 |k|) \rho(\mu_2 |k|) =$$
$$= c_1 c_2 e^{\ln \rho(\mu_1 |k|) + \ln \rho(\mu_2 |k|)} \le$$
$$\le c_1 c_2 e^{\ln \rho((\mu_1 + \mu_2)|k|)} =$$
$$= c \rho(\mu |k|), \quad c = c_1 c_2, \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Цим доведено, що $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k\rangle$.

Якщо ж, наприклад, $f_1 \in H\langle m_k\rangle$, то згортка $f_1 * f_2$ – звичайна функція; точніше, правильним є наступне твердження.

Лема 1. *Для довільних $\varphi \in H\langle m_k\rangle$ та $f \in H'\langle m_k\rangle$ згортка $f * \varphi$ є елементом простору $H\langle m_k\rangle$.*

Доведення. Оскільки $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, то (див. умову (A))

$$\exists \mu > 0 \ \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z} :$$
$$|c_k(\varphi)| \le c \rho^{-1}(\mu |k|).$$

Внаслідок умови (B) для $\mu_1 = \mu/2$ знайдеться $c_1 > 0$ таке, що $|c_k(f)| \le c\rho(\mu_1 |k|)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді, урахувавши властивість опуклості функції $\ln \rho$, прийдемо до нерівностей

$$\ln \rho(\mu_1 |k|) - \ln \rho(\mu |k|) \le - \ln \rho((\mu - \mu_1)|k|) =$$
$$= - \ln \rho\Big(\frac{\mu}{2}|k|\Big), |k| \ge 1.$$

Отже,

$$\rho(\mu_1 |k|) \rho^{-1}(\mu |k|) \le \rho^{-1}\Big(\frac{\mu}{2}|k|\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, для коефіцієнтів Фур'є функції $f * \varphi$ справджуються оцінки:

$$|c_k(f * \varphi)| \le \tilde{c} \rho^{-1}(\tilde{\mu} |k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $\tilde{c} = c c_1$, $\tilde{\mu} = \mu/2$. Звідси вже випливає, що $f * \varphi \in H\langle m_k\rangle$.

Лема доведена.

Зазначимо, що для згортки $f * \varphi$, $f \in H'\langle m_k\rangle$, $\varphi \in H\langle m_k\rangle$ правильним є зображення

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, T_{-x} \check{\varphi}(\cdot)\rangle \equiv \langle f(t), \varphi(x - t)\rangle,$$

де T_{-x} – оператор зсуву аргументу в просторі $H\langle m_k\rangle$, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$.

4. Нехай $\tilde{G}$: $\mathbb{R} \to [0, \infty)$ – неперервна парна функція така, що $\tilde{G}(x) \ge |x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. За допомогою функції $\tilde{G}$ у просторі T' побудуємо оператор $\hat{A}$: $T' \to T'$ за правилом

$$T' \ni f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx} \to \hat{A} f :=$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(k) c_k(f) e^{ikx} \in T',$$
$$c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Легко бачити, що оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в T'. Оператор $\hat{A}$ – згортувач в T'. Справді, якщо розглянути узагальнену функцію

$$f_{\tilde{G}}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(k) e^{ikx} \in T',$$

то для довільної узагальненої функції $f \in T'$ маємо

$$\hat{A} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(k) c_k(f) e^{ikx} = f * f_{\tilde{G}},$$

бо

$$c_k(f * f_{\tilde{G}}) = c_k(f) c_k(f_{\tilde{G}}) = c_k(f) \tilde{G}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $G(x) = |x|^{\gamma}$, $\gamma \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $\hat{A}$ збігається з оператором $\hat{A}_{\gamma}$ дробового диференціювання в T' [12]. Зазначимо, що сім'я операторів $\hat{A}_{\gamma}$ володіє валстивостями:

а) $\forall f \in T'$ $\forall \{\alpha, \beta\} \subset (0, \infty)$: $\hat{A}_{\alpha}(\hat{A}_{\beta} f) = \hat{A}_{\alpha+\beta} f$;

б) $\forall f \in T'$: $\hat{A}_{2k} f = (-1)^k D_x^{2k} f$, $k \in \mathbb{N}$.

Якщо A – звуження оператора $\hat{A}$ на простір $H = L_2[0, 2\pi]$, то, як доведено в [12], A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, причому $T \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2[0, 2\pi]$.

Нехай f: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ – деяка неперервна функція. За функцією f та оператором A побудуємо оператор $f(A)$:

$$f(A)\varphi := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(\varphi) e^{ikx},$$

$$\lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad \forall \varphi \in H.$$

Тоді $f(A) := A_f$ – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною областю визначення

$$\mathcal{D}(A_f) = \Big\{\varphi \in H : \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^2(\lambda_k) |c_k(\varphi)|^2 \equiv$$

$$\equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(A_f \varphi)|^2 < \infty\Big\},$$

причому $T \subset \mathcal{D}(A_f)$. З'ясуємо, за якої умови на функцію f оператор A_f є обмеженим у просторі $H\langle m_k \rangle$ і відображає цей простір у себе.

Теорема 2. *Якщо неперервна на* $[0, \infty)$ *функція* f *задовольняє умову*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_{\varepsilon} > 0 \ \forall x \in [0, \infty) :$$

$$0 \leq f(x) \leq c_{\varepsilon} \rho(\varepsilon x), \tag{6}$$

то оператор A_f *неперервний у просторі* $H\langle m_k \rangle$ *і відображає цей простір в себе.*

Доведення. Передусім доведемо, що функція $A_f \varphi \in H\langle m_k \rangle$, якщо $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi) e^{ikx} \in H\langle m_k \rangle$. Оскільки $c_k(A_f \varphi) = f(\lambda_k) c_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}$, то, внаслідок умови (A) досить довести, що

$$\exists \mu_0 > 0 \ \exists c_0 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$f(\lambda_k) |c_k(\varphi)| \leq c_0 \rho^{-1}(\mu_0 |k|).$$

За умовою $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, тобто

$$\exists \mu_1 > 0 \ \exists c_1 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(\varphi)| \leq c_1 \rho^{-1}(\mu_1 |k|).$$

