УДК 517.9

©2014 р. І.О. Ластівка

Національний авіаційний університет

УМОВИ НЕКОЛИВНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІТО ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Для нелінійних стохастичних рівнянь Іто вивчаються умови неколивності на півосі їх розв'язків. Відповідні достатні умови дані в термінах коефіцієнтів рівнянь.

We study non-fluctuating conditions for nonlinear stochastic Ito equations in semi-axis of their solutions. We provide corresponding sufficient conditions in terms of the coefficients of the equations.

Вступ. У даній роботі вивчаються умови неколивності траєкторії розв'язків нелінійних стохастичних рівнянь Іто на півосі.

Розв'язки, траєкторії яких з ймовірністю 1 мають нескінченно багато нулів на півосі, називаються коливними. В противному випадку вони називаються неколивними на додатній півосі.

Як відомо, рівняння Іто другого порядку є математичними моделями багатьох реальних об'єктів, що в процесі своєї еволюції зазнають дії випадкових факторів. Найпоширенішими прикладами таких об'єктів є механічні системи, що знаходяться в полі випадкових сил. При цьому відповідне диференціальне рівняння другого порядку виражає закон Ньютона еволюції даного об'єкта.

Наявність нескінченної кількості нулів розв'язку говорить про коливний характер еволюції досліджуваного об'єкта, а тому дослідження коливності розв'язків представляє як теоретичний, так і практичний інтерес. Предметом розгляду даної роботи є нелінійне стохастичне рівняння Іто другого порядку

$$\ddot{x} + p(t, x, \dot{x}) + q(t, x, \dot{x})\dot{W}(t) = 0, \qquad (1)$$

що є природним узагальненням детермінованого рівняння другого порядку.

Точна постановка задачі і означення будуть дані в основній частині роботи.

У порівнянні зі звичайними диференціальними рівняннями, для яких теорія коливності розв'язків досить добре розвинена, теорія коливності стохастичних систем ще знаходиться у стані становлення. Це пов'язано з тим, що присутність стохастичного члена в (1) накладає на вивчення його властивостей коливності ряд нових, на відміну від детермінованого випадку ($q \equiv 0$), труднощів.

По-перше, оскільки розв'язками рівняння (1) є випадкові процеси, то їх нулі є випадковими величинами із певними властивостями, а тому введення поняття нуля розв'язку потребує деяких додаткових конструкцій, на відміну від детермінованого випадку, де нулем розв'язку є звичайний нуль гладкої функції.

По-друге, розв'язки рівняння (1) на відміну від детермінованого випадку мають лише першу похідну. Останнє не дозволяє застосувати добре розвинуту в детермінованому випадку техніку дослідження коливності, що пов'язана з випуклістю розв'язку між двома послідовними нулями.

По-третє, питання коливності розв'язків рівняння (1) є сенс вивчати лише на нескінченних часових інтервалах, оскільки на скінченних часових інтервалах в силу теореми Струка-Варадана про носій ([1], теор.8.1, стор. 414) випливає, що розв'язки рівняння (1) з додатними ймовірностями можуть бути як коливними, так і неколивними.

Відзначимо ще одну особливість рівняння (1) чисто ймовірнісного характеру. Рівняння (1), переписане у вигляді системи, є частинним випадком стохастичних систем другого порядку. При цьому, здавалося б, воно повинно наслідувати всі властивості систем другого порядку. Але дана система є системою з виродженою дифузією, що значно ускладнює її дослідження чисто ймовірнісними методами.

Приведемо короткий огляд відомих нам в цьому напрямку результатів. Так в роботі [2] Мао розглядав рівняння $\ddot{x}+kx=h\dot{W}(t)$, де $W(t)$ – процес Вінера. Автор показав, що розв'язок з початковими даними $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$ має нескінченно багато нулів на півосі, причому всі вони прості. Тут отримані також оцінки зверху і знизу математичного сподівання першого нуля розв'язку.

У роботі [3] автори розглянули більш загальний випадок, а саме рівняння

$$\ddot{x}+k(t,x,\dot{x})=h\dot{W}(t),$$

для розв'язків якого встановлена оцінка $x^2(t)+\dot{x}^2(t)>0$, при $t>0$ з ймовірністю 1.

У роботі [4] для лінійних рівнянь $\ddot{x}+\ (p(t)+q(t)\dot{W}(t))x=0$ з використанням методу асимптотичної еквівалентності для стохастичних систем [5] розвинута класична теорія коливності Штурма.

