УДК 515.12

©2014 р. О.О. Карлова

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПЛОЩИНА ЗОРҐЕНФРЕЯ НЕ Є δ-НОРМАЛЬНО ВІДОКРЕМНИМ ПРОСТОРОМ

Доведено, що площина Зорґенфрея не є δ-нормально відокремним простором.

We prove that the Sorgenfrey plane is not a δ-normally separated space.

1. Зв'язок між C-вкладеними і C^*-вкладеними множинами

Підмножина E топологічного простору X називається

- *C-вкладеною (C^*-вкладеною) в X*, якщо довільну неперервну (обмежену) дійснозначну функцію f на E можна продовжити до неперервної функції на весь простір X;
- *z-вкладеною в X*, якщо кожну функціонально замкнену в E множину можна продовжити до функціонально замкненої в X множини.

Зрозуміло, що

$$\begin{array}{ccc} E - C\text{-вкладена} \Rightarrow & E - C^*\text{-вкладена} \\ & \Downarrow \\ & E - z\text{-вкладена}. \end{array}$$

Жодна з обернених імплікацій не вірна, як показують наступні два твердження.

Твердження 1. *Нехай $X = \mathbb{R}$ і $E = (-1,0) \cup (0,1)$. Тоді множина E є z-вкладеною, але не C^*-вкладеною в X.*

Доведення. Легко бачити, що E є z-вкладеною в множиною $\mathbb{R}$. Справді, якщо F – довільна функціонально замкнена множина в E і D – така замкнена множина в $\mathbb{R}$, що $D \cap E = F$, то, врахувавши, що простір $\mathbb{R}$ досконало нормальний, ми одержимо, що множина D функціонально замкнена в $\mathbb{R}$.

Покажемо, що E не є C^*-вкладеною в X. Розглянемо неперервну обмежену функцію $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, якщо $x \in (0,1)$, і $f(x) = 0$, якщо $x \in E \setminus (0,1)$, і припустимо, що існує неперервне продовження $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функції f. Тоді $\lim\limits_{x \to 0+0} g(x) = 1$ і $\lim\limits_{x \to 0-0} g(x) = 0$, а це суперечить неперервності функції g в точці $x = 0$.

Твердження 2. *Нехай $X = \beta\mathbb{N}$ – компактифікація Стоуна-Чеха множини натуральних чисел і $E = \mathbb{N}$. Тоді множина E є C^*-вкладеною, але не є C-вкладеною в X.*

Доведення. Зазначимо спочатку, що згідно з [5, с. 266] довільний цілком регулярний простір X є C^*-вкладеним в βX.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $f(n) = n$. Тоді функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ неперервна і не обмежена. Припустимо, що існує неперервне продовження $g : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ функції f. Оскільки простір $\beta\mathbb{N}$ компактний, то функція g обмежена, звідки випливає суперечність. Таким чином, E не є C-вкладеною множиною в X.

Теорема 1. *Нехай X – цілком регулярний простір з першою аксіомою зліченності і $E \subseteq X$ – C^*-вкладена множина. Тоді E – замкнена в X.*

Доведення. Міркуючи від супротивного, припустимо, що існує $x_0 \in \overline{E} \setminus E$. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність з E, яка збігається до x_0. Зауважимо, що множина $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ компактна в X. Оскільки X задовольняє першу аксіому зліченності, а множина $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ дискретна, то для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ існує спадна послідовність відкритих множин $(G_{n,k})_{k=1}^{\infty}$, така, що $\{x_n\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_{n,k}$, $G_{n,k} \cap G_{m,l} = \emptyset$ для всіх натуральних різних n і m, $x_0 \notin G_{n,k}$ для всіх $k, n \in \mathbb{N}$. Позначимо $G_k = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} G_{n,k}$ і одержимо, що $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. Згідно з [5, с. 198] для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $f_k : X \to \mathbb{R}$, така, що $F \subseteq f^{-1}(0)$ і $X \setminus G_k \subseteq f^{-1}(1)$. Зрозуміло, що тоді $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}(0)$. Отже, множина F функціонально замкнена в X як перетин послідовності функціонально замкнених множин.