Отже,

$$f(\lambda_k) |c_k(\varphi)| = c_1 c_{\varepsilon} \rho(\varepsilon |k|) \rho^{-1}(\mu_1 |k|) =$$

$$= c_1 c_{\varepsilon} e^{\ln \rho(\varepsilon |k|) - \ln \rho(\mu_1 |k|)}.$$

Візьмемо параметр ε з проміжку $(0, \mu_1)$. Врахувавши нерівність опуклості (3) для функції $\ln \rho$ знайдемо, що

$$\ln \rho(\varepsilon |k|) - \ln \rho(\mu_1 |k|) \leq -\ln \rho((\mu_1 - \varepsilon)|k|) \equiv$$

$$\equiv -\ln \rho(\mu_0 |k|),$$

де $\mu_1 - \varepsilon = \mu_0$. Тоді

$$\varphi(\lambda_k) |c_k(\varphi)| \leq c_0 e^{-\ln \rho(\mu_0 |k|)} = c_0 \rho^{-1}(\mu_0 |k|),$$

звідки й випливає, що $A_f \varphi \in H\langle m_k \rangle$.

Доведемо, що A_f – неперервний оператор у просторі $H\langle m_k \rangle$, тобто кожну обмежену множину цього простору A_f відображає в обмежену множину цього ж простору.

Нехай L – обмежена множина в просторі $H\langle m_k \rangle$. Оскільки $H\langle m_k \rangle = \bigcup_{\alpha > 0} H_{\{\alpha\}}$, то L – обмежена множина в деякому гільбертовому просторі $H_{\{\alpha_0\}}$, тобто

$$\exists b > 0 \ \forall \varphi \in L :$$

$$\|\varphi\|_{H_{\{\alpha_0\}}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\varphi)|^2 \rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha_0}\Big) \leq b.$$

Отже,

$$\forall \varphi \in L : \ |c_k(\varphi)| \leq b \rho^{-1}\Big(\frac{|k|}{\alpha_0}\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

У нерівності (6) покладемо $\varepsilon = (2\alpha_0)^{-1}$. Тоді, скориставшись нерівністю опуклості (3) знайдемо, що

$$|c_k(A_f \varphi)| = f(\lambda_k) |c_k(\varphi)| \leq c b \rho^{-1}\Big(\Big(\frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon\Big)|k|\Big) =$$

$$= b_1\rho^{-1}\Big(\frac{|k|}{2\alpha_0}\Big), \quad k\in\mathbb{Z}, b_1 = cb.$$

Отже, множина $A_f L$ обмежена в просторі $H_{\{2\alpha_0\}}$, тобто у просторі $H\langle m_k\rangle$. Теорему доведено.

Зауваження 2. Умова (6) на функцію f еквівалентна тому, що функція

$$F_f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)e^{ikx} \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(G(k))e^{ikx}$$

є елементом простору $H'\langle m_k\rangle$.

Надалі вважатимемо, що функція f додатково задовольняєу мову

$$\exists c_0>0\ \exists d_0>0\ \forall x\in[0,\infty):$$
$$f(x)\ge d_0\ln\rho(c_0x). \qquad (7)$$

5. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \ \ (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}\equiv\Omega, \quad (8)$$

де A_f – оператор, побудований у п. 4. Під розв'язком рівняння (8) розуміємо функцію $u(t,x)$, неперервно диференційовну по t при кожному $x\in\mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння, $u(t,\cdot)\in\mathcal{D}(A_f)$ при кожному $t\in(0,T]$.

Розглянемо таку задачу: знайти функцію u, яка є розв'язком рівняння (8) та задовольняє умову

$$\mu u(0,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k u(t_k,\cdot) = g, g\in L_2[0,2\pi], \ (9)$$

де $m\in\mathbb{N}$, $\{\mu,\mu_1,\dots,\mu_m\}\subset(0,\infty)$, $\{t_1,\dots,t_m\}\subset(0,T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m}\mu_k$, $t_1<t_2<\dots<t_m\le T$. При цьому $u(0,\cdot)$ розуміємо як $\lim_{t\to+0} u(t,\cdot)$, де границя розглядається в гільбертовому просторі $H = L_2[0,2\pi]$, тобто вважаємо, що існує функція $u_0(\cdot)\in H$ така, що $\|u(t,\cdot)-u_0(\cdot)\|_H\to 0$, $t\to+0$, $u_0(x)\equiv u(0,x)$. Надалі задачу (8), (9) називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (8).

Нехай u – розв'язок рівняння (8). Оскільки $u(t,\cdot)\in H$ при кожному $t\in(0,T]$, то

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{c}_k(t)e^{ikx}, \quad (t,x)\in\Omega,$$

$$\tilde{c}_k(t)\equiv c_k(u(t,\cdot)) = (u(t,\cdot),e^{-ikx})_H, \quad k\in\mathbb{Z},$$

причому

$$\|u(t,\cdot)\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\tilde{c}_k(t)|^2, \quad t\in(0,T].$$

Для відшукання $\tilde{c}_k(t)$ домножимо (8) скалярно на e^{-ikx}, $k\in\mathbb{Z}$; в результаті прийдемо до співвідношення

$$(u'_t, e^{-ikx}) + (A_f u, e^{-ikx}) = 0.$$

При фіксованому $k\in\mathbb{Z}$ маємо:

$$(A_f u, e^{-ikx}) = (u, A_f e^{-ikx}) = (u, f(\lambda_k)e^{-ikx}) =$$
$$= f(\lambda_k)(u, e^{-ikx}) = f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t),$$
$$\lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k)$$

(тут враховано, що $e^{-ikx}\in\mathcal{D}(A_f)$ при кожному $k\in\mathbb{Z}$, причому e^{-ikx} є власною функцією оператора A, а $f(\lambda_k)$ – його власне число). Отже,

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}_k(t) = \frac{d}{dt}(u(t,\cdot),e^{-ikx}) =$$
$$= \Big(\frac{d}{dt}u(t,\cdot), e^{-ikx}\Big), k\in\mathbb{Z}.$$

Зауважимо також, що

$$\lim_{t\to+0}\tilde{c}_k(t) = \tilde{c}_k(0) = c_k(u(0,\cdot)).$$

Функція $\tilde{c}_k(t)$ задовольняє рівняння

$$\tilde{c}'_k(t) + f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t) = 0, k\in\mathbb{Z},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\tilde{c}_k(t) = c_k\exp\{-tf(\lambda_k)\}, c_k = \mathrm{const}, k\in\mathbb{Z}.$$