Дана робота складається з трьох частин: вступ; постановка задачі і основні означення; випадок неколивності.

2. Постановка задачі та основні означення. Перейдемо тепер до строгої постановки задачі та необхідних означень. Рівняння (1) будемо розуміти як наступну систему стохастичних рівнянь:

$$\begin{cases} dx_1=x_2dt,\\ dx_2=-p(t,x_1,x_2)dt-q(t,x_1,x_2)dW(t). \end{cases} \tag{2}$$

Тут $x_1,x_2\in\mathbb{R}^1$, $t\geqslant 0$, $W(t)$ — стандартний процес Вінера, визначений при $t\geqslant 0$ на деякому повному ймовірнісному просторі (Ω,F,P) з фільтрацією $\{F_t,t\geqslant 0\}$, узгодженою з $W(t)$.

Означення 1. *Неперервно диференційовний при $t\geqslant 0$ з ймовірністю 1 випадковий процес $x(t)$ будемо називати розв'язком рівняння (1) при $t\geqslant 0$, якщо пара $(x(t),\dot{x}(t))=(x_1(t),x_2(t))$ є розв'язком системи (2) при $t\geqslant 0$.*

Відносно функцій $p(t,x_1,x_2)$ і $q(t,x_1,x_2)$ будемо вважати, що вони визначені і неперервні в області $t\geqslant 0$, $x_1\in\mathbb{R}^1$, $x_2\in\mathbb{R}^1$ за сукупністю змінних, а також задовольняють там по x_1, x_2 глобальну умову Ліпшиця та умову лінійного росту. Будемо також вважати, що $p(t,0,0)=q(t,0,0)=0$. Останнє забезпечує існування нульового розв'язку у (2).

Введемо тепер, згідно з [4], поняття нуля розв'язку та його коливності.

По-перше відзначимо, що при зроблених припущеннях розв'язок системи (2) $\bar{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))$ із початковою умовою $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$ (де $\bar{x}_0$ — F_{t_0} - вимірна випадкова величина, що має другий момент) визначений при $t\geqslant t_0$ і сильно єдиний. При цьому, як випливає з леми 2.3 ([6], стор.205), точка $(0,0)$ недосяжна для процесу $\bar{x}(t)$.

У наших позначеннях $x_1(t)=x(t)$.

Означення 2. *Розв'язок $x(t)$ рівняння (1) назвемо нетривіальним при $t\geqslant t_0$, якщо*

$$P\{x(t)\equiv 0,t\geqslant t_0\}=0.$$

Нехай тепер $x(t)$ — деякий нетривіальний розв'язок рівняння (1) при $t\geqslant t_0\geqslant 0$. Визначимо випадкову величину τ_1 наступним чином:

$$\tau_1=\inf\ \{t>t_0\ |x_1(t)=0\}, \tag{3}$$

якщо множина під знаком інфінума непорожня, і $\tau_1=\infty$ в противному випадку.

Означення 3. *Випадкову величину τ_1, визначену формулою (3), назвемо першим нулем розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t\geqslant t_0$, якщо $\tau_1<\infty$ з ймовірністю 1.*

Враховуючи тепер ту обставину, що точка $(0,0)$ недосяжна для процесу $(x_1(t),x_2(t))$, а також гладкість компоненти $x_1(t)$, можна стверджувати, що в деякому правому напівоколі першого нуля τ_1 компонента $x_1(t)$ відмінна від нуля. Це дає змогу коректно визначити випадкову величину τ_2:

$$\tau_2=\inf\{t>\tau_1\ |x_1(t)=0\}, \tag{4}$$

якщо множина під знаком інфінуму не порожня, і $\tau_2=\infty$ в противному випадку.

Цю випадкову величину назвемо другим нулем розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t \geqslant t_0$, якщо $\tau_2 < \infty$ з ймовірністю 1.

Далі за індукцією можемо визначити послідовність нулів $\{\tau_n\}$ розв'язку $x(t)$ при $t \geqslant t_0$. При цьому два нулі τ_{n-1} і τ_n назвемо послідовними нулями розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t \geqslant t_0$.

Якщо в даних побудовах $t_0 = 0$, то будемо говорити про нулі розв'язку на півосі.