Позначимо $F_1 = \{x_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ і $F_2 = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Міркуючи аналогічно, ми одержимо, що кожна з множин $F_i' = F_i \cup \{x_0\}$ функціонально замкнена в X. Тому множини $F_1 = E \cap F_1'$ і $F_2 = E \cap F_2'$ функціонально замкнені в E, причому $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Нехай $f : E \to [0,1]$ – така неперервна функція, що $F_1 = f^{-1}(0)$ і $F_2 = f^{-1}(1)$. Оскільки E – C^*-вкладена множина в X, то існує неперервне продовження $g : X \to \mathbb{R}$ функції f. Використовуючи неперервність функції g в точці x_0, ми одержимо, що $g(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_{2n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_{2n})$. Звідси випливає суперечність, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_{2n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{2n-1}) = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{2n}) = 1$.

Підмножини A і B топологічного простору X називаються *цілком відокремними* в цьому просторі, якщо існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, така, що $A \subseteq f^{-1}(0)$ і $B \subseteq f^{-1}(1)$.

В [1] була встановлена наступна характеризація C-вкладених множин.

Теорема 2 (R.Blair – A.Hager). *Підмножина E топологічного простору X є C-вкладеною в X тоді і тільки тоді, коли E – z-вкладена в X і цілком відокремна від довільної неперетинної з нею функціонально замкненої множини в X.*

Кажуть, що топологічний простір X *має властивість* $(C^* = C)$, якщо довільна C^*-вкладена множина $E \subseteq X$ є C-вкладеною в X.

Теорема 3. *Нехай X – досконало нормальний простір з першою аксіомою зліченності. Тоді X має властивість $(C^* = C)$.*

Доведення. Розглянемо довільну C^*-вкладену множину E в X. Тоді множина E є, очевидно, z-вкладеною в X. Нехай F – деяка функціонально замкнена множина в X, така, що $F \cap E = \emptyset$. Згідно з теоремою 1 множина E замкнена в X. Врахувавши, що простір X досконало нормальний, ми одержимо, що E функціонально замкнена в X. Візьмемо довільні дві неперервні функції $f, g : X \to \mathbb{R}$, такі, що $E = f^{-1}(0)$, $F = g^{-1}(0)$ і покладемо $h(x) = f(x)/(f(x) + g(x))$ для кожного $x \in X$. Тоді функція $h : X \to \mathbb{R}$ неперервна, причому $E = h^{-1}(0)$, а $F = h^{-1}(1)$. Таким чином, множини E і F цілком відокремні. Застосувавши теорему 2, ми отримаємо, що множина E є C-вкладеною в X.

Наступна проблема сформульована в [4] і наразі є відкритою.

Проблема 4. *Чи існує цілком регулярний простір з першою аксіомою зліченності, що містить замкнену C^*-вкладену множину, яка не є C-вкладеною?*

2. Основний результат

Зауважимо, що у випадку, коли X – довільний нормальний простір, а E – замкнена підмножина X, то вона є C-вкладеною в X згідно з теоремою Тітце-Урисона [5, с. 116]. Отже, в світлі проблеми 4 природно досліджувати цілком регулярні простори з першою аксіомою зліченності, які не є нормальними. Одним з прикладів таких просторів є *площина Зорґенфрея* $\mathbb{S}^2$, тобто, добуток прямих Зорґенфрея $\mathbb{S}$ (нагадаємо, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{S}$ – це числова пряма з топологією, базу околів точки $x \in \mathbb{R}$ в якій утворюють проміжки $[x, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$).

Простір X називається *δ-нормально відокремним* [3], якщо довільні дві неперетинні замкнені підмножини цього простору, одна з яких функціонально замкнена, цілком відокремні в X. Зрозуміло, що кожний δ-нормально відокремний простір має властивість $(C^* = C)$.

Нехай $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ і $\varepsilon > 0$. Позначимо

$$B[p;\varepsilon) = [x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon),$$
$$B(p;\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon).$$

Для множини $A \subseteq \mathbb{S}^2$ і числа $\varepsilon > 0$ позначимо $L(A;\varepsilon) = \{p \in \mathbb{S}^2 : B[p;\varepsilon) \subseteq A\}$.

Якщо $A \subseteq \mathbb{R}^2$, то через $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}A$ /$\mathrm{cl}_{\mathbb{S}^2}A$/ ми позначаємо замикання множини A в евклідовій топології на $\mathbb{R}^2$ /в топології площини Зорґенфрея/. Аналогічно, $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}A$ /$\mathrm{int}_{\mathbb{S}^2}A$/ означає внутрішність множини A в евклідовій топології /в топології на $\mathbb{S}^2$/.