Тоді

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\exp\{-tf(\lambda_k)\}e^{ikx}, \quad (t,x)\in\Omega. \qquad (10)$$

Для відшукання c_k, $k\in\mathbb{Z}$, помножимо (9) скалярно на e^{-ikx}, $k\in\mathbb{Z}$; у результаті прийдемо до співвідношення

$$\mu\tilde{c}_k(0) - \sum_{n=1}^{m}\mu_n\tilde{c}_k(t_n) = c_k(g),$$

$$c_k(g) = (g, e^{-ikx}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Урахувавши вигляд$\tilde{c}_k(t)$ знайдемо, що

$$c_k\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_k)\}\Big) = c_k(g).$$

Отже,

$$c_k = c_k(g)\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_k)\}\Big)^{-1}, k \in \mathbb{Z}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t, \lambda_k) := \exp\{-t f(\lambda_k)\},$$

$$Q_2(\lambda_k) := \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_k)\}\Big)^{-1} \equiv$$

$$\equiv \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k)\Big)^{-1}.$$

Тоді

$$\tilde{c}_k(t) \equiv c_k(u(t, \cdot)) = Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g), k \in \mathbb{Z},$$

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_k(t) e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) e^{ikx} =$$

$$= G(t, x) * g(x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

де

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx},$$

$$G(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}.$$

Із обмежень, накладених на функцію f та параметри задачі (8), (9) випливає, що при кожному $t \in (0, T]$ справджуються нерівності

$$|c_k(G)| = |Q_1(t, \lambda_k)| \cdot |Q_2(\lambda_k)| \le$$

$$\le \exp\{-d_0 t \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)\} \times$$

$$\times \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{-d_0 t_n \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)\}\Big)^{-1} \le$$

$$\le \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n\Big)^{-1} \exp\{-d_0 t \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)\},$$

$$\lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(тут враховано, що $\mu > \sum_{n=1}^{m} \mu_n$). Звідси та з характеристики класу $H\langle m_k \rangle$ (див. умову (A)) випливає, що $G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$. Справді, нехай $d_0 t < 1$. Якщо φ – опукла на $[0, \infty)$ функція, то крім нерівності (3) для такої функції справджуються нерівності:

а) $\forall \alpha \in (0, 1)$ $\forall x \in [0, \infty)$: $\varphi(\alpha x) \le \alpha \varphi(x)$;
б) $\forall \alpha \ge 1$ $\forall x \in [0, \infty)$: $\varphi(\alpha x) \ge \alpha \varphi(x)$.

Урахувавши а) запишемо нерівність:

$$-d_0 t \ln \rho(\mu_0 \lambda_k) \le -\ln \rho(d_0 t \mu_0 \lambda_k) \equiv$$

$$\equiv -\ln \rho(a_1 \lambda_k), \quad a_1 = d_0 t \mu_0.$$

Отже, якщо $d_0 t < 1$, то

$$|c_k(G)| \le \gamma e^{-\ln \rho(a_1 \lambda_k)} \equiv \gamma \rho^{-1}(a_1 \lambda_k), k \in \mathbb{Z},$$

$$\gamma = \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n\Big)^{-1}.$$

Якщо $d_0 t > 1$, то $d_0 t = [d_0 t] + \{d_0 t\}$. Тоді

$$e^{-d_0 \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} = e^{-[d_0 t] \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \cdot e^{-\{d_0 t\} \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \le$$

$$\le e^{-\{d_0 t\} \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \le e^{-\ln \rho(a_2 \lambda_k)} =$$

$$= \rho^{-1}(a_2 \lambda_k), a_2 = \{d_0 t\} \mu_0.$$

Таким чином, якщо $d_0 t > 1$, то

$$|c_k(G)| \le \gamma \rho^{-1}(a_2 \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $a = \min\{a_1, a_2\} = \{d_0 t\} \mu_0$. Тоді при фіксованому $t \in (0, T]$ справджується нерівність

$$|c_k(G)| \le \gamma \rho^{-1}(a \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

з якої (та умови (A)) випливає, що $G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$, $m_k = k! \rho_k$, при кожному $t \in (0, T]$. Оскільки $u(t, \cdot) = G(t, \cdot) * g$, де $g \in H \subset H'\langle m_k \rangle$, $G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ (при кожному $t \in (0, T]$), то на підставі відповідної властивості згортки стверджуємо, що $u(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Розв'язок задачі (8), (9) єдиний. Для доведення цієї властивості скористаємося тим, що будь-який розв'язок рівняння (8) зображається формулою (10), тобто

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(G_1)c_k(g)e^{ikx}\equiv G_1(t,x)*g(x),$$

де

$$g=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_ke^{ikx}, c_k=(g,e^{-ikx}),$$

$$G_1(t,x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_1(t,\lambda_k)e^{ikx},$$

$G_1(t,x)$ – фіксована функція з простору $H\langle m_k\rangle$, g – довільно фіксована функція з H (те, що $G_1(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$ випливає з оцінки $|Q_1(t,\lambda_k)|\le\gamma\rho^{-1}(a\lambda_k)$, a, $\gamma>0$, $k\in\mathbb{Z}$, яка рівносильна тому, що $|c_k(G_1)|\le\gamma\rho^{-1}(a\lambda_k)$, $k\in\mathbb{Z}$).

Якщо $g=0$, то $c_k=0$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, звідки й випливає, що $u(t,x)=0$ для кожного $t\in(0,T]$, що й доводить єдиність розв'язку задачі (8), (9).

Зауважимо, що правильним є і обернене твердження: якщо функція $u(t,x)$ зображається формулою (10), то вона є розв'язком рівняння (8). Справді,

$$A_fu=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(A_fu)e^{ikx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_fu,e^{-ikx})e^{ikx}=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(u,A_fe^{-ikx})e^{ikx}=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(u,f(\lambda_k)e^{-ikx})e^{ikx}=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t)e^{ikx},$$

$\tilde{c}_k(t)=(u,e^{-ikx}),\lambda_k=G(k)=G(-k),k\in\mathbb{Z};$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)e^{ikx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{\partial u}{\partial t},e^{-ikx}\Big)e^{ikx}=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\frac{\partial}{\partial t}(u,e^{-ikx})e^{ikx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{c}_k'(t)e^{ikx}.$$

Далі зазначимо, що $c_k(t)$ є розв'язком рівняння

$$\tilde{c}_k'(t)+f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t)=0,\ k\in\mathbb{Z},$$

тобто $\tilde{c}_k'(t)=-f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$. Звідси випливає, що u – розв'язок рівняння (8).