Означення 4. *Нетривіальний розв'язок $x(t)$ рівняння (1) назвемо осцилюючим (коливним) на півосі $t > 0$, якщо він має там нескінченно багато нулів. В противному випадку розв'язок назвемо неколивним.*

3. Нелінійний випадок неколивності. Приведемо результат про неколивність розв'язків рівняння (1). Для його отримання суттєву роль відіграє теорема про інваріантність політопа [7] для розв'язків стохастичної системи. Приведемо узагальнення відповідного результату із [7].

Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^m$ систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx = f(t,x)dt + g(t,x)dW(t), \qquad (5)$$

де $x \in \mathbb{R}^m$, $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $g = [g_{ij}] : [0,\infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$, $W(t)$ — r-мірний процес Вінера з незалежними компонентами.

Будемо вважати, що функції f і g задовольняють стандартні умови існування та сильної єдиності розв'язку задачі Коші (наприклад: глобальна умова Ліпшиця по x, лінійний ріст за цією ж змінною та неперервність за сукупністю змінних).

Нехай $a, n \in \mathbb{R}^m$. Через $P(a,n)$ позначимо наступну множину в $\mathbb{R}^m$:

$$P(a,n) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x-a,n) \geqslant 0\}.$$

Тут $(\cdot,\cdot)$ — звичайний скалярний добуток, $|\cdot|$ — норма вектора, $\|\cdot\|$ — норма матриці, що узгоджена з нормою вектора.

Політопом в просторі $\mathbb{R}^m$ називається наступна множина:

$$\bigcap_{\alpha \in I} P(a_\alpha, n_\alpha), \qquad (6)$$

де $I = \{1, 2, \dots N\}$ — скінченний набір натуральних чисел.

Означення 5. *Множину $K \in \mathbb{R}^m$ назвемо інваріантною для системи (5), якщо для кожного її розв'язку, такого, що $x(\tau) \in K$ з ймовірністю 1, виконується умова*

$$\mathbb{P}\{x(t) \in K, \forall t > \tau\} = 1.$$

Тут τ – марковський момент часу відносно фільтрації $\{F_t\}$.

Зауваження. *Означення 5 є узагальненням означення інваріантності із [7] на випадок випадкового моменту часу.*

Відносно інваріантності множини (6) справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $K = \bigcap_{\alpha \in I} P(a_\alpha, n_\alpha)$ — політоп в $\mathbb{R}^m$. Припустимо, що коефіцієнти $f(t,x)$ і $g(t,x)$ системи (5) визначені при $t \geqslant 0$ і $x \in \mathbb{R}^m$ та задовольняють умови глобального лінійного росту по x та глобальну по x умову Ліпшиця.*

Множина K є інваріантною для системи (5) тоді і тільки тоді, коли для кожного $\alpha \in I$ і $x \in K$ таких, що $(x - a_\alpha, n_\alpha) = 0$ виконуються умови:

$$(f(t,x), n_\alpha) \geqslant 0, \ (g_j(t,x), n_\alpha) = 0$$

для $t \geqslant 0, j = \overline{1,r}$.

Тут g_j — j-й вектор-стовпчик матриці $g = [g_{i,j}]$.

Доведення даної теореми проводиться за тією ж схемою, що і відповідний результат із [7] з заміною нульового моменту часу на довільний марківський момент τ такий, що $x(\tau) \in K$ з ймовірністю 1.

Повернемося тепер до рівняння (1), яке ми як і раніше будемо розуміти як систему рівнянь (2).

Відносно функцій $p(t,x_1,x_2)$ і $q(t,x_1,x_2)$ будемо вважати виконаними умови другої частини роботи.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. Нехай функції p та q задовольняють вказані перед теоремою умови. Якщо ж до того:

$$\begin{aligned} &1)\ p(t,x_1,0) \geqslant 0 \quad \text{при } x_1 < 0, t \geqslant 0;\\ &2)\ p(t,x_1,0) \leqslant 0 \quad \text{при } x_1 > 0, t \geqslant 0;\\ &3)\ q(t,x_1,0) = 0 \quad \text{при } t \geqslant 0, x_1 \in \mathbb{R}^1, \end{aligned} \qquad (7)$$

то всі нетривіальні розв'язки рівняння (1) неколивні на додатній півосі.

Доведення. Розглянемо фазову площину x_1Ox_2 для системи (2). При цьому координатні осі розбивають її на чотири квадранти. Покажемо, що перший і третій з них є інваріантними для системи (2).