Лема 1. *Нехай A – $\mathbb{S}^2$-замкнена множина, $\varepsilon > 0$ і $F = L(A;\varepsilon)$. Тоді множина F є $\mathbb{R}^2$-замкненою.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}F$. Покажемо, що $p_0 \in F$. Позначимо

$$U = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}B[p_0;\varepsilon)$$

і розглянемо довільну точку $p = (x, y) \in U$. Нехай

$$\delta = \min\{(x-x_0)/2, (y-y_0)/2, \\ (x_0+\varepsilon-x)/2, (y_0+\varepsilon-y)/2\}$$

і $p_1 = (x_1, y_1) \in B(p_0;\delta) \cap F$. Неважко перевірити, що $p \in B[p_1;\varepsilon)$. Тоді $p \in A$, оскільки $p_1 \in F$. Отже, $U \subseteq A$. Тоді

$$B[p_0;\varepsilon) = \mathrm{cl}_{\mathbb{S}^2}U \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{S}^2}A = A,$$

звідки випливає, що $p_0 \in F$.

Теорема 5. *Простір $\mathbb{S}^2$ не є δ-нормально відокремним.*

Доведення. Для зручності замість простору $\mathbb{S}^2$ ми будемо розглядати гомеоморфний йому простір $X = [0,1)^2$. Нехай C – канторова множина на відрізку $[0,1]$. Занумеруємо всі суміжні інтервали до множини C у послідовність $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ так, що $\mathrm{diam}\,(I_{n+1}) \leqslant \mathrm{diam}\,(I_n)$ для кожного $n \geqslant 1$. Нехай $I_n = (a_n, b_n)$ для кожного $n \geqslant 1$. Розглянемо множини

$$J_n = [(a_n+b_n)/2, b_n) \times \{1-a_n\},$$
$$A = \{(x,y) \in X : y < 1-x\},$$
$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n^2 \cup J_n),$$
$$E = A \cup B,$$
$$\Delta = \{(x,y) \in X : y = 1-x\},$$
$$F = (C \times [0,1]) \cap \Delta.$$

Зауважимо, що множини E і F замкнені в X, причому $E \cap F = \emptyset$ і множина F функціонально замкнена в X.

Покажемо, що множини E і F не є цілком відокремними в X. Припустимо, що існує відкрито-замкнена множина U, така, що

$$F \subseteq U \subseteq X \setminus E.$$

Тоді $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L(U; \frac{1}{n})$, причому кожна множина $F_n = L(U; \frac{1}{n})$ є $\mathbb{R}^2$-замкненою згідно з лемою 1. Оскільки F – $\mathbb{R}^2$-берівський простір, то існує таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$F \cap I \subseteq F_N \cap \Delta$$

для деякої відкритої в Δ множини I. Враховуючи, що $\mathrm{diam}\,(I_n) \to 0$, виберемо таке $n_1 > N$, що $(b_n - a_n)/2 < \frac{1}{N}$ для всіх $n \geqslant n_1$. Оскільки $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ є щільною множиною в C, то існує таке $n_2 > n_1$, що $p = (a_{n_2}; 1-a_{n_2}) \in I$. Тоді $B[p; \frac{1}{N}) \cap E = \emptyset$. Зауважимо, що

$$\frac{a_{n_2}+b_{n_2}}{2} < \frac{a_{n_2}}{2} + \frac{a_{n_2}}{2} + \frac{1}{N} = \frac{a_{n_2}}{2} + \frac{1}{N}.$$

Таким чином, $B[p; \frac{1}{N}) \cap J_{n_2} \neq \emptyset$, звідки випливає суперечність, адже $J_{n_2} \subseteq E$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. R. Blair, A. Hager *Extensions of zero-sets and of real-valued functions*, Math. Zeit. **136** (1974), 41–52.
2. L. Gillman, M. Jerison *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton (1960).
3. J. Mack *Countable paracompactness and weak normality properties*, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970), 265–272.
4. Open problems in topology II /ed. by Elliott Pearl/ Elsevier, 2007, 776 p.
5. Р. Энгелькинг *Общая топология*, М.: Мир (1986), 752 с.