Таким чином, *функція* $u(t,x)$ *є розв'язком рівняння* (8) *тоді й лише тоді, коли вона зображається у вигляді* (10). Зазначимо також, що розв'язок задачі (8), (9) неперервно залеить від граничної умови.

Підсумуємо одержані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 3. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (8), (9) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x)=G(t,x)*g(x),\quad (t,x)\in\Omega,$$

де

$$G(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)e^{ikx},$$

$$g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(g)e^{ikx}\in H,$$

при цьому $\{G(t,\cdot),u(t,\cdot)\}\subset H\langle m_k\rangle$, $m_k=k!\rho_k$, *при кожному* $t\in(0,T]$.

Зазначимо, що внаслідок відповідної властивості згортки $u(t,\cdot)=G(t,\cdot)*g\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$, якщо $g\in H'\langle m_k\rangle$. Доведемо, що тоді функція $u(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (8), який задовольняє умову

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}u(t,\cdot)=g,\quad (11)$$

$$g\in H'\langle m_k\rangle,$$

де границі розглядаються в просторі $H'\langle m_k\rangle$.

Лема 2. *Функція* $G(t,\cdot)$, $t\in(0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $H\langle m_k\rangle$, *диференційовна по* t.

Доведення. Оскільки $H\langle m_k\rangle = H\{m_k\}=\bigcup_{\alpha>0}H_{\{\alpha\}}$, то для доведення твердження досить показати, що

$$\Phi_{\Delta t}(x):=\frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t,x)-G(t,x)]\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)$$

у просторі $H\{m_k\}$ (якщо $\Delta t<0$, то вважаємо Δt таким, що $t+\Delta t\ge t/2$). Це означає, що

1) множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : |\Delta t| \le \varepsilon_0, \Delta t \ne 0\}$ ($\varepsilon_0 > 0$ – досить мале фіксоване число) обмежена в просторі $H\{m_k\}$, тобто

$$\exists c > 0 \ \forall \Delta t \ (|\Delta t| \le \varepsilon_0, \Delta t \ne 0):$$

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \le c$$

при деякому $\alpha > 0$ та фіксованому $t \in (0, T]$;

2) $\Phi_{\Delta t} \to \dfrac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H\langle m_k \rangle$, тобто

$$\Big\|\Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)\Big\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \to 0, \ \Delta t \to 0.$$

Передусім зазначимо, що функція $G(t, x)$ диференційовна по $t \in (0, T]$ (при кожному $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\tilde{\varepsilon}, T]$, де $\tilde{\varepsilon} > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, t \in [\tilde{\varepsilon}, T], \tag{12}$$

збігається рівномірно по t (при фіксованому x), бо тоді

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} = = -\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}. \tag{13}$$

Оскільки

$$|e^{ikx}| = 1, k \in \mathbb{Z}, |Q_2(\lambda_k)| \le \gamma,$$

$$\gamma = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1},$$

то для $t \ge \tilde{\varepsilon}$ (з урахуванням умов (6), (7)) маємо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 : \ \alpha(t, x) :=$$

$$= | - f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}| \le$$

$$\le \gamma f(\lambda_k) \exp\{-\tilde{\varepsilon} f(\lambda_k)\} \le$$

$$\le c_\varepsilon \gamma \exp\{-\tilde{\varepsilon} d_0 \ln \rho(c_0 \lambda_k)\} \exp\{\ln \rho(\varepsilon \lambda_k)\}.$$

Вважаючи, що $\tilde{\varepsilon} d_0 < 1$ та врахувавши опуклість функції $\ln \rho$, прийдемо до нерівності:

$$\alpha(t, x) \le c_\varepsilon \gamma \exp\{-\ln \rho(\tilde{\varepsilon} d_0 - \varepsilon)\lambda_k\}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то покладемо $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} d_0 / 2$. Тоді

$$\alpha(t, x) \le \tilde{c} \exp\Big\{-\ln \rho\Big(\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} d_0 \lambda_k\Big)\Big\} = \tilde{c} \rho^{-1}(\beta \lambda_k), \tag{14}$$

$$\beta = \tilde{\varepsilon} d_0 / 2, t \in [\tilde{\varepsilon}, T], x \in \mathbb{R}.$$

Із (14) та властивостей функції ρ випливає, що ряд (13) збігається рівномірно при $t \ge \tilde{\varepsilon}$. Цим доведено, що функція $G(t, \cdot)$ диференційовна по t на відрізку $[\tilde{\varepsilon}, T]$. Оскільки $\tilde{\varepsilon} > 0$ – довільне, то функція $G(t, \cdot)$ диференційовна по t на проміжку $(0, T]$, при цьому правильним є співвідношення (13), яке виконується у кожній точці $t \in (0, T]$. Зазначимо також, що при кожному $t \in (0, T]$ функція $\dfrac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)$ є елементом простору $H\langle m_k \rangle$, оскільки

$$c_k\Big(\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)\Big) = -f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k)$$

і, як випливає з (14), для коефіцієнтів Фур'є функції $\dfrac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)$ справджується оцінка

$$\Big|c_k\Big(\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)\Big)\Big| \le c\rho^{-1}(\beta \lambda_k) = c e^{-\ln \rho(\beta G(|k|))} \le$$

$$\le e^{-\ln \rho(\beta |k|)} = c\rho^{-1}(\beta |k|), k \in \mathbb{Z}.$$

Це і означає (див. (A)), що $\dfrac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Оскільки

$$\Phi_{\Delta t}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta t}\Big[e^{-(t+\Delta t) f(\lambda_k)} - -e^{-t f(\lambda_k)}\Big] Q_2(\lambda_k) e^{ikx} =$$

$$= -\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) e^{-(t+\theta\Delta t) f(\lambda_k)} Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, 0 < \theta < 1,$$

то

$$c_k(\Phi_{\Delta t}) = -f(\lambda_k) Q_1(t + \theta \Delta t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k).$$