Перший квадрант є політопом типу (6), якщо його записати у вигляді

$$M = \{(x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0\}.$$

При цьому $a_1 = 0$, $n_1 = l_1 = (1, 0)^*$, $a_2 = 0$, $n_2 = l_2 = (0, 1)^*$. Тут $*$ — означає транспонування. Тоді, очевидно

$$M = \bigcap_{\alpha \in I} P(a_\alpha, n_\alpha),$$

де $I = \{1; 2\}$. Границями даного політопа є лінії

$$j_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \geqslant 0\} \quad \text{та}$$
$$j_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 = 0\}.$$

Функції f та g, що фігурують у теоремі 1, мають вигляд:

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -p(t, x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

$$g(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -q(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Перевіримо тепер виконання умов теореми 1.

Для границі j_1 маємо

$$(f, n_1) = (f, l_1) = x_2 \geqslant 0, \ (g, n_1) = (g, l_1) = 0.$$

Для границі j_2, в силу умов (7), отримуємо:

$$(f, n_2) = (f, l_2) = -p(t, x_1, 0) \geqslant 0,$$

$$(g, n_2) = (g, l_2) = -q(t, x_1, 0) = 0.$$

Таким чином, виконані всі умови теореми 1. Отже множина M є інваріантною для системи (2). Останнє означає, що крива $(x_1(t), x_2(t))$ з ймовірністю 1 не перетинає лінію $x_1 = 0$. Відзначимо також, що в силу першого рівняння в (2) маємо $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2 > 0$, а тому крива $(x_1(t), x_2(t))$ і не дотикається до лінії $x_1 = 0$.

Інваріантність третього квадранту випливає з аналогічних міркувань, якщо замість множини M розглянути множину політоп

$$M_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0\}.$$

При цьому також маємо, що $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2 < 0$, а тому крива $(x_1(t), x_2(t))$ не тільки не перетинає лінію $x_1 = 0$, але й не дотикається до неї.

Отже, якщо нетривіальні розв'язки системи (2) стартують із першого чи третього квадранту, то вони в них і залишаються, не перетинаючи лінію $x_1 = 0$. Для розв'язку рівняння (1) з початковими даними $x(0) > 0$ і $\dot{x}(0) \geqslant 0$, або $x(0) < 0$, $\dot{x}(0) \leqslant 0$, це означає його неколивність.

Розглянемо тепер розв'язок рівняння (1), що стартує із другого квадранту (чи його границі). Якщо він є коливним, то він має принаймні один нуль τ_1. Це означає, що з ймовірністю 1 $x(\tau_1) = 0$.

З першого рівняння системи (2) при цьому випливає, що $\dot{x}(\tau_1) > 0$. А тому крива $(x_1(t), x_2(t))$ при значеннях t з деякого правого околу точки τ_1 попадає в перший квадрант. В силу його інваріантності вона там і залишається. Отже, розв'язок, що стартує із другого квадранту, може перетворитися в нуль не більше одного разу, а отже є неколивним.

Аналогічно доводиться і неколивність розв'язків, що стартують із четвертого квадранту.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ветанаб С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ветанаб, Икеда // М. : Наука, 1986. – 445 с.

2. *Mao X.* Stochastic differential equations and their applications / X. Mao // Longman Scientific and Technical. – 1997. – P. 199–231.

3. *Markus L.* Stochastic oscillators / L. Markus, J. Weerasingle // ournal of differential equations. – 1998. – **71**, N3. – P. 288–314.

4. *Stanzhytskyi A. N.* Asymptotic equivalence of linear stochastic Ito systems and oscillation of solutions

of linear second-order equations / A. N. Stanzhytskyi, A. P. Krenevich, I. G. Novak // Differential equations. – 2011. – **47**, N6. – P. 1799–813.

5. *Samoilenko A. M.* Qualitative and asymptotic analysis of differential tquations with random perturbations / A. M. Samoilenko, O. M. Stanzhytskyi // World Scientific. – 2011. – 322 p.

6. *Khas'minskiy R. Z.* Stochastic stability differential equations / R. Z. Khas'minskiy // Sijthoff and Noordhoff. – 1980.

7. *Milan A.* Stochastic viability and comparison theorem / A. Milan // Collogium Math. Acad. Polonaise VLXVIII. – 1995. – P. 297–316.