Тоді для довільно фіксованого $\alpha > 0$, конкретне значення якого вкажемо пізніше, справджуються співвідношення:

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\Phi_{\Delta t})|^2 \rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k)\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big)e^{-2(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}Q_2^2(\lambda_k) \le$$

$$\le \gamma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k)\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big)e^{-2tf(\lambda_k)} \le$$

$$\le \gamma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k)e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)}e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)},$$

$$a_1 = \{d_0 t\}c_0, \gamma = \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\Big)^{-1},$$

d_0, c_0 – сталі з умови (7). З урахуванням (6) та властивості опуклості функції $\ln\rho$ маємо, що

$$f^2(\lambda_k)e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)} \le c_\varepsilon^2 e^{2\ln\rho(\varepsilon\lambda_k)-2\ln\rho(a_1\lambda_k)} \le$$

$$\le c_\varepsilon^2 e^{-2\ln\rho((a_1-\varepsilon)\lambda_k)} = c_\varepsilon^2 e^{-2\ln\rho(a_2\lambda_k)}, a_2 = a_1/2,$$

якщо покласти $\varepsilon = a_1/2$. Із властивостей функції ρ та $\tilde{G}$ випливають нерівності

$$\rho(a_2\lambda_k) \ge a_2\lambda_k = a_2\tilde{G}(|k|) \ge a_2|k|, k\in\mathbb{Z};$$

тоді, знову скориставшись властивістю опуклості $\ln\rho$, прийдемо до нерівностей:

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \le \gamma^2 c_\varepsilon^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)}e^{-2\ln\rho(a_2|k|)} \le$$

$$\le b\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho\left(\left(a_2-\frac{1}{\alpha}\right)|k|\right)} = b\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho(a_3|k|)} =$$

$$= b\sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho^{-2}(a_3|k|) < \infty, a_3 = a_2 - \frac{1}{\alpha}$$

для фіксованого $\alpha > 0$ такого, що $a_2 - 1/\alpha > 0$ (тобто для $\alpha > 1/a_2$). Отже, множина функцій $\{\Phi_{\Delta t}, |\Delta t| \le \varepsilon_0, \Delta t \ne 0\}$ обмежена в просторі $H\{m_k\} = H\langle m_k\rangle$.

Перевіримо виконання умови 2). Нехай

$$\Psi_{\Delta t}(x) := \Phi_{\Delta t}(x) - \frac{\partial}{\partial t}G(t,x) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}[e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}]Q_2(\lambda_k)f(\lambda_k)e^{ikx}.$$

Звідси випливає, що

$$\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)}|e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}|^2\times$$

$$\times Q_2^2(\lambda_k)f^2(\lambda_k) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)}e^{-2(t+\theta_1\Delta t)f(\lambda_k)}\times$$

$$\times f^4(\lambda_k)\theta^2(\Delta t)^2Q_2^2(\lambda_k) \le$$

$$\le \gamma^2\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)}e^{-2tf(\lambda_k)}f^4(\lambda_k)(\Delta t)^2,$$

$$0 < \theta_1 < 1, \gamma = \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\Big)^{-1}.$$

Внаслідок (6) та властивості опуклості функції $\ln\rho$

$$f^4(\lambda_k)e^{-2tf(\lambda_k)} \le c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)}e^{4\ln\rho(\varepsilon\lambda_k)} \le$$

$$\le c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)}e^{2\ln\rho(2\varepsilon\lambda_k)} \le c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho((a_1-2\varepsilon)\lambda_k} =$$

$$= c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_4\lambda_k)}, a_4 = a_1/2,$$

якщо покласти $\varepsilon = a_1/4$. Оскільки

$$\rho(a_4\lambda_k) \ge a_4\lambda_k = a_4\tilde{G}(|k|) \ge a_4|k|, k\in\mathbb{Z},$$

то

$$\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \le \tilde{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)}\times$$

$$\times e^{-2\ln\rho(a_4|k|)}(\Delta t)^2 \le \tilde{c}(\Delta t)^2,$$

де

$$\tilde{b} = \gamma^2 c_\varepsilon^4, \tilde{c} = \tilde{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho\left(\left(a_4-\frac{1}{\alpha}\right)|k|\right)} < \infty$$

для довільно фіксованого $\alpha > 1/a_4$. Звідси вже випливає, що $\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\{\alpha\}}} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ (для $\alpha > 1/a_4$), тобто $\Phi_{\Delta t} \to \frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H\{m_k\} = H\langle m_k\rangle$, $m_k = k!\rho_k$. Лему доведено.

Наслідок 1. *Функція*

$$u(t,x) = G(t,x) * g = \langle g(y), G(t,x-y)\rangle,$$

$$g \in H'\langle m_k\rangle,$$

диференційовна по t, при цьому

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} G(t,x) * g.$$

Зазначимо, що функція $u(t,x) = G(t,x) * g$, $g \in H'\langle m_k\rangle$, задовольняє рівняння (8).

Лема 3. *Нехай*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, g \in H'\langle m_k\rangle, (t,x) \in \Omega.$$

Тоді в просторі $H'\langle m_k\rangle$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g. \qquad (15)$$

Доведення. Для доведення (15) візьмемо довільний елемент $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi) e^{ikx} \in H\langle m_k\rangle$ і зазначимо, що внаслідок неперервності вкладення $H\langle m_k\rangle$ в $H'\langle m_k\rangle$ та ортонормованості базису $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\langle u(t,\cdot), \varphi\rangle = (u(t,\cdot), \varphi)_H = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\varphi).$$

Тоді

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle u(t,\cdot),\varphi\rangle - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} \langle u(t,\cdot),\varphi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\varphi) -$$

$$- \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\varphi);$$

при цьому ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\varphi)$ збігається рівномірно на $[0,T]$. Цей факт випливає з вигляду коефіцієнтів $c_k(u(t,\cdot))$, $k \in \mathbb{Z}$, та нерівності

$$|c_k(u(t,\cdot))| \cdot |c_k(\varphi)| \le \tilde{c} |c_k(g)| \cdot |c_k(\varphi)|,$$

$$t \in [0,T], k \in \mathbb{Z}.$$

Справді, за умовою $g \in H'\langle m_k\rangle$, тобто

$$\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}: \ |c_k(g)| \le c\rho(\mu|k|).$$

Функція $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, тому, внаслідок умови (A),

$$\exists \mu_0 > 0 \ \exists c_0 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}: \ |c_k(\varphi)| \le c_0 \rho^{-1}(\mu_0|k|).$$

Покладемо $\mu = \mu_0/2$. Тоді, урахувавши нерівність опуклості (3) знайдемо, що

$$|c_k(g)| \cdot |c_k(\varphi)| \le c c_0 \rho^{-1}(\mu_0|k|) \rho\Big(\frac{\mu_0}{2}|k|\Big) =$$

$$= c c_0 e^{-\ln\rho(\mu_0|k|)} e^{\ln\rho\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right)} \le c_0 c e^{-\ln\rho\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right)} =$$

$$= \tilde{c}\rho^{-1}\Big(\frac{\mu_0}{2}|k|\Big) \le \tilde{c}|k|^{-2}, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

З останньої нерівності випливає сформульована властивість.

Таким чином,

$$\lim_{t\to t_n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t_n,\cdot)) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t_n,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\varphi). \qquad (16)$$

$$\lim_{t\to+0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(0,\cdot)) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\varphi). \qquad (17)$$

Урахувавши (16), (17) знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle u(t,\cdot),\varphi\rangle - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} \langle u(t,\cdot),\varphi\rangle =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big) Q_2(\lambda_k)\right] c_k(g) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)}{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)} c_k(g) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) c_k(\varphi) = \langle g, \varphi\rangle, \varphi \in H\langle m_k\rangle,$$

$$m_k = k!\rho_k, g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx} \in H'\langle m_k\rangle,$$

що й потрібно було довести.

Оскільки $u(t,x) = G(t,x)$, якщо $g = \delta \in H'\langle m_k\rangle$, то функція $G(t,x)$ є розв'язком рівняння (8) і з (15) випливає, що функція $G(t,x)$ в просторі $H'\langle m_k\rangle$ задовольняє граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} G(t,\cdot) = \delta.$$

Надалі $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової за часом задачі для рівняння (8).

Лема 3 дозволяє ставити багатоточкову за часом задачу для рівняння (8) у розумінні (15), де граничний елемент g належить до простору $H'\langle m_k\rangle$ (при цьому відповідні границі в (15) розглядаються в просторі $H'\langle m_k\rangle$).

Правильним є наступне твердження.

Теорема 4. *Багатоточкова задача* (8), (15) *коректно розв'язна, її розв'язок зображається формулою*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, \quad (t,x) \in \Omega,$$

$u(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Доведення. Із наведених вище тверджень випливає, що доведення вимагає властивість єдиності розв'язку задачі (8), (15) та його неперервної залежності від граничної умови.

Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (8), (15). Оскільки u – розв'язок рівняння (8) (у вказаному вище розумінні), то u зображається у вигляді (див. (10)):

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k Q_1(t,\lambda_k) e^{ikx}.$$

Якщо

$$c_k = c_k(g) Q_2(\lambda_k),$$

$$g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx} \in H'\langle m_k\rangle,$$

то u задовольняє умову (15). Отже, за умови $g = 0$ маємо $c_k(g) = \langle g, e^{-ikx}\rangle = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто $u(t,x) = 0$, $(t,x) \in \Omega$.

Розв'язок вказаної задачі неперервно залежить від граничної умови. Справді, нехай $\{g, g_n, n \geq 1\} \subset H'\langle m_k\rangle$, причому $g_n \to g$ при $n \to \infty$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$. Звідси випливає, що

$$c_k(g_n) = \langle g_n, e^{-ikx}\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle g, e^{-ikx}\rangle = c_k(g)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}$. Крім того, $\{u, u_n, n \geq 1\} \subset H\langle m_k\rangle$, де u_n – розв'язок задачі (8), (15), який відповідає граничному елементу $g_n \in H'\langle m_k\rangle$. Тоді

$$\forall \varphi \in H\langle m_k\rangle : \langle u_n, \varphi\rangle = (u_n, \varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(G) c_k(g_n) c_k(\varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(G) c_k(g) c_k(\varphi) = (u,\varphi) = \langle u, \varphi\rangle.$$

Отже, $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$. Теорема доведена.

6. Функція $G(t,\cdot)$ – фундаментальний розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (8), є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0,T]$ зі значеннями в просторі $H\langle k!\rho_k\rangle$ (див. лему 2). Оскільки гранична узагальнена функція $g \in H'\langle k!\rho_k\rangle$ – згортувач у просторі $H\langle k!\rho_k\rangle$, а розв'язок $u(t,\cdot)$ задачі (8), (15) подається у вигляді згортки $G(t,x) * g$, то звідси дістаємо, що граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * g \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(t_i,\cdot) * g = u(t_i,\cdot),$$

$$t_i \in (0,T], i \in \{1,\ldots,m\},$$

виконуються в просторі $H\langle k!\rho_k\rangle$. Із означення збіжності в цьому просторі випливає, зокрема, що $u(t,\cdot) \to u(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset [0,2\pi]$. Вказану збіжність в (15) погіршує перший доданок, оскільки для функції $G(t,\cdot)$ точка $t = 0$ є особливою. Однак виявляється, що якщо граничну функцію g брати з вужчого, ніж $H'\langle k!\rho_k\rangle$ класу, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $G(t_i,\cdot) * g$ при $t \to +0$.

Розглянемо простір Жевре $H\langle k^{k\beta}\rangle \equiv G_{\{\beta\}}$ при $\beta > 1$. Оскільки в такому просторі є фінітні функції [8], то для ультрарозподілу $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, має зміст таке означення: узагальнена функція $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, дорівнює нулеві на інтервалі $(a,b) \subset [0,2\pi]$, якщо $\langle g, \varphi \rangle = 0$ для довільної основної функції $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, носій якої міститься в (a, b).

Надалі вважатимемо, що функція f, за якою будується оператор A_f, додатково задовольняє умови:

а) вона є парною, двічі неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall k \in \{0, 1, 2\} \; \exists c_{\varepsilon,k} > 0 \; \forall \sigma \in \mathbb{R} :$$

$$|f^{(k)}(\sigma)| \leq c_{\varepsilon,k} \rho(\varepsilon\sigma),$$

б) f – однорідна порядку $\gamma > 1$ функція, тобто $f(\lambda\sigma) = \lambda^{\gamma} f(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, для кожного $\lambda > 0$.

Крім того, вважаємо, що $G(\sigma) = |\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

При обґрунтуванні властивості локалізації використовуватимемо наступне допоміжне твердження.

Лема 4. *Нехай* $\tilde{G}(t, x) = F^{-1}_{\sigma \to x}[Q(t, \sigma)](x)$,

$$Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Якщо $x \neq 0$, *то функція* $\tilde{G}(t, x)$ *задовольняє нерівність*

$$|\tilde{G}(t, x)| \leq ct^{\mu} |x|^{-2}, \mu = 1 - 1/\gamma > 0, x \neq 0, \tag{18}$$

стала c *не залежить від* t *(тут* Q_1, Q_2 *– функції, розглянуті раніше).*

Зазначимо, що доведення леми 4 використовує властивості а), б) функції f.

Теорема 5. *Нехай* $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$ *і* $g = 0$ *на інтервалі* $(a, b) \subset [0, 2\pi]$. *Тоді розв'язок задачі* (8), (15) *з граничною функцією* g *прямує до нуля при* $t \to +0$ *рівномірно на довільному відрізку* $[c, d] \subset (a, b)$.

Доведення. Нехай $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$. Побудуємо функцію $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, з носієм в (a, b) таку, що $\varphi = 1$ на $[a_1, b_1]$. Функції $\varphi(\xi) G(t, x - \xi)$, $(1 - \varphi(\xi)) G(t, x - \xi)$, як функції аргументу ξ (при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$), належать до простору $G_{\{\beta\}}$, тому має зміст рівність

$$u(t, x) = \langle g(\xi), \varphi(\xi) G(t, x - \xi) \rangle +$$

$$+ \langle g(\xi), (1 - \varphi(\xi)) G(t, x - \xi) \rangle.$$

Враховуючи, що $g = 0$ на (a, b), а також включення $\mathrm{supp}(\varphi(\xi) G(t, x - \xi)) \subset (a, b)$, приходимо до співвідношення

$$u(t, x) = \langle g(\xi), \tilde{\gamma}(\xi) G(t, x - \xi) \rangle,$$

$$\tilde{\gamma}(\xi) = 1 - \varphi(\xi),$$

або

$$u(t, x) = t^{\nu} \langle g(\xi), t^{-\nu} \tilde{\gamma}(\xi) G(t, x - \xi) \rangle,$$

$$\nu = 1 - 1/\gamma > 0, t > 0.$$

Отже, для доведення сформульованого твердження досить перевірити, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{\nu} \tilde{\gamma}(\xi) G(t, x - \xi)$ обмежена в просторі $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, рівномірно по t (при досить малих значеннях t) і $x \in [c, d]$, тобто, що

$$|D^m_{\xi} \Phi_{t,x}(\xi)| \leq cB^m m^{m\beta}, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

де сталі c, $B > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним вище способом. Зауважимо ще, що $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [a_1, b_1]$, тому оцінку (19) досить отримати для $\xi \in [0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1]$.

Передусім отримаємо оцінку вигляду (19) для похідних функції

$$G(t, x - \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q(t, |k|) e^{ik(x - \xi)}.$$

На підставі формули Пуассона для підсумовування тригонометричних рядів (див. [13]) маємо, що

$$G(t, x - \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F[F^{-1}[Q(t, \sigma)]](k) e^{ik(x - \xi)} =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} F[\tilde{G}(t, x)](k) e^{ik(x - \xi)} =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(t, x - \xi + 2k\pi). \tag{20}$$

Цей ряд при $t > 0$ і $x \in [c, d]$ є аналітичною функцією змінної ξ, оскільки, як було доведено раніше, $G(t, \cdot) \in H\langle k! \rho_k \rangle$ при кожному $t > 0$.

Візьмемо обмежену область $Q \subset \mathbb{C}$, яка містить відрізок $[c, d]$ і не містить множину $[0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1]$, з гладкою межею ∂Q (∂Q не перетинає відрізок $[c,d]$). Тоді, згідно з інтегральною теоремою Коші,

$$D_\xi^m G(t,x-\xi)=\frac{m!}{2\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{G(t,x-z)}{(z-\xi)^{m+1}}dz,$$

$$x\in[c,d],\xi\in[0,2\pi]\setminus[a_1,b_1].$$

Звідси дістаємо, що

$$|D_\xi^m G(t,x-\xi)|\le\frac{m!}{2\pi}\frac{l}{A^{m+1}}\max_{z\in\partial Q}|G(t,x-z)|,$$

де l – довжина контура ∂Q, $A=\inf|z-\xi|$, $z\in\partial Q$, $\xi\in[0,2\pi]\setminus[a_1,b_1]$. Для того, щоб здійснити оцінку $\max\limits_{z\in\partial Q}|G(t,x-z)|$, скористаємося формулою (20). Оскільки $x\in[c,d]$, $\xi\in[0,2\pi]\setminus[a_1,b_1]$, то $|x-\xi|\ge a_0>0$, де $a_0=\min\{|a_1-c|,|d-b_1|\}$, то, згідно з оцінкою (18) та формулою (20),

$$|\tilde G(t,x-\xi+2\pi k)|\le ct^\nu|x-\xi+2\pi k|^{-2},$$

$$\nu=1-1/\gamma>0.$$

За рахунок вибору відрізка $[a_1,b_1]$ можна підібрати число b_0, $0<b_0<1$, так, що

$$|x-\xi+2\pi k|\ge a_0+b_0|k|,x\in[c,d],$$

$$\xi\in[0,2\pi]\setminus[a_1,b_1].$$

Тоді

$$t^{-\nu}|G(t,x-\xi)|\le c\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x-\xi+2\pi k|^{-2}\le$$

$$\le c\sum_{k\in\mathbb{Z}}(a_0+b_0|k|)^{-2}=M<\infty,$$

стала M не залежить від t, x, ξ. Взявши до уваги неперервність $G(t,x-z)$ за сукупністю змінних $t>0$, $x\in[c,d]$, $z\in\overline{Q}$, підберемо область $Q\subset\mathbb{C}$ так, щоб справджувалась нерівність $t^{-\nu}|G(t,x-z)|\le\tilde M$, $\tilde M=M+1$.

Отже,

$$t^{-\nu}|D_\xi^m G(t,x-\xi)|\le c_1B_1^m m!\le c_2B_2^m m^m, \tag{21}$$

$m\in\mathbb{Z}_+$. Оскільки $\varphi\in G_{\{\beta\}}$, $\beta>1$, то також

$$|D_\xi^m\varphi(\xi)|\le c_3B_3^m m^{m\beta},m\in\mathbb{Z}_+. \tag{22}$$

З (21), (22) випливають оцінки:

$$|D_\xi^m\Phi_{t,x}(\xi)|\le t^{-\nu}\sum_{l=0}^m C_m^l|D_\xi^l\gamma(\xi)|\times$$

$$\times|D_\xi^{m-l}G(t,x-\xi)|\le c_4B_4^m m^{m\beta},m\in\mathbb{Z}_+,$$

де $c_4=c_2(1+c_3)$, $B_4=2\max\{B_2,B_3\}$, сталі $c_4,B_4>0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним вище способом. Твердження доведено.

Наслідок 2. *Нехай $g\in G'_{\{\beta\}}\subset H'\langle k!\rho_k\rangle$, $\beta>1$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (8), (15) *з граничною функцією g. Якщо $g=0$ на інтервалі $(a,b)\subset\mathbb{R}$, то граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,x)-\mu_1\lim_{t\to t_1}u(t,x)-\dots-$$

$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}u(t,x)=0,$$

справджується рівномірно відносно x на довільному відрізку $[c,d]\subset(a,b)\subset[0,2\pi]$.

Символом $M_{\{\beta\}}$ позначимо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $G_{\{\beta\}}$, $\beta>1$.

Теорема 6 (властивість локалізації). *Нехай $g\in G'_{\{\beta\}}\subset H'\langle k!\rho_k\rangle$, $\beta>1$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (8), (15) *з граничною функцією g. Якщо узагальнена функція g збігається на інтервалі $(a,b)\subset\mathbb{R}$ з 2π-періодичною функцією $\psi\in M_{\{\beta\}}$, то на довільному проміжку $[c,d]\subset(a,b)\subset[0,2\pi]$ граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,x)-\mu_1\lim_{t\to t_1}u(t,x)-\dots-$$

$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}u(t,x)=\psi(x), \tag{23}$$

виконується рівномірно відносно $x\in[c,d]$.

Доведення. Нехай φ – основна функція, побудована при доведенні теореми 5. Оскільки $\varphi(g-\psi)=0$ на (a,b), то $\varphi(g-\psi)=0$ на $[c,d]$, $(1-\varphi)g=0$ на $[a_1,b_1]$. З наслідку 2 випливає, що граничні співвідношення

$$\lim_{t\to+0}\langle\varphi(g-\psi),G(t,x-\xi)\rangle=0,$$

$$\lim_{t\to+0}\langle(1-\varphi)g,G(t,x-\xi)\rangle=0,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\langle\varphi(g-\psi), G(t,x-\xi)\rangle = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\langle(1-\varphi)g, G(t,x-\xi)\rangle = 0$$

виконуються рівномірно відносно $x \in [c,d]$. Крім того,

$$u(t,x) = \langle g, G(t,x-\xi)\rangle = \langle\varphi(g-\psi), G(t,x-\xi)\rangle +$$

$$+\langle(1-\varphi)g, G(t,x-\xi)\rangle + \langle\varphi\psi, G(t,x-\xi)\rangle.$$

Урахувавши (24) робимо висновок, що для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle\varphi\psi, G(t,x-\xi)\rangle -$$

$$-\sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}\langle\varphi\psi, G(t,x-\xi)\rangle = \psi(x)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [c,d]$.

Оскільки ψ – мультиплікатор у просторі $G_{\{\beta\}}$, φ – фінітна функція з цього ж простору, то $\varphi\psi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$. Тоді

$$\langle\varphi\psi, G(t,x-\xi)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,x-\xi)(\varphi\psi)(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,|k|)Q_2(|k|)e^{ik(x-\xi)}(\varphi\psi)(\xi)d\xi =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi\psi)Q_1(t,|k|)Q_2(|k|)e^{ikx} \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t,x),$$

$$c_k(\varphi\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi\psi)(\xi)e^{-ik\xi}d\xi.$$

Зазначимо, що ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t,x)$ збігається рівномірно по t на $[0,T]$ та рівномірно відносно $x \in [0,2\pi]$ (доведення цієї властивості здійснюється за схемою доведення леми 3). Тоді

$$\lim_{t\to t_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t_0,x), t_0 \in [0,T].$$

Звідси випливають співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle\varphi\psi, G(t,x-\xi)\rangle -$$

$$-\sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}\langle\varphi\psi, G(t,x-\xi)\rangle =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m}\mu_n Q_1(t_n,|k|)\Big)Q_2(|k|)\right]c_k(\varphi\psi)e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m}\mu_n Q_1(t_n,|k|)}{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m}\mu_n Q_1(t_n,|k|)}c_k(\varphi\psi)e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi\psi)e^{ikx} = (\varphi\psi)(x),$$

які справджуються рівномірно відносно $x \in [0,2\pi]$. Оскільки $\varphi\psi = \psi$ на $[c,d] \subset [0,2\pi]$, то співвідношення (23) виконуються рівномірно відносно $x \in [c,d]$.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нахушев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 92–101.

2. *Нахушев А.М.* Уравнения математской биологии. – М.: Высшая, школа, 1995. – 301 с.

3. *Белавин И.А., Капица С.П., Курдюмов С.П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1988. – Т. 38, № 6. – С. 885–902.

4. *Майков А.Р., Поезд А.Д., Якунин С.А.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 8. – С. 1267-1271.

5. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.

6. *Мамян А.Х.* Общие граничные задачи в слое / ДАН СССР. -182. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.

7. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Тригонометрические ряды и обощенные периодические функции // Дан СССР. – 1981. – Т. 257, № 4. – С. 799–803.

8. *Горбачук В.И.* О рядах Фурье периодических ультрараспределений // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 2. – С. 144–150.

9. *Бабенко К.И.* Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций / Труды Московского матем. обва. – 1956. – Т. 5. – С. 523–542.

10. *Городецький В.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. – Чернівці: Рута, 2005. – 291 с.

11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

12. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

13. *Стейн И., Вейс. Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 334 с.